AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème n° 1

1. $u_1 = 1/4 = 0{,}25$; $u_2 = 7/16 = 0{,}44$; $u_3 = 37/64 = 0{,}59$
$v_1 = 7/4 = 1{,} 75$; $v_2 = 25/16 = 1{,}56$; $v_3 = 91/64 = 1{,}42$

2. $u_{n+1} - u_n = (1 - u_n)/4$
Récurrence : $u_0 < 1$; supposons $u_n < 1$; alors $u_{n+1} < 1$
D'où $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est croissante.

De même, $v_{n+1} - v_n = (1 - v_n)/4$
Récurrence : $v_0 > 1$; supposons $v_n > 1$; alors $v_{n+1} > 1$
D'où $v_{n+1} - v_n < 0$.
La suite (v_n) est décroissante.

$v_{n+1} - u_{n+1} = 3(v_n - u_n)/4$
Par récurrence : $v_0 > u_0$; supposons $v_n > u_n \Rightarrow v_{n+1} > u_{n+1}$

3. $s_{n+1} = (3s_n +2)/4$
$s_0 = s_1 = s_2 = 2$
On démontre facilement par récurrence que la suite (s_n) est constante, égale à 2.

4. $t_{n+1} = 3t_n/4$
Suite géométrique de raison 3/4 et de premier terme $t_n = 2$
D'où : $t_n = 2.(3/4)^n$

5. On a donc :
$u_n + v_n = 2$
$v_n - u_n = 2.(3/4)^n$
D'où : $v_n = 1 + (3/4)^n$ et $u_n = 1 - (3/4)^n$

6. Les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1

Problème n° 2

Partie I

1. $f_n'(x)$ est de la forme $v(x)/x^3$, avec $v(x) = n – 2 – 2n.Lnx$
$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp((n-2)/2n)$

On pose $u(n) = e^{(n-2)/2n}$

Si $x < u(n)$, $f_n'(x) > 0$
Si $x > u(n)$, $f_n'(x) < 0$
Si $x = u(n)$, $f_n'(x) = 0$

La fonction f_n est donc croissante de 0 à u(n) et décroissante ensuite.

2. $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + n.Lnx = 0 \Leftrightarrow Lnx = - 1/n$
D'où :
$a(n) = e^{-1/n} = 1/e^{1/n} < 1$
a(n) est une suite positive, $a(n+1)/a(n) = e^{1/n(n+1)} > 1$
a(n) est croissante, majorée par 1.
Quand $n \to +\infty$, $\lim e^{1/n} = 1$ et donc $\lim a(n) = 1$

3. Quand $x \to 0^+$, $f_n(x)$ tend vers $-\infty$ (x = 0 asymptote verticale)
Quand $n \to +\infty$, $f_n(x)$ tend vers 0 (y = 0 asymptote horizontale).
Le max M(n) de f_n est atteint pour x = u(n) : $M(n) = f_n(u(n))$.

$M(n) = n/(2\ e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

	0		u(n)		$+\infty$
f_n'		+	0	-	
f_n	$-\infty$	$\uparrow$	M(n)	$\downarrow$	0

Par ailleurs, on remarque que $f_n(1) = 1$ pour tout n ; la famille des courbes représentant f_n passe donc par un point fixe (1, 1).

4. n = 2, u(2) = 1 ; M(2) = 1 ; a(2) = 0,61

n = 3, u(3) = 1,18 ; M(3) = 1,07 ; a(3) = 0,72

5. $D_n(x) = f_{n+1}(x) – f_n(x) = Lnx/x^2$, indépendante de n.
On a donc la relation de récurrence $f_{n+1}(x) = f_n(x) + Lnx/x^2$.
On construit donc point par point la courbe représentant $f_{n+1}(x)$ en ajoutant à $f_n(x)$ la quantité Lnx/x^2.

Partie II

6. En intégrant par parties avec $u = Lnx$, $du = 1/x$, $dv = dx/x^2$, $v = -1/x$:
$I = -(1 + Lnx)/x$
L'aire A(n) est donnée par l'intégrale :

$A(n) = \int_1^e D_n(x)dx = \int_1^e g(x)dx$

$A(n) = (1 + Ln1)/1 – (1 + Lne)/e = (e – 2)/e = 0,26$

7. $B(n) = \int_{[1,e]} f_n(x)dx = \int_{[1,e]} 1/x^2\, dx + n \int_{[1,e]} Lnx/x^2\, dx = [-1/x]_{[1,e]} – n\, [(1 + Lnx)/x]_{[1,e]}$

$B(n) = 1 – 1/e + n(e – 2)/e = [(e – 1) + n(e – 2)]/e \approx 0,63 + 0,26n$

8. C'est une suite arithmétique : $B(n+1) – B(n) = (e – 2)/e$
On sait que $B(n) = [(e – 1) + n(e – 2)]/e$
$\lim B(n) = +\infty$

Partie III

9. On suppose maintenant $n \geq 3$.
$u(n) = e^{(n-2)/2n}$; $u(n) > 1$?
$u(n) > 1 \Leftrightarrow Ln\, u(n) > 0 \Leftrightarrow (n – 2)/2n > 0$, ce qui est vrai puisque $n \geq 3$.

