AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Préambule :

Dans tout le problème, on admettra les résultats suivants :

a) $\forall a \in R$, $\forall$ x > 0, l'intégrale $f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a e^{-t^2/2} dt$ existe et est convergente

b) $\forall a > -1$, l'intégrale $g(a) = f_a(0)$ existe

c) $g(0) = f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

Partie A : a = 0, étude de la fonction f_0

On considère la fonction f_0 définie sur R^+ par :

$$f_0(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

1) En découpant l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [, montrer que f_0 est, en fait, définie sur R.

$$f_0(x) = \int_x^{1} e^{-t^2/2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

La deuxième intégrale de l'expression précédente existe d'après le préambule (x = 1) et est une constante ; quant à la première intégrale, elle existe pour x réel quelconque car la fonction $e^{-t^2/2}$ est continue sur R.

2) Interpréter précisément la fonction $f_0 / (2\pi)^{1/2}$ en termes de probabilités.

$f_0(x) / (2\pi)^{1/2}$ n'est autre que le complément à 1 de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi normale centrée réduite N(0, 1).
$f_0(x) / (2\pi)^{1/2} = 1 - \Phi(x)$.

3) Donner les valeurs des limites de f_0 quand x tend vers + ∞ et – ∞.

On en déduit, puisque $\Phi(x)$ tend vers 1 quand x tend vers + ∞ et vers 0 quand x tend vers – ∞ :

$$\lim_{n\to+\infty} f_0(x) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_0(x) = (2\pi)^{1/2}$$

Partie B : a > – 1, étude de l'intégrale g(a)

En fonction des notations vues dans le préambule, l'intégrale g(a) est définie par :

$$g(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2/2}\, dt$$

1) Calculer g(1) et g(2).

$g(1) = f_1(0) = \int_{R+} t.e^{-t^2/2}\, dt = \int_{R+} e^{-u}\, du$ en faisant le changement de variable $u = t^2/2$.

D'où g(1) = 1.

$g(2) = f_2(0) = \int_{R+} t^2.e^{-t^2/2}\, dt = \int_{R+} t.te^{-t^2/2}\, dt$

En intégrant par parties avec u = t et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$g(2) = [- te^{-t^2/2}]_{R+} + \int_{R+} e^{-t^2/2}\, dt = 0 + f_0(0) = (\pi/2)^{1/2}$

2) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation:

$$g(a + 2) = (a + 1)g(a)$$

$g(a + 2) = \int_{R+} t^{a+2} e^{-t^2/2}\, dt = \int_{R+} t^{a+1}. t . e^{-t^2/2}\, dt$

Par parties avec $u = t^{a+1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$, on obtient:

$g(a+2) = [- t^{a+1} e^{-t^2/2}]_{R+} + \int_{r+} (a+1)\, t^a e^{-t^2/2}\, dt = 0 + (a+1)\, g(a)$

3) Pour tout nombre entier n, écrire g(a + 2n) en fonction de g(a + 2(n – 1)).
En déduire l'expression de g(a + 2n) en fonction de g(a).

Il est évident que a + 2n = a + 2n – 2 + 2 = a + 2(n – 1) + 2
Donc, en appliquant la relation de la question 2, on a :

g(a + 2(n-1) + 2) = (a + 2(n-1) + 1)g(a + 2(n – 1)) = (a + 2n -1).g(a + 2(n – 1))

On en déduit, pour tout entier n > 0 :

$$g(a + 2n) = \prod_{k=1}^{n} (a + 2k - 1)\, g(a)$$

4) Soit m un nombre entier. On veut donner l'expression de g(m) en fonction de m.

4a) Démontrer que $1\times3\times5\times \ldots\times(2n-1) = (2n)! / 2^n.n!$

Partons de $1\times3\times5\times \ldots\times(2n-1)$; multiplions et divisons pour ne rien changer cette quantité par le produit des n premiers nombres pairs $2\times4\times6\times\ldots\times n$, qui est aussi égal à $2^n.n!$.
On obtient au numérateur la quantité (2n)!, d'où le résultat recherché.

