ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME n° 1

1) La fonction $f(t)\cos t$ (resp. $f(t)\sin t$) est continue sur R comme produit de deux fonctions continues.
La fonction u est la primitive de cette fonction s'annulant en 0.
u est donc dérivable sur R et pour tout x réel, $u'(x) = f(x)\cos x$.
De même $v'(x) = f(x)\sin x$.

2) En développant $\sin(x - t) = \sin x.\cos t - \cos x.\sin t$, et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$

T_f est donc dérivable (différence de produits de fonctions dérivables sur R).
Et on a, pour tout x réel :
$T_f'(x) = u(x)\cos x + u'(x)\sin x - v'(x)\cos x + v(x)\sin x$

En remplaçant u' et v' par leurs expressions (question 1), on obtient :

$T_f'(x) = u(x)\cos x + v(x)\sin x$

On montre aisément que T_f' est dérivable également, et que T_f'' est continue :
$T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$

T_f appartient donc à F.
T est une application de E dans F.

La linéarité $T_{f+g} = T_f + T_g$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

3) Puisque, d'après les questions 1 et 2, $T_f(x) = u(x)\sin x - v(x)\cos x$ et $T_f''(x) = v(x)\cos x - u(x)\sin x + f(x)$, on a bien $T_f + T_f'' = f$

Soit $f \in N(T)$: $T_f = 0$ et donc $T_f'' = 0$ d'où $f = T_f + T_f'' = 0$
Donc le noyau de T se réduit à l'application nulle de R dans R.

4) Soit $g \in Im(T)$: cela signifie qu'il existe (au moins) une fonction f de E telle que $g = T_f$. Donc $g \in F$ et comme $g(x) = \int_{[0,x]} f(t)\sin(x - t)\, dt$, on a de façon évidente $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$
$\Rightarrow g \in G$

D'où : $Im(T) \subset G$

Calcul de $T_{g+g''}$.

$T_{g+g''}(x) = \int_{[0,x]} g(t)\sin(x - t)\, dt + \int_{[0,x]} g''(t)\sin(x - t)\, dt$

Intégrons par parties :

Posons, dans la première intégrale, $u'(t) = \sin(x - t)$ et $v(t) = g(t) \Rightarrow u(t) = \cos(x - t)$ et $v'(t) = g'(t)$.
Dans la deuxième intégrale, on pose $u'(t) = g''(t)$ et $v(t) = \sin(x - t) \Rightarrow u(t) = g'(t)$ et $v'(t) = -\cos(x - t)$.

Remarque : aucune confusion entre ces notations u et v classiques en intégration par parties et les fonctions u et v de la question 1.

On obtient :

$T_{g+g''}(x) = [g(t)\cos(x - t)]_{[0,x]} - \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x - t)\, dt + [g'(t)\sin(x - t)\,)]_{[0,x]}$
$+ \int_{[0,x]} g'(t)\cos(x - t)\, dt$
$= g(x) - g(0)\cos x - g'(0)\sin x = g(x)$ car $g(0) = g'(0) = 0$.

On déduit que si g appartient à G, alors $T_{g+g''} = g$, donc $g \in Im(T)$: $G \subset Im(T)$.

On en conclut $Im(T) = G$.

5) D'après les résultats précédents, T est une application linéaire de E dans G, injective ($N(T) = 0$) et telle que $Im(T) = G$ (surjective). T est donc une bijection, c'est-à-dire un isomorphisme de E dans G, elle admet donc une application réciproque ,notée T^{-1}.

On a, pour tout g de G, $T_{g+g''} = g$; en composant par l'inverse, on a $T_g^{-1} = g + g''$.

6) Effectuons le calcul intégral :

$T_f(x) = \int_0^x \text{sint}\ \sin(x - t)\ dt = \int_0^x [\cos(2t - x) - \cos x]/2\ dt = (\sin x - x\cos x)/2$

Posons $h(x) = (\sin x - x\cos x)/2$, $h \in F$, et donc $s = T_h^{-1}$ et $h + h'' = s$

PROBLEME n° 2

1) f est continue sur l'intervalle U = [0, + ∞ [; elle admet donc une primitive F sur U, et on peut ainsi écrire h(x) = [F(x) – F(0)]/x.
F est dérivable et donc continue sur]0, + ∞ [; comme rapport de deux fonctions continues sur]0, + ∞ [, h est donc continue sur]0, + ∞ [.

Quand $x \to 0$, puisque F est dérivable en 0, [F(x) – F(0)]/x tend vers F'(0) = f(0) = h(0) ; d'où $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0)$.

2) On a établi dans la question 1 que h était continue sur U = [0, + ∞ [, c'est-à-dire que $h \in E$. H est donc une application de E dans E.