Remarque : $u(n) = e^{1/2}.e^{-1/n} = e^{1/2}.a(n)$ où a(n) a été introduit à la question 2. On en déduit que quand $n \to +\infty$, u(n) tend vers $e^{1/2}$.

Soit $M(n) = f_n(u(n)) = n/(2\, e^{(n-2)/n}) = ne^{2/n}/2e$

Considérons la fonction $h(x) = xe^{2/x}/2e$ pour $x \geq 3$.

$h'(x) = (x – 2)e^{2/x}/2ex > 0$ pour $x \geq 2$.
h(x) est donc strictement croissante ; $h(2) = M(2) = 1$
D'où $M(n) > 1$.

10. On a vu à la question 3 que f_n était croissante de $-\infty$ à M(n) sur l'intervalle]0, u(n)], telle que $f_n(1) = 1$, puis décroissante de M(n) à 0 sur [u(n), + ∞[.
Comme $f_n(1) = 1$, $f_n(x) > 1$ sur le sous-intervalle]1, u(n)[.
L'équation E n'admet donc pas de solution sur]1, u(n)[.

11. f_n étant strictement décroissante de M(n) à 0 sur [u(n), + ∞[, avec $u(n) > 1$ et $M(n) > 1$ (question 9).
On en déduit que l'équation (E) $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule sur l'intervalle D = [u(n), +∞ [.

12. Soit $\alpha(n)$ la solution de (E).

$f_n(n^{1/2}) = (2 + n.Ln\, n)/2n = 1/n + (Ln\, n)/2$
Or pour $n \geq e^2$, $Ln\, n \geq 2$, donc $f_n(n^{1/2}) \geq 1 + 1/n > 1$

Comme $f_n(\alpha(n)) = 1$ par définition, on en déduit que $f_n(n^{1/2}) \geq f_n(\alpha(n))$; f_n étant décroissante sur [u(n), + ∞ [, on a bien $\alpha(n) \geq n^{1/2}$: cette inégalité reposant sur $n \geq e^2$ voisin de 7,4, et n étant entier, $n \geq 8$.

Comme $\alpha(n) \geq n^{1/2}$, on a : $\lim \alpha(n) = + \infty$.

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA $2^{ème}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

1. Plaçons-nous dans le plan complexe : l'affixe de M est $z(M) = \rho e^{i\theta}$
Son image par la rotation a pour affixe $\rho e^{i(\theta+\pi/3)}$
D'où :
$X = x_M/2 - y_M(3)^{1/2}/2$

$Y = y_M/2 + x_M(3)^{1/2}/2$

2. Considérons le point I(0, -1) ; son image par R a pour coordonnées $(3)^{1/2}/2, - 1/2$.
La droite D' a pour équation :
$(Y + 1/2)/(X - (3)^{1/2}/2) = (3)^{1/2}$
$Y = (3)^{1/2} X – 2$

Le point A, intersection de D' et Δ, a pour coordonnées : ($X_A = 4/(3)^{1/2}$, $Y_A = 2$)

3. En procédant comme pour la question 1, le point B image de A par rotation de centre 0 et d'angle $– \pi/3$ a pour coordonnées :
$X_B = 5/(3)^{1/2}$, $Y_B = - 1$
Le point B appartient donc à la droite D.

4. On montre facilement $OA^2 = OB^2 = AB^2 = 28/3$
Le triangle OAB est équilatéral.
Sa surface est $OA.OB.\sin(\pi/3) = 14/(3)^{1/2}$

Problème 2

1. $J(1) = [x \operatorname{Ln}x – x]_1^e$
$J(1) = 1$

2. Faisons une intégration par parties.
On pose $u = (Lnx)^n$, $du = n.(Lnx)^{n-1}/x$, $dv = dx$, $v = x$

$J(n) = [x(Lnx)^n]_1^e - n\,J(n-1) = e - n.J(n-1)$

On a bien $J(n+1) = e - (n+1).J(n)$, soit $J(n+1) = a + bJ(n)$ avec $a = e$ et $b = n+1$.

$J(2) = e - 2$
$J(3) = e - 3J(2) = 6 - 2e$
$J(4) = e - 4J(3) = 9e - 24$

3. Sur $[1, e]$, $Lnx \geq 0 \Rightarrow J(n) \geq 0$
De même, $Lnx \leq 1$; donc $(Lnx)^n - (Lnx)^{n+1} \geq 0$, et $J(n) \geq J(n+1)$
La suite $J(n)$ est décroissante.
Décroissante et minorée, elle admet donc une limite.
Comme, pour tout n, $J(n) \geq 0$, $J(n+1) = e - (n+1).J(n) \geq 0 \Rightarrow (n+1).J(n) \leq e$
$J(n) \leq e/(n+1)$

$\Rightarrow 0 \leq J(n) \leq e/(n+1)$ et donc $\lim J(n) = 0$

On a : $J(n+1) + nJ(n) + J(n) = e$
Quand $n \to +\infty$, $J(n)$ et $J(n+1) \to 0$ et donc $nJ(n) \to e$.

