AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle J = $]-\pi/2, +\pi/2[$.
On considère l'équation (E) de la variable complexe z :

(E) $z^2\cos^2\theta - 4z\cos\theta + 5 - \cos^2\theta = 0$

1 – Résoudre (E) dans l'ensemble des complexes. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de θ l'équation (E) admet une racine double et la valeur de cette racine.

2 – Le plan complexe étant rapporté à un repère orthogonal, on note par M_1 et M_2 les points du plan complexe dont les affixes respectives sont z_1 et z_2, solutions de (E).

Donner l'équation cartésienne de la courbe du plan, lieu géométrique de M_1 et M_2 lorsque θ varie sur l'intervalle J.

Correction :

1 – Le discriminant de (E) est $\Delta' = 4\cos^2\theta - \cos^2\theta\,(5 - \cos^2\theta) = -\cos^2\theta + \cos^4\theta$
$\Delta' = \cos^2\theta\,(\cos^2\theta - 1) = -\cos^2\theta\,\sin^2\theta = (i\sin\theta\cos\theta)^2$

Racine double si $\Delta' = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$ puisque θ appartient à l'intervalle ouvert J = $]-\pi/2, +\pi/2[$.
Pour $\theta = 0$, (E) devient $z^2 - 4z + 4 = 0 = (z-2)^2$
La racine double est $z^* = 2$.

Cas général :
Pour θ non nul, les solutions sont :
$z_1 = (2\cos\theta - i\sin\theta\cos\theta)/\cos^2\theta$
et $z_2 = (2\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta)/\cos^2\theta$

Après transformation, on obtient :

$z_1 = 2/\cos\theta - i\,\mathrm{tg}\theta$
$z_2 = 2/\cos\theta + i\,\mathrm{tg}\theta$

2 – Les coordonnées de M_1 et M_2 sont :

Pour M_1 : $x_1 = 2/\cos\theta$ et $y_1 = - \mathrm{tg}\theta$
Pour M_2 : $x_2 = 2/\cos\theta$ et $y_2 = \mathrm{tg}\theta$
On sait que $1 + \mathrm{tg}^2\theta = 1/\cos^2\theta$.

On en déduit que $1 + y^2 = x^2/4$.
Les points M_1 et M_2 appartiennent à la courbe d'équation $x^2/4 - y^2 - 1 = 0$, qui est une hyperbole de sommets A(2, 0) et A'(-2, 0), et d'asymptotes $y = x/2$ et $y = - x/2$.

Problème :

Dans tout le problème, on se place dans l'espace des polynômes, à coefficients réels, de la variable réelle.

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme P dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre, et sont donc égaux par paires.
L'objectif du problème est d'avancer dans la recherche des solutions de l'équation P(x) = 0.

Plus précisément, pour un polynôme symétrique P_{2n+1} de degré impair 2n+1 :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$$

les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k+1}$ pour k = 0 à n.

De même, pour un polynôme symétrique P_{2n} de degré pair 2n :

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

Les coefficients vérifient la relation $a_k = a_{2n-k}$ pour k = 0 à n-1, le coefficient médian a_n n'étant pas apparié.

<u>Partie 1</u>

On pose $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, et $u(k) = x^k + (1/x)^k$, pour k entier, $k \geq 0$ (et donc $u(1) = y$).

1 – Calculer u(0) et exprimer u(2) en fonction de y.

<u>Correction</u> :

$u(0) = 2$, $u(1) = y$, $u(2) = y^2 - 2$.

2 – Montrer que u(k+1) peut être exprimé en fonction de u(k), u(k-1) et y au moyen d'une relation R que l'on explicitera précisément.

Correction :

$(x^k + x^{-k})(x + x^{-1}) = (x^{k+1} + x^{-k-1}) + (x^{k-1} + x^{-k+1})$
D'où la relation (R) :
$u(k+1) = y.u(k) – u(k-1)$

3 – En utilisant la relation R établie à la question 2, discuter les conditions d'existence de la solution de R et donner la forme générale de u(k) en fonction de y et de k.

