ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le développement durable a été défini en 1987 par Mme Brundtland, Premier Ministre norvégien, comme «*un développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs.»*

Selon vous, quelles sont les conditions nécessaires à cet équilibre, en Afrique notamment ?

Sujet n° 2

«Une éthique des sciences est-elle nécessaire ?»

Argumentez avec des exemples.

Sujet n° 3

«*Ceux qui ne peuvent pas se souvenir du passé sont condamnés à le répéter*.» (George Santayana, «La Vie de la Raison»)

Quelles réflexions vous inspire cette phrase ? Vous pouvez envisager votre réflexion du point de vue de l'histoire collective mais aussi individuelle.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

L'épreuve traitant en partie de la divisibilité et des nombres premiers, on rappelle donc en préambule que :

- a et b étant deux nombres entiers naturels, b > 0, b divise a s'il existe q $\in$ N tel que a = bq,

- un nombre entier naturel a est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même,

- deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1,

- le chiffre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.

Exercice 1

On appelle *nombre parfait* un nombre entier naturel a dont la somme des diviseurs est égale à 2a.

1) Parmi les entiers suivants, y en a-t-il de parfaits : 3, 6, 10, 14, 20, 28 ?

2) Soit $a = 2^n (2^{n+1} - 1)$, $n \in N$. On suppose que $(2^{n+1} - 1)$ est premier. Montrer que a est un nombre parfait.

Exercice 2

On appelle nombre polymonadique tout nombre entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 : 1, 11, 111, etc. On note P(n) le nombre polymonadique s'écrivant avec n chiffres 1.

1) Montrer que $P(n) = (10^n - 1)/9$.

2) Montrer que, pour n pair, P(n) est divisible par 11.

3) Montrer que pour m entier, si m divise n, P(m) divise P(n).

4) En déduire que si P(n) est un nombre premier, alors n est premier.

5) Etudier P(5). Qu'en est-il de la réciproque du résultat de la question (4) ?

Problème

Ce problème comporte trois parties ; la partie A établit des résultats généraux qui seront utilisés dans les parties B et C.

Préambule :

Soit u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
Montrer que la suite u_n est positive et croissante.

Partie A :

1) On définit la suite v_n, $n > 0$, par : $v_n = u_n + 1$. Ecrire la relation existant entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n. Montrer que la suite v_n est positive et croissante.

2) Donner l'expression précise de v_n en fonction de n.

3) En raisonnant par récurrence, démontrer les relations suivantes :

(R1) $(v_{2n})^2 = v_{2n-1}.v_{2n+1} - 1$

(R2) $(v_{2n+1})^2 = v_{2n}.v_{2n+2} + 1$

4) Déduire de la question (3) la relation :

(R3) $(u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

5) Montrer la relation (R4) et en déduire (R5):

(R4) $(u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}.u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$

(R5) $5u_{2n-1}.u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)$

Partie B :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence de nombres premiers dans la suite u_n, ayant un rang impair.

6) A partir de la relation (R5), démontrer que si u_{2n-1} est premier, il divise soit u_{2n+1}, soit $u_{2n+1} - 1$.

7) On considère le premier cas : u_{2n-1} divise u_{2n+1}, c'est-à-dire $u_{2n+1} = q.\ u_{2n-1}$, q entier.

7a) Montrer que $q > 1$.

7b) A partir de (R4), en déduire : (R6) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n-1} = 1 + q$

7c) Montrer que les seules valeurs possibles pour q dans la relation (R6) sont $q = 3$ ou 4. Le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

8) Dans cette question, on considère le deuxième cas : u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$, c'est-à-dire que l'on a $(u_{2n+1} - 1) = q'.\ u_{2n-1}$, q' entier.

8a) Montrer que $q' > 1$.

8b) Démontrer (R7) $(q'^2 - 3q' + 1)\ u_{2n-1} = 4 - q'$

8c) Montrer que la seule valeur possible pour q' dans la relation (R7) est $q' = 3$. Dans ce cas, le terme u_{2n-1} est-il alors un nombre premier ?

9) Un terme de rang impair de la suite u_n peut-il être un nombre premier ?