Problème 3

1.a Il y a $C_n^2 = n(n-1)/2$ couples possibles ; un seul est composé des deux tickets gagnants.

Le nombre de couples de tickets composés d'un gagnant et d'un seul est $C_2^1\, C_{n-2}^1$,

soit $2(n-2)$.

Ceci permet d'écrire la loi de probabilité de X.

$P(X = 2) = 2/n(n-1)$

$P(X = 1) = 4(n-2)/n(n-1)$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = (n^2 - 5n + 6)/n(n-1)$

1.b $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) = 4/n$

$E(X^2) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 4.P(X = 2) = 4/(n-1)$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4(n-2)^2/n^2(n-1)$

1.c
$P(X = 2) = 2,2$ % ; $P(X = 1) = 35,6$ % ; $P(X = 0) = 62,2$ %

$E(X) = 0,4$; $V(X) = 0,284$

2.a Y suit une loi binômiale $B(2, 2/n)$

$P(Y = y) = C_2^y \, (2/n)^y \, ((n-2)/n))^y$ pour y = 0, 1 , 2

$P(Y = 2) = 4/n^2$

$P(Y = 1) = 4(n-2)/n^2$

$P(Y = 0) = (n-2)^2/n^2$

2.b $E(Y) = 4/n$; $V(Y) = 4(n-2)/n^2$

2.c $P(Y = 2) = 4$ % ; $P(Y = 1) = 32$ % ; $P(Y = 0) = 64$ %
$E(Y) = 0,4$; $V(Y) = 0,32$

3. a On a : $a(n) – b(n) = 4(n-2)/n(n-1) - 4(n-2)/n^2 = 4(n – 2) / n^2(n – 1)$

3.b Pour n = 50, a(n) – b(n) = 0,001567
Pour n = 64, a(n) – b(n) = 0,000961
Pour n = 63, a(n) – b(n) = 0,009915
Pour = 62, a(n) – b(n) = 0,0010235
$n^* = 63$

4. La probabilité de gagner est P(G) = P(avoir au moins un ticket gagnant)
$P_1(G) = P(X = 1) + P(X = 2) = (4n-6)/n(n-1)$
$P_2(G) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = 4(n-1)/n^2$
$P_2(G) - P_1(G) = (4 – 2n)/n^2(n-1) < 0$

La meilleure stratégie est la 1.

AVRIL 2005

<u>CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES</u>

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Le coefficient de corrélation entre les deux variables X et Y est égal à 0,884

Question 2

Y estimé = 15,11 X – 29914,54

Question 3

Y estimé 2003 = 350,8
Y estimé 2004 = 365,9

Question 4

A partir de la droite trouvée à la question 2, on peut calculer des valeurs estimés de Y pour les années étudiées. Les résultats vous sont donnés dans le tableau ci-dessous. Compléter ce tableau :

X	Y	Y estimé	E = Y – Y estimé
1998	271,0	275,2	-4,2
1999	281,5	290,4	-8,9
2000	323,2	305,5	17,7
2001	328,6	320,6	8,0
2002	323,0	335,7	-12,7
Moyenne	305,5	305,5	0
Variance	583,9	456,6	127,3

Voir la démonstration dans un livre de cours : la variance de Y est la somme de la variance de Y estimé et de la variance de l'écart entre Y et Y estimé.

Question 5

Le coefficient de détermination est égal à 0,782

Question 6

Le coefficient de détermination entre X et Z est égal à 0,66 et celui entre X et S vaut 0,23. Il est évident que le modèle linéaire n'est pas bien adapté pour la recherche des valeurs de S manquantes. D'ailleurs, un graphique du nuage du point entre X et S montre qu'une droite a peu de chances de relier les différents points. Cela montre les limites de l'exercice : la différence de deux valeurs « assez bien » estimées est loin d'être correctement estimée.

Question 7

Il n'y a pas de corrigé type mais on peut remarquer :

- pour la troisième année consécutive, les échanges avec l'étranger se soldent par un déficit commercial.
- celui-ci s'élève à 256 millions d'euros en 2003. Il est en diminution par rapport à celui constaté l'année précédente
- les exportations ont représenté un montant cumulé de 3.384 millions d'euros en 2003, en baisse de 5% par rapport à 2002 et de 23% par rapport à l'année 2000 qui fut certes une année exceptionnelle en matière d'exportations
- du côté des importations, la région retrouve son niveau de 1998. Les achats de la région à l'étranger sont en recul de 7% par rapport à 2002
- le secteur agroalimentaire, grâce à la bonne santé de ses exportations, contribue positivement au solde commercial (272millions d'euros)
- l'industrie automobile reste cependant de loin le plus gros secteur à l'exportation en 2003 avec un chiffre d'affaires de 739 millions d'euros
- l'Allemagne reste le premier partenaire de la région. L'Espagne confirme sa place de second client
- dans la liste des 15 premiers clients de la région, il faut remarquer la présence de l'Iran à la 13ème place avec un volume de 41 millions d'euros et de la Tunisie
- …