Correction :

L'équation caractéristique associée à la relation (R) est : $\lambda^2 - \lambda y + 1 = 0$.
$\Delta = (y^2 - 4)$
Si $\Delta>0$, il existe 2 racines $\lambda_1 = (y + \Delta^{1/2})/2$ et $\lambda_2 = (y – \Delta^{1/2})/2$.
La forme générale de u(k) est :
$u(k) = a[(y + \Delta^{1/2})/2]^k + b[(y – \Delta^{1/2})/2]^k$

Avec les conditions initiales u(0) = 2 et u(1) = y, on en déduit :

$a + b = 2$
$u(1) = y = (a + b)y /2 + (a – b) \Delta^{1/2}/2$

$\Rightarrow a + b = 2$ et $a – b = 0$

D'où a = b = 1
$u(k) = [(y + \Delta^{1/2})/2]^k + [(y – \Delta^{1/2})/2]^k = 2^{-k}[\sum_{i=0}^{k} C_k^i\, y^i\, (y^2 - 4)^{(k-i)/2} (1 + (-1)^{k-i})$

4 – Montrer que u(k) est un polynôme de degré k en y.

Correction :

- soit k pair, k = 2p

Alors, pour i pair, k-i pair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 2$

Et, pour i impair, k-i impair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 0$.
Ainsi, pour k = 2p, $2^k u(k) = \sum_{i=0}^{2p} 2\, C^i_{2p}\, y^i\, (y^2 - 4)^{(2p-i)/2}$

- soit k impair, k = 2p +1
Alors, pour i pair, k-i impair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 0$

Et, pour i impair, k-i pair $\Rightarrow 1 + (-1)^{k-i} = 2$.

Ainsi, pour k = 2p + 1, $2^k u(k) = \sum_{i=0}^{2p+1} 2\, C^i_{\,2p+1}\, y^i\, (y^2 - 4)^{(2p+1-i)/2}$

Il est évident que u(k) est un polynôme, et en regardant les termes du plus haut degré, un polynôme de degré k.

5 – Calculer u(3), u(4), u(5) et u(6) en fonction de y.

Correction :

En utilisant la relation (R) de la question 2 :

$u(3) = y^3 - 3y$

$u(4) = y^4 - 4y^2 + 2$

$u(5) = y^5 - 5y^3 + 5y$

$u(6) = y^6 - 6y^4 + 9y^2 - 2$

Partie 2

1 – Donner un exemple de polynôme symétrique de degré 1.

Correction : $P_1(x) = x + 1$ est un polynôme symétrique de degré 1.

2 – On considère le polynôme P_2 de degré 2 tel que : $x \longmapsto ax^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$.
Dans le cas où P_2 admet deux racines distinctes, les comparer.

Correction :

$P_2(x) = ax^2 + bx + a$
$\Delta = (b^2 - 4a^2)$.
Condition d'existence de 2 racines distinctes : $b^2 - 4a^2 > 0$, ou $|b| > 2|a|$
Racine double : $|b| = 2|a|$
Si $\Delta > 0$, il existe deux racines distinctes $x_1 = (-b + \Delta^{1/2})/2a$ et $x_2 = (-b - \Delta^{1/2})/2a$.

On constate surtout que les deux racines sont inverses, le produit x_1x_2 étant égal à 1.

Si $\Delta = 0$, $b = +/-2a$, et l'équation devient $ax^2 +/- 2ax + a = a(x+1)^2$ ou $a(x-1)^2$, c'est-à-dire que +1 ou -1 est racine double selon que $b = 2a$ ou $b = -2a$.

Partie 3

Considérons maintenant le polynôme P_3 du troisième degré tel que :

$x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bx + a$, $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_3 et que si α est racine de P_3, alors $1/\alpha$ l'est aussi.

Correction :

$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$

$P_3(0) = a \neq 0 \Rightarrow 0$ n'est pas racine de P_3.

$P_3(\alpha) = a\,\alpha^3 + b\,\alpha^2 + b\,\alpha + a = 0 = \alpha^3\,[a + b(1/\alpha) + b(1/\alpha)^2 + a(1/\alpha)^3]$
$1/\alpha$ est donc aussi racine de P_3 car $\alpha \neq 0$.

2 – Trouver une racine évidente x_0 de P_3 et en déduire une factorisation de P_3.

(-1) est racine évidente.
En factorisant : $P_3(x) = (x + 1)(ax^2 + (b-a)x + a)$.
On remarque que le polynôme $(ax^2 + (b-a)x + a)$ est encore un polynôme symétrique.

3 – Discuter le nombre de solutions de l'équation $P_3(x) = 0$.