Partie C :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les résultats de la partie A pour étudier l'existence des nombres premiers de la suite u_n ayant un rang pair.

10) En utilisant la relation (R2), démontrer :

(R8) $[(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$

En déduire :

(R9) $5u_{2n}.u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$

11) Démontrer alors que si u_{2n} est premier, il divise $u_{2n+2} - 2$ ou $u_{2n+2} +1$.

12) On considère le premier cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} - 2$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} - 2) = q.\ u_{2n}$, q entier.

12a) Montrer que $q > 1$.

12b) Démontrer : (R10) $(q^2 - 3q + 1)\ u_{2n} = 7 - 3q$

12c) Existe-t-il au moins une valeur de q donnant un sens à (R10) ?

13) On considère le deuxième cas : u_{2n} divise $u_{2n+2} + 1$, c'est-à-dire $(u_{2n+2} + 1) = q' u_{2n}$, q' entier.

13a) Montrer que $q' > 1$.

13b) Démontrer : (R11) $(q'^2 - 3q' + 1) u_{2n} = 3q' - 2$

13c) A partir de (R11), montrer que les seuls cas possibles sont q' = 3, 4 ou 5. Déterminer alors le(s) seul(s) terme(s) nombre(s) premier(s) de la suite u_n.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les récentes négociations de l'Organisation Mondiale du Commerce à Hongkong se sont terminées par un demi succès pour les économies en développement : en effet, les échanges agricoles semblent devoir encore rester limités par le protectionnisme des grandes puissances industrielles mais la tendance est à la libéralisation. Dans un premier temps, vous rappellerez rapidement les grandes tendances du commerce international depuis les premiers «Rounds» diplomatiques menés au sein du GATT (grandes étapes des négociations internationales et évolution des flux géographiques et sectoriels). Dans un second temps, vous vous appuierez sur la théorie économique (et en particulier la théorie de la croissance en économie ouverte) pour exposer les enjeux du commerce pour le développement des économies émergentes. Enfin, vous vous demanderez à quelles conditions les scénarios prédits par la théorie peuvent s'appliquer aux économies les moins développées.

Sujet n° 2

Pendant longtemps, le régime de change fixe a été la règle. L'effondrement du système de Bretton Woods, puis la mondialisation des échanges de biens et services et la mobilité accrue des flux de capitaux ont remis en question la pertinence de la fixité. Toutefois, la généralisation du régime de change flexible semble se heurter au scepticisme d'une grande part des gouvernements des économies en développement. D'une part, le régime de change fixe constitue l'un des outils de stabilisation des prix dans des régimes de politique économique à ancrage nominal cambiaire. D'autre part, les économies redoutent la forte volatilité des taux de change dans des économies peinant à atteindre simultanément équilibres externe et interne. En vous appuyant sur le modèle de Mundell Fleming, il vous est demandé de poser le problème du choix d'un régime de change «optimal» permettant d'assurer tout à la fois stabilité macroéconomique et croissance dans les économies en développement.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit le nombre entier a = $3^{2n} - 2^n$. Montrer que a est divisible par 7.

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n, $n \in N$, on définit le nombre $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

1) Calculer f(0), f(1), f(2), f(3)

2) Montrer que : $f(n+1) = (f(n) - 1)^2 + 1$

3) Montrer que $f(n) = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$

Exercice n° 3

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ par :

$f_n(x) = 1 / \cos^{2n+1}x$

et l'intégrale J(n) par :

$J(n) = \int_0^{\pi/4} f_n(x)\, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre J(n) et J(n+1) de la forme $J(n+1) = a_n + b_n J(n)$ où a_n et b_n sont des fonctions de n que l'on explicitera.

2) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on peut trouver deux réels u et v tels que :

$$1/\cos x = u \cos x/(1 - \sin x) + v \cos x/(1 + \sin x)$$

3) Calculer J(0)

4) Calculer J(2)

Exercice n° 4

A tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction f_n définie sur l'intervalle $[1, + \infty[$ par :

$\forall\ x \geq 1$, $f_n(x) = (\text{Ln } x)^n/(n!.x^2)$ où Ln désigne le logarithme népérien.

1) Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+ \infty$.

2) Etablir précisément le tableau de variations de f_n.