4b) Donner les expressions de g(m) en fonction de m pour m pair, m = 2p, puis pour m impair, m = 2p + 1.

Soit m = 2p.
On fait a = 0 dans l'expression trouvée à la question 3, et on a :

$$g(2p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\, g(0) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)\, (\pi/2)^{1/2}$$

D'où le résultat :

$g(2p) = (\pi)^{1/2}\, (2p)! / 2^{p+1/2}.p!$

Soit m = 2p +1.
On fait a = 1 dans la relation de la question 3, ce qui conduit à :

$$g(1+2p) = \prod_{k=1}^{p}(2k)\, g(1) \text{ avec } g(1) = 1.$$

Il s'en suit : $g(1 + 2p) = (2p)! = 2^p.p!$

<u>Partie C</u> : a > – 1, étude de la fonction f_a

On considère la fonction f_a, a > – 1, définie sur R^+ par :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$$

1) Montrer que la fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.
En déduire $(f_a)'$ et $(f_a)''$, respectivement dérivée d'ordre 1 et 2 de f_a.

$f_a(x) = \int_{[x,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt = \int_{[x,1[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt + \int_{[1,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$
$= \int_{[1,+\infty[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt - \int_{[1,x[} t^a\, e^{-t^2/2}\, dt$

La première intégrale est une constante, la deuxième est dérivable pour x >0, de dérivée $x^a\, e^{-x^2/2}$.

f_a est donc dérivable pour x > 0, de dérivée $f_a'(x) = -x^a\, e^{-x^2/2}$.

On trouve ensuite : $f_a''(x) = x^{a-1}\, e^{-x^2/2}\, (x^2 - a)$

2) Quel est le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$?

La dérivée $f_a'(x) = -x^a\, e^{-x^2/2}$ est strictement négative pour x > 0.

On en déduit que f_a est strictement décroissante sur R+.

3) Etudier la limite de f_a quand x tend vers + ∞.
(on pourra couper l'intégrale sur [x, + ∞ [en une intégrale sur [x, 1 [et une intégrale sur [1, + ∞ [)

D'après l'écriture $f_a(x) = \int_{[1,+\infty[} t^a e^{-t^2/2}\,dt - \int_{[1,x[} t^a e^{-t^2/2}\,dt$, et en vertu du préambule, on a $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 0$.

4) *Dans toute cette question, on se restreint à a > 0.*

4a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

$\lim_{x\to 0} f_a(x) = \int_{R+} t^a e^{-t^2/2}\,dt$ (cf préambule) $= f_a(0)$, donc la fonction f_a est continue en 0.

4b) En déduire que $\lim_{x\to 0} f_a'(x) = f_a'(0) = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis, $\lim_{x\to 0} f'_a(x) = f'_a(0) = 0$.

4c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est positif, f''_a s'annule en $a^{1/2}$, est négative avant, positive après.

$\lim_{x\to\infty} f'_a(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} f'_a(x) = 0$

On en déduit que f'_a décroît de 0 à min $= f_a(a^{1/2})$ quand x varie de 0 à $a^{1/2}$, puis croît de ce minimum à 0 quand x varie de $a^{1/2}$ à + ∞.
f'_a étant toujours négative, f_a décroît de $f_a(0)$ à 0, avec point d'inflexion en $a^{1/2}$ (concave avant, convexe après).

5) *Dans toute cette question, on se restreint à – 1 < a < 0.*

5a) Montrer que f_a est continue sur [0, + ∞ [.

Idem précédemment, en vertu du préambule.

5b) Calculer $\lim_{x\to 0} f_a'(x)$. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?

$\lim_{x\to 0} f_a'(x) = -\infty$, donc f_a n'est pas dérivable en 0

5c) Dresser le tableau de variations de f_a et donner la forme de sa courbe.