Correction :

Soit à résoudre $ax^2 + (b-a)x + a = 0$.
$\Delta = (b-a)^2 - 4a^2 = (b - 3a)(b + a) \geq 0$ pour b n'appartenant pas à l'intervalle $]\,|a|\,,\,|3a|\,[$

On a alors 3 racines :
$x_1 = -1$

$x_2 = (a - b + \Delta^{1/2})/2a$

$x_3 = (a - b - \Delta^{1/2})/2a = 1/x_2$

4 – Soit $P_3(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$. Résoudre l'équation $P_3(x) = 0$

$7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = (x + 1)(7x^2 - 50x + 7)$

Racines : $x_1 = -1$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1/7$

Partie 4

Soit le polynôme P_4 du quatrième degré tel que : $x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, où $a \neq 0$.

1 – Montrer que 0 n'est pas racine de P_4 et que si α est racine de P_4, alors 1/α l'est aussi.
Correction : cf partie 3

2 – Soit $y = x + (1/x)$, pour $x \neq 0$, introduite dans la partie 1.

Montrer que $P_4(x) = x^2 g(x)$, où g est une fonction de la variable réelle x que l'on explicitera.

Exprimer g en fonction de y et y^2, et des coefficients a, b, c.

Correction :

$P_4(x) = x^2 g(x)$ avec $g(x) = a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x) + c$

La fonction g peut être exprimée en fonction de y comme étant $ay^2 + by + c - 2a$ puisque $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$ (d'après la partie 1).

3 – A quelle condition sur a, b et c l'équation $P_4(x) = 0$ admet-elle des solutions ? Montrer que résoudre l'équation $P_4(x) = 0$ revient à résoudre deux équations du second degré.

<u>Correction</u> :

Les solutions de $ay^2 + by + c - 2a = 0$ existent si $b^2 - 4a(c - 2a) = b^2 + 8a^2 - 4ac \geq 0$.

On note y_1 et y_2 les racines de $ay^2 + by + c - 2a$, $y_1 = [-b + [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$ et $y_2 = [-b - [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2}]/2a$.

Comme 0 n'est pas racine de P_4 , il reste à résoudre les deux équations :
$x + 1/x = y_1$ et $x + 1/x = y_2$, ou encore $x^2 - xy_1 + 1 = 0$ et $x^2 - xy_2 + 1 = 0$

Soit $x^2 - xy_1 + 1 = 0$; $\Delta = (y_1^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} - b]^2 \geq 16a^2$.

De même, pour $x^2 - xy_2 + 1 = 0$, la condition d'existence de 2 racines en x sera :
$(y_2^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2 \geq 16a^2$.

En résumé, l'équation $P_4(x) = 0$ aura 4 racines distinctes si :
$b^2 + 8a^2 - 4ac > 0$
$[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} - b]^2 > 16a^2$.
$[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2 > 16a^2$.
Soit $b^2 + 8a^{2²} - 4ac > 0$ et $\mathrm{Min}\{[(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} - b]^2, [(b^2 + 8a^2 - 4ac)^{1/2} + b]^2\} > 16a^2$.

4 – Résoudre l'équation : $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$.

<u>Correction</u> :

$P_4(x) = x^2g(x)$ avec $g(x) = 12(x^2 + 1/x^2) + 11(x + 1/x) - 146$

En notant par abus de langage $g(y) = 12(y^2 - 2) + 11y - 146 = 12y^2 + 11y - 170$,
on a : $y_1 = -17/4$ et $y_2 = 10/3$.

Cela conduit aux deux équations :

$x + 1/x + 17/4 = 0$ ou $4x^2 + 17x + 4 = 0$.
$x + 1/x - 10/3 = 0$ ou $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

La première mène à $x_1 = -8$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$; la seconde à $x_3 = 3$ et $x_4 = 1/3$.

Partie 5

On se place dans le cas général.

1 – Soit P_{2n+1} un polynôme symétrique. Trouver une racine évidente de P_{2n+1}.

Correction :

(-1) est racine évidente, compte tenu de la symétrie des coefficients.

2 – Montrer que $P_{2n+1}(x) = H(x)Q_{2n}(x)$ où H est un polynôme de degré 1 que l'on précisera et Q_{2n} un polynôme de degré 2n. On pose :

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

Exprimer les coefficients a_k, k = 0 à 2n+1, du polynôme P_{2n+1} en fonction des coefficients b_i, i = 0 à 2n, du polynôme Q_{2n}.
Montrer que le polynôme Q_{2n} est un polynôme symétrique.