3) On note M(n) la valeur maximale de $f_n(x)$ sur $[1, + \infty[$.

Montrer que $M(n+1) = f_n(e^{(n+1)/2})/2$.
En déduire que $M(n+1) \leq M(n)/2$.
Quelle est la limite de M(n) quand n tend vers $+ \infty$?

4) On considère maintenant l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt$$

4a) Calculer $I_1(x)$.

4b) Montrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - h_n(x)$, où $h_n(x)$ est une fonction de n et x dont on donnera l'expression.
En déduire que, $\forall\ n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} [(\text{Ln } x)^k /k!.x]$$

5) Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel.
Montrer que : $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) M(n)$
En déduire la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers $+ \infty$.

6) Pour n entier, $n \geq 1$, et x réel $x \geq 1$, on pose :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\text{Ln } x)^k / k!$$

Exprimer $L_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
Déterminer la limite de $L_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$, α étant un nombre réel, $1 \leq \alpha < +\infty$.
En déduire la limite γ de la suite v_n dont le terme général de rang n est :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1

Soit une population de six personnes (4 hommes et 2 femmes) représentées par l'initiale de leur nom. On s'intéresse au salaire de ces personnes.

Monsieur A	960 euros
Monsieur B	990 euros
Monsieur C	1110 euros
Monsieur D	1170 euros
Madame E	930 euros
Madame F	990 euros

Question 1

Donner le nombre de tirages sans remise (échantillons) de taille 3 que l'on peut constituer à partir de la population des 6 personnes.

Question 2

Les salaires moyens obtenus pour chaque échantillon possible sont résumés dans le tableau ci-dessous.

ABC	1020	ABD	1040	ABE	960	ABF	980
ACD	1080	ACE	1000	ACF	1020	ADE	1020
ADF	1040	AEF	960	BCD	1090	BCE	1010
BCF	1030	BDE	1030	BDF	1050	BEF	970
CDE	1070	CDF	1090	CEF	1010	DEF	1030

Calculer la moyenne et l'écart type de cette série de valeurs.

Question 3

On souhaite réaliser un tirage stratifié à taux de sondage constant dans les strates Homme/Femme, toujours avec n = 3. Donner le nombre d'hommes (et de femmes) que l'on devra tirer. Préciser les échantillons retenus parmi les échantillons possibles présentés à la question précédente.

Question 4

A partir des échantillons retenus à la question 3, calculer la moyenne et l'écart type de ces moyennes d'échantillon. Commenter.

Exercice 2

Une filiale de l'entreprise Logica avait au 1er janvier 2000, 1000 salariés permanents. Quatre ans plus tard, au 1er janvier 2004, il n'en restait plus (sur ces 1000 salariés) que 846. 154 personnes ont quitté l'entreprise pour des raisons de retraite ou de convenances personnelles. La répartition de ces salariés par niveau est donnée dans le tableau ci-dessous.

Situation au 1er janvier 2004 des salariés déjà présents au 1er janvier 2000

1/1/2000 \ 1/1/2004	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	37	0	0	13	50
Agent de maîtrise	6	123	0	21	150
Agent d'exécution	0	20	660	120	800
Total	43	143	660	154	1000

Question 1

Calculer, pour chaque niveau en 2000, les probabilités pour qu'un individu pris au hasard et ayant en 2000 le niveau considéré se retrouve en 2004 dans l'une des 4 situations considérées (distribution marginale).

Question 2

Peut-on dire que le niveau de classification ait une influence sur les départs ? Commenter.

Question 3

Au bout de combien de périodes de 4 ans, plus d'un employé sur deux, parmi ceux présents au 1er janvier 2004, aura quitté l'entreprise si le taux de départs observé se maintient ?

Question 4

En supposant que les distributions marginales observées soient stables au cours du temps, quels seront, en l'absence d'embauche, les effectifs de l'entreprise par niveau au 1er janvier 2008 et au 1er janvier 2012 si l'on raisonne en espérance mathématique ?

Question 5

Combien de cadres faudra-t-il embaucher au 1er janvier 2004 pour qu'au 1er janvier 2012, l'entreprise compte 40 cadres, toujours dans l'hypothèse ou aucune autre embauche ne sera faite ?