Puisque a est entre – 1 et 0, f''_a est toujours positive pour x > 0, donc f_a est convexe, strictement décroissante de $f_a(0)$ à 0.

6) Pour toute la suite du problème, on revient au cas général a > – 1.
A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$f_a(x) = x^{a-1} e^{-x^2/2} + (a-1)f_{a-2}(x)$$

Pas de difficulté dans cette intégration, avec $u = t^{a-1}$ et $v' = te^{-t^2/2}$, donc $v = -e^{-t^2/2}$.

7) A partir de la relation établie à la question 6, étudier le signe de $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}$.

On a donc : $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} = (a-1)f_{a-2}(x)$

Le signe de cette différence est celui de a – 1, soit :

$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \geq 0$ si $a > 1$

$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$

$f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} = 0$ si $a = 1$ et dans ce cas $f_a(x) = f_1(x) = e^{-x^2/2}$

8) Démontrer que, pour tout $a > -1$, on a la majoration suivante :

$$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq |a-1| . f_a(x) / x^2$$

$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| = |a-1| \int_{[x,+\infty[} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt$

Or $t^{a-2} = t^a / t^2$.

Comme $t \in [x, +\infty[$, et $x > 0$, $t \geq x$ et donc $1/t \leq 1/x$, d'où $t^{a-2} \leq t^a / x^2$.

$\int_{[x,+\infty[} t^{a-2} e^{-t^2/2} dt \leq [\int_{[x,+\infty[} t^a e^{-t^2/2} dt] /x^2 = f_a(x) / x^2$

En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent :

$$f_a(x) \sim x^{a-1} e^{-x^2/2}$$

Quand $x \to +\infty$, $|a-1| . f_a(x) / x^2$ tend vers 0, d'où le résultat.

9) Dans le cas où $-1 < a \leq 1$, montrer que la majoration trouvée à la question 8 peut être améliorée en :

$$|f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2}| \leq 2 x^{a-3} e^{-x^2/2}$$

Reprenons le majorant trouvé à la question 8 : $|a-1| . f_a(x) / x^2$
Pour $-1 < a \leq 1$, $|a-1| \leq 2$.
D'autre part, on a montré à la question 6 que $f_a(x) - x^{a-1} e^{-x^2/2} \leq 0$ si $a < 1$.
Il s'en suit :
$|a-1| . f_a(x) / x^2 \leq 2. x^{a-1} e^{-x^2/2}/x^2 = 2 x^{a-3} e^{-x^2/2}$

<u>Partie D</u> : polynômes de Hermite

On considère la fonction h définie sur R par $h(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Etudier précisément les variations et donner la forme du graphe de h.

h est définie sur R, positive, paire, telle que lim h = 0 quand x tend vers l'infini (asymptote horizontale : y = 0), h(0) = 1.
$h'(x) = - x h(x) \Rightarrow$ h est décroissante de 1 à 0 sur R^+
$h'(0) = 0$
$h''(x) = (x^2 - 1)h(x)$ s'annule en x = 1 et -1 (points d'inflexion). La fonction est concave sur -1 et +1 et convexe sinon.

2) Donner l'expression de la dérivée h'(x) en fonction de h(x).

$h'(x) = - x\, h(x)$

3) Montrer que $h''(x) = P_2(x).h(x)$ et $h'''(x) = P_3(x).h(x)$, où P_2 et P_3 sont des polynômes respectivement de degré 2 et 3.

$h''(x) = - h(x) – xh'(x) = (x^2 - 1)h(x)$

$h'''(x) = (x^2 - 1)h'(x) + 2x.h(x) = (-x^3 + 3x).h(x)$

$P_2(x) = x^2 - 1$

$P_3(x) = -x^3 + 3x$

4) Montrer rigoureusement que la dérivée d'ordre n de h, $h^{(n)}(x)$ peut être écrite sous la forme $P_n(x).h(x)$, où P_n est un polynôme de degré n ne comportant que des puissances paires de x si n est pair, ou uniquement des puissances impaires de x si n est impair.
Le polynôme $H_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ est appelé polynôme de Hermite. Ecrire H_1, H_2, H_3.