Correction :

-1 étant racine, on peut factoriser (x + 1), soit : $P_{2n+1}(x) = (x + 1)Q_{2n}(x)$,
d'où H(x) = x + 1.

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$Q_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i = (x+1) \sum_{i=0}^{2n} b_i x^i$$

En regardant les termes extrêmes, on a les égalités $a_{2n+1} = b_{2n}$, et $a_0 = b_0$.

En comparant les coefficients de x^k dans les deux écritures, on a :
$a_k = b_{k-1} + b_k$ pour k = 1 à 2n.

Soit à montrer $b_k = b_{2n-k}$ pour k = 0 à n – 1.

H1 : k = 0 ; $a_0 = a_{2n+1} \Rightarrow b_0 = b_{2n}$. La relation est vraie pour k = 0.

H2 : supposons l'hypothèse vérifiée au rang k-1 : $b_{k-1} = b_{2n-k+1}$.

Montrons que:

$b_k = b_{2n-k}$

$b_k = a_k - b_{k-1} = a_{2n+1-k} – b_{2n-k+1}$

$a_k = b_{k-1} + b_k = a_{2n+1-k} = b_k + b_{2n-k+1}$

Or $a_{2n+1-k} = b_{2n-k} + b_{2n-k+1} \Rightarrow b_k = b_{2n-k}$

3 – Montrer que $Q_{2n}(x)/x^n$ peut être mis sous la forme $R_n(y)$ où R_n est un polynôme de degré n de la variable y déjà définie dans la partie 1, et utilisée également dans la partie 4.

<u>Correction</u> :

$Q_{2n}(x)$ est un polynôme symétrique, donc $Q_{2n}(x) = x^n [b_n + \sum_{i=0}^{n} (x^i + x^{-i})]$.

Soit $D(x) = b_n + \sum_{i=0}^{n} (x^i + x^{-i})$.

En utilisant la relation (R) (partie 1, question 2), et les résultats de la question 4, partie 1, on montre que D(x) peut être mis sous la forme d’un polynôme de degré n en y $R_n(y)$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1 :

Soit f une application f de]0, 1 [dans R^+ définie par $x \rightarrow f(x) = x - 2x^{1/2} + 1$.
Le symbole o représente la composition des applications.

Montrer que f o f (x) = x.

Correction :

Il est évident que $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$

On a donc : $f \circ f\ (x) = (f^{1/2} - 1)^2 = f - 2f^{1/2} + 1$

Or $f^{1/2}(x) = 1 - x^{1/2}$ puisque x est compris entre 0 et 1.

D'où : $f \circ f\ (x) = f - 2f^{1/2} + 1 = x - 2x^{1/2} + 1 - 2(1 - x^{1/2}) + 1 = x$.

Exercice n° 2 :

Un individu vit dans un environnement où il est susceptible d'être contaminé par une maladie. Son état de santé est suivi mensuellement.
Pour un mois donné m, trois états sont possibles :

- il est immunisé (état I)
- il est malade (état M)
- il est non malade et non immunisé (état S)

D'un mois m au mois suivant m+1, son état peut évoluer selon les règles épidémiologiques suivantes :

- étant immunisé au mois m, il peut, au mois m+1, être encore immunisé avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1
- étant malade au mois m, il peut, au mois m+1, être encore malade avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état immunisé avec une probabilité 0,8
- étant en l'état S au mois m, il peut, au mois m+1, être encore en l'état S avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état malade M avec une probabilité 0,5.

1 – Ecrire la matrice A qui résume les probabilités de transition entre l'état du mois m et l'état du mois m+1.

<u>Correction</u> :

Soient e(m) l'état au mois m, e(m+1) l'état au mois m+1.