La linéarité de H est évidente : a et b étant deux réels, f et u deux fonctions de E :

- Pour x > 0, H(af + bu) = aH(f) + bH(u), d'après la linéarité de l'intégrale
- Ne pas oublier le cas x = 0 : H(af + bu)(0) = (af + bu)(0) = af(0) + bu(0) = aH(f)(0) + bH(u)(0)

3) F est dérivable sur]0, + ∞ [donc h est dérivable sur]0, + ∞ [comme rapport de deux fonctions dérivables.

4) Supposons que 0 soit valeur propre de H : il existe donc une fonction f non nulle de E telle que H(f) = 0.
On a donc f(0) = 0 et, pour tout x > 0, F(x) – F(0) = 0, c'est-à-dire F(x) = F(0) = constante.
F étant constante, F'(x) = f(x) = 0 $\forall x \in$]0, + ∞ [.
Or f est non nulle et donc 0 ne peut être valeur propre de H.

5) $H(f) = \alpha f = h \Rightarrow f = h / \alpha$
D'après la question 3, h est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc f l'est aussi.

Plaçons-nous sur $]0, +\infty[$; pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = f(x) = h(x)/\alpha = [F(x) - F(0)]/ \alpha x$, ou encore :

$\alpha x\varphi(x) = F(x) - F(0)$

En dérivant :

$\alpha[x\varphi'(x) + \varphi(x)] = f(x) = \varphi(x)$

D'où la relation demandée : $\forall\, x > 0 \quad \alpha\, x\, \varphi'(x) = (1 - \alpha)\, \varphi(x)$

6) Soit $x > 0$.
On a :
$g'(x) = (1 - 1/\alpha)x^{-1/\alpha}\varphi(x) + x^{(\alpha-1)/\alpha}\, \varphi'(x)$.

$g'(x) = x^{-1/\alpha}[\alpha\, x\, \varphi'(x) + (\alpha - 1)\, \varphi(x)]/\, \alpha = 0$ d'après la relation trouvée à la question 5.

La fonction g est donc constante sur $]0, +\infty[$.

7) On déduit de ce qui précède que si φ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une fonction f non nulle et continue telle que $H(f) = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$, il existe une constante réelle k telle que $g(x) = k$, ou encore :

$\varphi(x) = k\, x^{(1-\alpha)/\alpha}$

Comme f est continue en 0, f admet une limite finie à droite en 0 égale à f(0) ; une condition nécessaire pour que ceci soit réalisé est que $(1 - \alpha)/\alpha \geq 0$, c'est-à-dire :

$0 < \alpha \leq 1$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ si $0 < \alpha < 1$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = k$ si $\alpha = 1$.

8) Il résulte de tout ce qui précède que l'ensemble des valeurs propres α de H est l'intervalle $]0, 1]$.

Si $\alpha \in\,]0, 1[$, $f(x) = k\, x^{(1-\alpha)/\alpha}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

Si $\alpha = 1$, $f(x) = k$

Remarque : en revenant à la définition initiale, on vérifie facilement par le calcul que les fonctions f précédentes sont bien les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\alpha \in\,]0, 1[$ et $\alpha = 1$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On définit la suite récurrente (u_n), $n \geq 1$, par :

$u_1 = 0$

$\forall\ n \geq 2 \quad (n + 1)^2 u_n = (n - 1)\ u_{n-1} - n$

1) Calculer u_2 et u_3.

Pour $n = 2$, $9\ u_2 = u_1 - 2 \Rightarrow u_2 = -2/9$

$u_3 = -31/144$

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1, 0]$.

Raisonnons par récurrence.
La propriété est vraie au rang 1. Supposons-la vraie au rang n.

- $u_{n+1} = [nu_n - (n + 1)]/(n + 2)^2$

$u_n \leq 0 \Rightarrow nu_n - (n + 1) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq 0$

- $u_n - (-1) = [nu_n - (n + 1) + (n + 2)^2]/(n + 2)^2$

$= [n^2 + n(u_n + 3) + 3]/(n + 2)^2$

$u_n \geq -1 \Rightarrow u_n + 3 \geq 2 \Rightarrow n^2 + n(u_n + 3) + 3 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq -1$

Donc la propriété est vraie au rang n+1.

3) Montrer que la suite (u_n) admet une limite que l'on déterminera.

$u_n = [(n - 1)\, u_{n-1} - n]/(n+1)^2 = A(n)\, u_{n-1} + B(n)$

avec $A(n) = (n - 1)/(n+1)^2$ et $B(n) = - n/(n+1)^2$

A(n) et B(n) tendent vers 0 quand n tend vers l'infini

Comme $u_{n-1} \in [-1, 0]$, $-A(n) \leq A(n)\, u_{n-1} \leq 0$, et donc $A(n)\, u_{n-1} \to 0$ quand $n \to \infty$

Donc $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

4) Montrer que, $\forall\, n \geq 2$, $u_n \leq - n/(n + 1)^2$; établir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang n = 2.