Raisonnons par récurrence :

$P_1(x) = - x$

Soit n pair, n = 2p :

$$P_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k}x^{2k}$$

$h^{(2p)}(x) = P_{2p}(x).h(x)$

$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p}(x).h'(x) + P'_{2p}(x).h(x) = -x.\, P_{2p}(x).h(x) + P'_{2p}(x).h(x)$
$h^{(2p+1)}(x) = P_{2p+1}(x).h(x)= [-x.\, P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)].h(x)$

$$P_{2p+1}(x) = [-x.\, P_{2p}(x) + P'_{2p}(x)] = -a_{2p}x^{2p+1} + \sum_{k=1}^{p} (-a_{2k-2} + 2k.\, a_{2k})x^{2k-1}$$

$H_1= x$

$H_2 = x^2 - 1$

$H_3 = x^3 - 3x$

5) Etablir une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
On donne $P_4(x) = x^4 – 6x^2 + 3$. En déduire l'expression de P_5 et celle de H_5.

Comme à la question précédente, on a la relation $P_{n+1}(x) = -x.\, P_n(x) + P'_n(x)$.

D'où : $P_5(x) = -x.\, P_4(x) + P'_4(x) = – x^5 + 6x^3 – 3x + 4x^3 – 12x = – x^5 + 10x^3 – 15x$

Et $H_5(x) = x^5 – 10x^3 + 15x$

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 :

1) Soit A la matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1a) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) et des vecteurs propres v_1 et v_2 associés de la matrice A.
On notera par D la matrice diagonale formée par les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant.

L'équation caractéristique est $-\lambda(5 - \lambda) + 6 = 0$, soit $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Elle admet deux racines : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$:
$3x - 6y = 0$
On prend (par exemple) $x = 2$ et $y = 1$

Vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$:
$2x - 6y = 0$
On prendra $x = 3$ et $y = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1b) Donner l'expression d'une matrice régulière P telle que $A = P D P^{-1}$

La matrice P est formée par les vecteurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément $A = P D P^{-1}$

1c) En déduire la matrice A^n, n entier strictement positif.

Par construction, on a :
$A^n = P D^n P^{-1}$

En effectuant les produits, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3.2^{n+1} - 2.3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3.2^n - 2.3^n \end{pmatrix}$$

2) On considère la suite récurrente d'ordre 2 définie par :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

avec $u_0 = u_1 = 1$

On note V_{n+2} le vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1.} \end{pmatrix}$

2a) Montrer que $V_{n+2} = A\, V_{n+1}$

Le résultat est évident.

2b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Partant de $V_{n+1} = A\, V_n$, et allant jusqu'à $V_2 = A\, V_1$, on en déduit :
$V_{n+1} = A^n V_1$, avec $(V_1)' = (1, 1)$
Or $V_{n+2} = (u_{n+1}, u_n)'$

Pour avoir l'expression de u_n, il suffit de prendre la somme des termes de la deuxième ligne de A^n.
Soit $u_n = -2^n + 3^n + 3.2^n - 2.3^n = 2^{n+1} - 3^n$

2c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
$u_n = 2^{n+1} - 3^n = 3^n\,(2(2/3)^n - 1)$ qui tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$.

<u>Problème 2</u> :

N désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

Pour tout entier non nul n, on définit les sommes suivantes :

$$S_1(n) = 1 + 2 \ldots. + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Partie I :

1) Démontrer que $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

On peut faire la démonstration par récurrence (classique), ou tout simplement écrire que $2 S_1(n) = (1 + 2 + ... + n) + (n + n-1 + n-2 + ... + 2 + 1) = (1+n) + (2 +n-1) + (3 + n-2) + ... + (n-1 + 2) + (n + 1) = n(n + 1)$

D'où $S_1(n) = n(n + 1)/2$.