Par les probabilités conditionnelles, on a les relations suivantes :

P(I(m+1)) =
P(I(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(I(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(I(m+1)/S(m)).P(S(m))

De même :

P(M(m+1))=
P(M(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(M(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(M(m+1)/S(m)).P(S(m))

P(S(m+1))=
P(S(m+1)/I(m)).P(I(m)) + P(S(m+1)/M(m)).P(M(m)) + P(S(m+1)/S(m)).P(S(m))

Avec les valeurs des probabilités proposées :
P(I(m+1) = 0,9.P(I(m)) + 0,8.P(M(m))

De même :

P(M(m+1) = 0,2.P(M(m)) + 0,5.P(S(m))
P(S(m+1) = 0,1.P(I(m)) + 0,5.P(S(m))

Considérons A la matrice de transition (3, 3) donnant les probabilités de passage d'un état e(m) au mois m à un état e(m+1) au mois m+1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

En notant E(m) = (P(I(m)), P(M(m)), P(S(m))) le vecteur-ligne des probabilités

décrivant l'état de l'individu au mois m, les relations issues des probabilités conditionnelles s'écrivent matriciellement :

E(m+1) = E(m).A

2 – Dans chacun des cas suivants, calculer les probabilités pour qu'un individu soit dans l'état e au mois m+2, e = I ou M ou S, sachant :

a) qu'il était immunisé au mois m

b) qu'il était non malade et non immunisé au mois m

c) qu'il était malade au mois m

E(m+2) = E(m+1).A = E(m).A²

Le calcul de la matrice A² conduit à $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & 0{,}05 & 0{,}14 \\ 0{,}88 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Cas a : E(m) = (1, 0, 0)

P(I(m+2) = 0,81
P(M(m+2)) = 0,05
P(S(m+2)) = 0,14

Cas b : E(m) = (0, 0, 1)
P(I(m+2) = 0,4
P(M(m+2)) = 0,35
P(S(m+2)) = 0,25

Cas c : E(m) = (0, 1, 0)
P(I(m+2) = 0,88
P(M(m+2)) = 0,04
P(S(m+2)) = 0,08

Problème :

Le symbole Ln désigne le logarithme népérien.

On considère la suite de fonctions f_n où, pour tout entier n strictement positif, la fonction f_n est définie sur l'intervalle]0, +∞ [par :

$$f_n(x) = (\mathrm{Ln}\ x) / x^n$$

1 – Etudier précisément les variations de f_n, pour $n \geq 1$ (limites, points particuliers, …). Soient x_M et y_M les coordonnées du point M en lequel f_n passe par son maximum. Déterminer le lieu géométrique de M, courbe décrite par le point M, lorsque n varie sur l'ensemble des nombres entiers.

Correction :
Soit $y = (\mathrm{Ln}\ x) / x^n$, $x > 0$.

Dérivée :
$y' = (1 - n\ \mathrm{Ln}\ x)/x^{n+1}$
Le signe de y' est celui du numérateur $(1 - n\ \mathrm{Ln}\ x)$:

$y' = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/n}$
$y' > 0 \Leftrightarrow x < e^{1/n}$
$y' < 0 \Leftrightarrow x > e^{1/n}$

Dérivée seconde :
Un calcul simple permet d'établir que :
$y'' = (n(n+1)\mathrm{Ln}\ x - (2n+1))/ x^{n+2}$

Il existe donc un point d'inflexion d'abscisse x_I vérifiant $n(n+1)\text{Ln } x_I - (2n + 1) = 0$, soit :
$x_I = \exp[(2n+1)/n(n+1)]$

Son ordonnée : $y_I = (1 + 2n) / (n(n+1)\exp[(2n+1)/(n+1)])$

Lieu géométrique du Maximum : $x_M = e^{1/n}$ et $y_M = 1/ne$
On en déduit, en éliminant n, que les points M appartiennent à la courbe d'équation $y_M = (\text{Ln } x_M)/e$
On remarque que $x_M = e$ pour $n = 1$, supérieur à 2, et que pour $n \geq 2$, la valeur de x_M est strictement comprise entre 1 et 2.

Point fixe : on remarque que, pour tout n, $f_n(1) = 0$.
Le point A (1, 0) est un point fixe du faisceau de courbes représentant les fonctions $f_n(x)$ lorsque n varie.

Limites :

$$\underset{x \to +0}{Lim}\ f_n(x) = -\infty$$

$$\underset{x \to +\infty}{Lim}\ f_n(x) = 0$$

Tableau de variations :

X	0	1	x_M	$+\infty$
y'		+	0	–
Y	$-\infty$	0	$(ne)^{-1}$	0

2 – Pour tout réel u, $u \geq 1$, on définit l'intégrale $J_n(u)$ par :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

2a – Exprimer $J_n(u)$ en fonction de u et de n.
(Indication : on pourra être conduit à distinguer les cas $n = 1$ et $n \geq 2$).
Calculer $J_n(2)$.