En reprenant l'expression $u_n = A(n)\, u_{n-1} + B(n)$, on a $A(n)\, u_{n-1} \leq 0$ et donc :

$u_n - B(n) = A(n)\, u_{n-1} \leq 0 \Rightarrow u_n - B(n) \leq 0$

$u_n \leq - n/(n + 1)^2$

- $\forall\, n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = [nu_n - (n + 1)]/(n + 2)^2 - u_n$

$= - [u_n(n^2 + 3n + 4) + (n + 1)]/(n + 2)^2$

On a :

$n^2 + 3n + 4 \geq 0$

$u_n \leq - n/(n + 1)^2$

$\Rightarrow u_n(n^2 + 3n + 4) + (n + 1) \leq - n(n^2 + 3n + 4)/(n + 1)^2 + (n + 1) = (1 - n)/(n + 1)^2 < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire que la suite est croissante à partir du rang 2.

Exercice n° 2

1) Démontrons le résultat par récurrence :

- La propriété est vraie pour $n = 0$: $P_0 = 1$
- Supposons-la vraie au rang n

$f^{(n+1)}(x) = [P_n'(x)\,(1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)]\,(1 + x^2)^{-(n+2)}$

Posons $P_{n+1}(x) = P_n'(x)\,(1 + x^2) - 2x(n + 1)P_n(x)$

Soit P_n de degré n, de premier terme $a_n x^n$; le terme de plus haut degré de P_{n+1} est donc $n\,a_n x^{n+1} - 2(n+1)\,a_n x^{n+1} = -(n+2)\,a_n x^{n+1} \Rightarrow$ degré $P_{n+1} = n + 1$.

Tous les monômes de P_n ont la même parité que n : tous ceux de $x\,P_n(x)$ ont donc celle de $n + 1$, ceux de $P_n'(x)$ ont celle de $n - 1$, ceux de $P_n'(x)\,(1 + x^2)$ ont donc la parité de $n + 1$.

La propriété générale est donc vraie au rang $n + 1$.

2) Calcul de $f'(x)$:

$f'(x) = -2x / (1 + x^2)^2$

Donc : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0 \quad \forall x \in R$

3) Partons de la relation établie à la question 2 : $(1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$

Dérivons-la n fois :

$\Sigma_{k=0 à n} C_n^k\,(1 + x^2)^{(k)}(f'(x))^{(n-k)} + 2\Sigma_{k=0 à n} C_n^k\,x^{(k)}(f(x))^{(n-k)} = 0$

Or on remarque que $(1 + x^2)^{(k)} = 0$ dès que $k > 2$ et $x^{(k)} = 0$ dès que $k > 1$.

L'équation générale se simplifie grandement et devient :

$(1 + x^2)(f'(x))^{(n)} + 2nx(f'(x))^{(n-1)} + n(n - 1)(f'(x))^{(n-2)} + 2x(f(x))^{(n)} + 2n(f(x))^{(n-1)} = 0$

d'où :

$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n - 1)f^{(n-1)}(x) + 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) = 0$

et : $(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2(n + 1)xf^{(n)}(x) + n(n + 1)f^{(n-1)}(x) = 0$

En multipliant le tout par $(1 + x^2)^{n+1}$, on a :

$P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$

4) D'après la relation définissant P_{n+1}, $P_{n+1}(x) = P_n'(x)\ (1 + x^2) – 2x(n + 1)P_n(x)$, vue à la question 1, en remplaçant $P_{n+1}(x)$ par cette expression dans la relation de la question 3, on obtient :

$P_n'(x) + n(n+1)P_{n-1}(x) = 0$

5) Dérivons la relation établie à la question 4.
Il vient :

$P_n''(x) + n(n+1)P_{n-1}'(x) = 0$

Or, en utilisant le résultat de la question 4 au rang n – 1, on a :

$P_{n-1}'(x) = – n(n–1)P_{n-2}(x)$, et donc $P_n''(x) = n^2(n–1)(n + 1)P_{n-2}(x)$

La quantité à étudier $A = (1 + x^2)\ P_n''(x) – 2nxP_n'(x) + n(n+1)P_n(x)$ peut être écrite :

$A = n^2(n–1)(n + 1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2n^2(n + 1)xP_{n-1}(x) + n(n+1)P_n(x)$

$= n(n + 1)[\ n(n –1)(1 + x^2)P_{n-2}(x) + 2nxP_{n-1}(x) + P_n(x)]$

Or la quantité entre crochets n'est autre que, écrite au rang n – 1, celle qui est considérée dans la relation E, donc égale à 0.