C'est ce calcul qui a été historiquement fait par Carl Gauss.

2) On désire établir une relation entre $S_3(n)$ et $S_1(n)$ de la forme $S_3(n) = h(S_1(n))$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal usuel, d'origine O, on définit par leurs coordonnées les trois suites de points ci-après ($n \geq 1$) :

$A_n\ (S_1(n), 0)$

$C_n\ (0, S_1(n))$

$B_n\ (S_1(n), S_1(n))$

2a) Quelle est la forme du quadrilatère $Q_n = (O, A_n, B_n, C_n)$?

Le quadrilatère est un carré de côté $S_1(n)$.
La suite des quadrilatères Q_n est une suite croissante de carrés emboîtés, telle que $Q_n \subset Q_{n+1}$.

2b) Donner l'aire q_n de Q_n

L'aire q_n de Q_n n'est autre que $[S_1(n)]^2$.

2c) Pour $n \geq 2$, donner l'aire p_n du polygone $(A_{n-1}, A_n, B_n, C_n, C_{n-1}, B_{n-1}, A_{n-1})$

L'aire p_n du polygone est égale à $n.S_1(n-1) + n.S_1(n)$.

Soit $p_n = n.S_1(n-1) + n.S_1(n).= n. (n-1)n/2 + n. n(n+1)/2 = n^3$

2d) En déduire la relation $S_3(n) = h(S_1(n))$, et l'expression de $S_3(n)$ en fonction de n.

On passe du carré Q_{n-1} au carré Q_n en ajoutant le polygone.

Soit, en aires : $q_n = q_1 + p_2 + p_3 +.... + p_n$

Or $q_n = [S_1(n)]^2$; et $q_1 + p_2 + p_3 +.... + p_n = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

D'où : $S_3(n) = [S_1(n)]^2 = n^2 (n + 1)^2 / 4$

Partie II :

On considère le polynôme à coefficients réels défini par :

$$P(x) = ax + bx^2 + x^3/3$$

et vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in R, P(x + 1) – P(x) = x^2$$

1) Calculer P(0), P(1), P(2), P(3), P(-1).

$P(0) = 0$
$P(1) – P(0) = 0$ d'où $P(1) = 0$
$P(2) = 1$
$P(3) = 4 + 1 = 5$
$P(x + 1) – x^2 = P(x)$ d'où $P(-1) = -1$

2) Calculer les coefficients a et b.
A partir de P(1) et P(-1) :

$0 = a + b + 1/3$

$-1 = - a + b – 1/3$

$\Rightarrow b = -1/2$ et $a = 1/6$

$P(x) = (x - 3x^2 + 2x^3)/6 = x(x – 1)(2x – 1)/6$

3) Montrer que la somme $S_2(n)$ est égale à la valeur du polynôme P en un point que l'on précisera.

$P(n+1) = P(n) + n^2$

$P(2) = P(1) + 1^2 = 1^2$

En additionnant membre à membre, on en déduit :

$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = P(n + 1)$

4) Donner l'expression explicite de $S_2(n)$ en fonction de n.

$S_2(n) = P(n+1) = (n + 1)(n + 1 – 1)(2n + 2 – 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

Partie III :

On définit $I_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$, somme des cubes des n premiers nombres impairs.

1) A l'aide des expressions de $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ trouvées dans les deux premières parties, montrer que $I_3(n) = 2n^4 – n^2$.

$(2k – 1)^3 = 8k^3 – 12k^2 + 6k – 1$

On en déduit :

$I_3(n) = 8 S_3(n) – 12 S_2(n) + 6 S_1(n) – n$

En remplaçant les sommes par les expressions trouvées, après simplification, il s'en suit :

$I_3(n) = 2n^4 – n^2$.