<u>Correction</u> :

$$J_n(u) = \int_1^u f_n(x)dx$$

Cas $n \geq 2$:

En intégrant par parties :

$J_n(u) = [x^{1-n} \text{Ln } x /(1-n)]_1 + \int_1^u \frac{dx}{(1-n)x^n}$

$J_n(u) = -\text{Ln } u /(n-1)\, u^{n-1} - 1/(n-1)^2 u^{n-1} + 1/(n-1)^2$

Cas $n = 1$:

$J_1(u) = \int_{[1,u]} (\text{Ln } x)/x \, dx = \int_{[0,\text{Ln } u]} v\, dv$ en faisant le changement de variable $v = \text{Ln } x$
$J_1(u) = v^2/2$ pris entre 0 et Ln u, soit $J_1(u) = (\text{Ln } u)^2/2$.

Calcul de $J_n(2)$.
Pour $n \geq 2$, $J_n(2) = -\text{Ln } 2 /(n-1)2^{n-1} - 1/(n-1)^2 2^{n-1} + 1/(n-1)^2$
Pour $n = 1$, $J_1(2) = (\text{Ln } 2)^2/2 = 0{,}24$.

2b – On pose $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$.
Exprimer $F_n(u)$ en fonction de u et de n.

Correction :

Pour $n = 1$, $F_1(u) = J_1(u) - J_1(2) = [(\text{Ln } u)^2 - (\text{Ln } 2)^2]/2$.

Pour $n \geq 2$, $F_n(u) = J_n(u) - J_n(2)$
$= [(\text{Ln } 2)/2^{n-1} - (\text{Ln } u)/u^{n-1}]/(n-1) + [1/2^{n-1} - 1/u^{n-1}]/(n-1)^2$

Remarque : pour $n \geq 2$, on constate que $F_n(u)$ est bornée supérieurement par la quantité $(\text{Ln } 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$.

2c – Déterminer $\lim_{u \to +\infty} J_n(u)$ et $\lim_{u \to +\infty} F_n(u)$

Correction :
Pour $n = 1$, $J_1(u) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$
et $F_1(u) \to +\infty$ quand $u \to +\infty$

Pour $n \geq 2$, $J_n(u) \to 1/(n-1)^2$ quand $u \to +\infty$
et $F_n(u) \to (\text{Ln } 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$ quand $u \to +\infty$

3 – Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la suite v définie par son terme général d'ordre p, p entier strictement supérieur à 2 :

$$v(p) = \sum_{k=2}^{p} f_n(k) = \sum_{k=2}^{p} (\text{Ln } k)/k^n$$

3a – Montrer que la suite v(p) est croissante.

Correction :
$v(p+1) - v(p) = \text{Ln}(p+1)/(p+1)^n > 0$.
La suite est donc croissante.

3b - Montrer que pour tous entiers n et k, n $\geq$ 2, k $\geq$ 2, on a :

$$f_n(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_n(x)dx \leq f_n(k)$$

<u>Correction</u> :
D'après la question 1, on sait que la fonction f_n est décroissante pour $x > x_M$. Or pour $n > 1$, $x_M < 2$.
Donc pour $k \geq 2$, la fonction f_n est décroissante sur tout intervalle [k, k+1] :
$k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow f_n(k+1) \leq f_n(x) \leq f_n(k)$

En intégrant entre k et k+1, on trouve bien la double inégalité recherchée pour l'intégrale.

3c – En déduire que $v(p) – (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) – (Ln\ p)/p^n$.

<u>Correction</u> :
Par construction, $J_n(p) = \int_{[2,p]} f_n(x)dx$
$F_n(p)$ est donc la somme des intégrales de f_n entre k et k+1 pour k allant de 2 à p –1.

On en déduit : $f_n(3) + ….. + f_n(p) \leq F_n(p) \leq f_n(2) + ….. + f_n(p – 1)$

Le terme de gauche est égal = $v(p) – Ln\ 2/2^n$.
Le terme de droite est égal à $v(p) – Ln\ p/p^n$.

On en déduit que $v(p) – (Ln2)/2^n \leq F_n(p) \leq v(p) – (Ln\ p)/p^n$.

3d – Trouver un encadrement pour v(p).

<u>Correction</u> :
En appliquant la double inégalité précédente, on a directement :

$F_n(p) + (Ln\ p)/p^n \leq v(p) \leq F_n(p) + (Ln\ 2)/2^n$

3e – Montrer que v(p) est une suite majorée.
Justifier l'existence d'une limite de la suite v(p), que l'on notera V : $V = \lim\limits_{p\to+\infty} v(p)$.