Exercice n° 3

1) $\text{Ln}(1 + x) \approx x – x^2/2 + x^3/6$

2) Pour $x \neq 0$, $\text{Lnf}(x) = – 1 + (x + 2)/2x\ \text{Ln}(1 + x) \approx – x^2/12$

$f(x) \approx e^{– x^2/12} \approx 1 – x^2/12$

Donc $\text{Lnf}(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et donc $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$; or $1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Dérivée en 0 :

$[f(x) - f(0)]/x \approx - x/12 \to 0$ quand $x \to 0$

$f'(0) = 0$

3) Soit $x \neq 0$; en passant par le Ln :

$f'(x)/f(x) = [- x^{-2}\mathrm{Ln}(1 + x) + (x + 2)/2x(1 + x)]$

$f'(x) = f(x)\, x^{-2}\, [- \mathrm{Ln}(1 + x) + ½\, (1 + x - (1 + x)^{-1}]$

D'où :

$f'(x) = x^{-2}\, \varphi(x)\, f(x),\ x \neq 0$

f est continue sur $]- 1, + \infty[$, φ est continue sur $]- 1, 0[$ et $]0, + \infty[$, et l'application $x \to x^2$ est continue sur $]- 1, + \infty[$, nulle en 0.
Donc f' est continue sur $]- 1, 0[$ et $]0, + \infty[$.

Au voisinage de $x = 0$:

$\varphi(x) = ½\, [1 + x - (1 + x)^{-1}] - \mathrm{Ln}(1 + x) \approx ½\, [1 + x - (1 - x + x^2 - x^3)] - (x - x^2/2 + x^3/6) = - x^3/6$

$f'(x) \approx (1 - x^2/12)\, (- x^3/6)/x^2$

Donc $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$, donc f' est continue en 0 (puisqu'on a démontré en question 2 que $f'(0) = 0$).

4) On établit facilement que $\varphi'(x) = x^2/2(1 + x)^2$, donc positive.

φ est donc croissante, nulle en $x = 0$, et donc négative sur $]- 1, 0[$, positive pour $x > 0$.

5) Comme f' a le même signe que φ, f' est négative sur $]- 1, 0[$, nulle en 0, positive pour $x > 0$; f est donc décroissante sur $]- 1, 0[$, croissante pour $x > 0$, et passe par un minimum en $x = 0$ tel que $f(0) = 1$.

On en déduit que, $\forall\ x > - 1$, $f(x) \geq 1$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Soit X la variable aléatoire : nombre de postes informatiques défectueux parmi les 3 retenus

$$P(X=0) = \frac{C_{18}^{3}C_{2}^{0}}{C_{20}^{3}} = 0{,}716$$

$$P(X=1) = \frac{C_{18}^{2}C_{2}^{1}}{C_{20}^{3}} = 0{,}268$$

$$P(X=2) = \frac{C_{18}^{1}C_{2}^{2}}{C_{20}^{3}} = 0{,}016$$

2) Si m est le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 20 pièces, on a :

$$P(X=0) = \frac{C_{m}^{0}C_{20-m}^{3}}{C_{20}^{3}} = \frac{(20-m)(19-m)(18-m)}{20x19x18}$$

m=0	P=100%	m=4	P=49,1%	m=8	P=19,3%	m=12	P=4,9%	m=16	P=0,4%
m=1	P=85%	m=5	P=39,9%	m=9	P=14,5%	m=13	P=3,1%	m=17	P=0,1%
m=2	P=71,6%	m=6	P=31,9%	m=10	P=10,5%	m=14	P=1,8%	m=18	P=0%
m=3	P=59,6%	m=7	P=25,1%	m=11	P=7,4%	m=15	P=0,9%	m>18	P=0%

3) Si on teste une machine supplémentaire (soit 4), alors P(X=0) est égal à 0,632 (au lieu de 0,716 pour 3 machines testées). L'espérance de perte financière moyenne lié à l'acceptation du lot des 20 machines à tort diminue alors de 1432 euros à 1264 euros, soit une diminution de 168 euros. Comme le coût d'un test est de 200 euros, le conseil est de ne pas envisager l'augmentation de l'échantillon.

Exercice n° 2

Calcul des ventes des cigarettes LAFUME
aux conditions économiques du 1er janvier 1996

(en millions d'euros)

1er janvier	Taux d'inflation annuel	Indice des prix (base 100 au 1/1/96)	Ventes en millions d'euros courants	Ventes en millions d'euros constants
1996	-	100	1000	1000
1997	5%	105	1197	1140
1998	8%	113,4	1508	1330
1999	3%	116,8	1864	1596
2000	6%	123,8	2538	2050

Exercice n° 3

Pas de corrigé type.