2) Déterminer l'entier n tel que la somme des cubes des n premiers nombres entiers impairs soit égale à 29 161.

Soit $X = n^2$ $(X > 0)$

$2X^2 – X – 29161 = 0$

$\Delta = 233289 = (483)^2$

Seule racine admissible en X : $X = 121$

D'où $n = 11$.

La somme des cubes de 11 premiers nombres impairs (de 1 à 21) vaut 29161.

3) Donner en fonction de n l'expression de $U_3(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3$, somme des cubes des n premiers nombres pairs.

Première méthode :

$U_3(n) = 8S_3(n) \Rightarrow U_3(n) = 8\, n^2\, (n + 1)^2 / 4 = 2n^2(n + 1)^2$

Deuxième méthode:

$I_3(n) + U_3(n)$ n'est autre que la somme des cubes des 2n premiers nombres entiers.

$2n^4 - n^2 .+ U_3(n) = (2n)^2\, (2n + 1)^2 / 4$

$\Rightarrow U_3(n) = n^2(2n + 1)^2 - 2n^4 + n^2$

$= n^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 + 1) = 2n^2\, (n + 1)^2$

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) a) E(X) = 12   V(X) = 4
   b) E(Y) = 11   V(Y) = 1,143
   c) E(Z) = 23   V(Z) = 4,571

2) a) On a E(Z) = E(X) + E(Y)

   Il ressort de cet exemple que la moyenne de la somme de deux variables est égale à la somme de leurs moyennes, ce qui était intuitivement évident.

   b) V(Z) $\neq$ V(X) + V(Y)
   La variance de Z : somme des deux variables, est ici inférieure à la somme des variances de X et de Y. Cela signifie qu'une certaine compensation s'est opérée entre les fluctuations des dividendes distribués par ces deux sociétés. Les risques liés à la non régularité des produits financiers ont donc été diminués.

3) a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right] - E(X)E(Y) = -0{,}286$

   b) A = 4,571

   c) On a V(Z) = A

   d) E(Z) = 11 500 et V(Z) = 1 142 750

4) Z = 300 X + 700 Y

   E(Z) = 11 300
   V(Z) = 799 950

5) a) Z = 1 000 α X + 1000 (1 – α) Y

   $V(Z) = (1000\,\alpha)^2\, V(X) + [1000\,(1-\alpha)]^2\, V(Y) + 2\,(1000)^2\,\alpha\,(1-\alpha)\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)$
   $= (1000\,\alpha)^2\,[V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)] + (1000)^2\,\alpha[-2\,V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}\,(X,Y)] + (1000)^2\, V(Y)$

La fonction V(Z) est une fonction de α polynôme de degré 2 continue dérivable, dont la dérivée s'annule pour la valeur $\alpha_0 = \dfrac{V(Y) - Cov(X,Y)}{V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y)}$. En faisant un tableau de variation, on voit que V(Z) est minimale pour α_0. Numériquement on trouve $\alpha_0 = 0,25$: soit 25 % d'actions A et 75 % d'actions B.

b) E(Z) = 11 250 euros   V(Z))= 785 687,5

c) On peut se rendre compte que la plus grande régularité des revenus (variance minimale) donne une rentabilité moindre (moyenne).

Exercice n° 2

1) Le nombre de désistements suit une loi binomiale de paramètres n = 300 et p = 0,02

2) $P(X = 3) = 0,0883$
   $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = P(X > 4) = 0.7177$

3) a) Évident
   b) $\Delta = 800 \sum_{x=1}^{k} xP(X = x) - 500k + 800k\, P(X > k)$
   A partir du tableau fourni, on calcule Δ pour k donné

k	Δ
0	0
1	298
2	585
3	837
4	1018
5	1092
6	1037
7	852
8	556

On trouve que pour k = 5, la différence est maximale.