Déduire de ce qui précède un encadrement pour V.
Application numérique : n = 5 (on donne : Ln 2 = 0,693)

<u>Correction</u> :
On a remarqué, à la question 2, que pour $n \geq 2$, $F_n(u)$ était majorée par la quantité $(Ln\ 2)/2^{n-1}(n – 1) + 1/2^{n-1}(n – 1)^2$.
On en déduit immédiatement que le terme v(p) est majoré par la quantité :
$(Ln\ 2)/2^{n-1}(n – 1) + 1/2^{n-1}(n – 1)^2 + (Ln\ 2)/2^n$

La suite v(p) est donc croissante (question 3a) et majorée ; d'après un résultat connu, elle admet donc une limite V.

En faisant tendre p vers + ∞ dans la double inégalité d'encadrement de v(p) :

$F_n(p) + (\text{Ln } p)/p^n \leq v(p) \leq F_n(p) + (\text{Ln } 2)/2^n$

on en déduit : $\lim\limits_{p\to+\infty} F_n(p) \leq V \leq \lim\limits_{p\to+\infty} F_n(p) + (\text{Ln } 2)/2^n$

où la limite de $F_n(p)$ quand p tend vers l'infini est la quantité précédemment trouvée à la question (2c) : $(\text{Ln } 2)/2^{n-1}(n-1) + 1/2^{n-1}(n-1)^2$.

Application : n = 5, Ln 2 = 0,693, et $0{,}0147 \leq V \leq 0{,}03539$.

3f – A partir de quelle valeur de n la longueur de l'intervalle encadrant V est inférieure ou égale à 0,001 ?

Correction :
La longueur de l'intervalle d'encadrement de V est $(\text{Ln } 2)/2^n$.
Si on veut une longueur de l'intervalle inférieure à 0,001, cela signifie que :
$(\text{Ln } 2)/2^n \leq 0{,}001$
ou encore $2^n \geq 10^3 \text{ Ln } 2$ c'est-à-dire $n \geq \text{Ln}(10^3 \text{ Ln } 2)/\text{Ln } 2$
D'où $n \geq 10$.

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1 :

a) E(X) = 5.362 Keuros

V(X) = 399.488 Keuros^2 , Ecart-type(X) = 632 Keuros

b)

janv	84,55
févr	96,2
mars	102,78
avr	91,3
mai	109,7
juin	114,68
juil	114,68
août	102,98
sept	111,36
oct	104,4
nov	91,31
déc	76,06

Question 2

La série a tendance à croître au fil du temps de manière modérée. Toutefois, la facturation est bien supérieure au cours des mois de juin et septembre. A l'inverse, ce produit donne peu de facturations au mois de décembre.

Question 3 :

a) moyenne mobile de septembre 2005 : 112,12 (1345,43/12)
« « décembre 2005 : 111,85 (1342,185/12)

b) rapport saisonnier du mois de septembre 2005 : 1,1462 = (128,51/112,12)
« « « décembre 2005 : 0,7811 = (87,37/111,85)

c) 2004 : 6, 2005 : 12, 2006 : 12, 2007 : 12, 2008 : 3 donc 45 au total.

d) Déc 2004 : 0,7967 ; Déc 2005 : 0,7811 ; Déc 2006 : 0,7475 ; Déc 2007 : 0,7194
Soit un coefficient saisonnier de 0,7612

e) La moyenne des coefficients saisonniers est proche de 1

puisque $\left(\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} S_j\right) = 0{,}9973$. En conséquence, les chiffres du tableau 3 sont peu inchangés.

MM	CVS
janvier	0,9825
février	0,9591
mars	1,0256
Avril	0,9214
mai	0,9981
Juin	1,2140
juillet	1,0639
Août	1,0269
septembre	1,1185
octobre	1,0187
novembre	0,9104
décembre	0,7610

Question 4 :

a) juin 2006 : 115,26 = 139,93/1,214
décembre 2007 : 106,43 = 80,99/0,761

b) estimation difficile compte-tenu des évolutions du graphique avec la série corrigée.

Question 5 :

i se calcule par la formule : $(1+i)^{17} = \frac{114{,}28}{89{,}25} \Rightarrow i = 1{,}46\%$ /an.