ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Préliminaires :

$a = (z + \bar{z})/2$

$b = (z - \bar{z})/2i = i(\bar{z} - z)/2$

$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$

$\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})/2$

Première partie :

1) $f_n(0) = n$ et $g_n(0) = 0$

2) On a :

$S(x) = f_n(x) + i\, g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}$

En posant $e^{i2x} = a$, $S(x) = a + a^2 + \ldots + a^n = a\,(1 - a^n)/(1 - a)$

$S(x) = e^{i2x}\,(1 - e^{i2xn})/(1 - e^{i2x})$

$= e^{i(n+1)x}\,(e^{inx} - e^{-inx})/(e^{ix} - e^{-ix}) = [\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x]\sin nx / \sin x$

$f_n(x)$ est la partie réelle de $S(x)$, égale à $\cos(n+1)x.\sin nx / \sin x$

D'après les formules élémentaires de trigonométrie,
$\cos a \sin b = [\sin(a + b) - \sin(a - b)]/2$

d'où le résultat :

$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$

De même, $g_n(x)$ est la partie imaginaire de $S(x)$, d'où :

$g_n(x) = \sin(n+1)x \sin nx / \sin x = [\cos x - \cos(2n +1)x] / 2 \sin x$

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction $h(x)$ définie sur $[0 , \pi/2]$ par :

$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x \quad$ pour $0 < x \leq \pi/2$

$h(0) = \alpha$

h est le rapport de deux fonctions dérivables sur $]0 , \pi/2]$, donc est dérivable sur ce même intervalle.

En outre, on sait que sinx est équivalent à x quand x tend vers 0, et donc :
$\lim_{x\to 0} [h(x) - h(0)]/x = \beta$
La fonction h est dérivable à droite en 0, $h'(0) = \beta$.

Par suite, h est dérivable sur l'intervalle fermé $[0 , \pi/2]$.

Calcul de h'(x) pour $x \in [0 , \pi/2]$:

$h'(0) = \beta$

Sur $]0 , \pi/2]$, $h'(x) = [(\alpha + 2\beta x)\sin x - (\alpha x + \beta x^2)\cos x]/\sin^2 x$

h' est le rapport de deux fonctions continues sur $]0 , \pi/2]$; elle est donc continue sur $]0 , \pi/2]$.
En outre, quand x tend vers 0, $h'(x) \approx [(\alpha + 2\beta x)x - (\alpha x + \beta x^2)1]/x^2 = \beta = h'(0)$

$\Rightarrow$ h' est continue sur $[0 , \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$

a – h est continue sur $[0, \pi/2]$ car elle y est dérivable ; la fonction sin nx est également continue sur $[0, \pi/2]$, et donc h(x) sin nx est continue sur $[0, \pi/2]$.
Par conséquent, l'intégrale H(n) existe.

b – Intégrons par parties en posant u(x) = h(x) et v'(x) = sin nx
u'(x) = h'(x) et v(x) = – cos nx/n

On obtient :

$$H(n) = [-h(x)\cos nx/n]_{[0,\pi/2]} + \int_{[0,\pi/2]} h'(x) \cos nx/n \, dx$$

D'où $nH(n) = h(0) - h(\pi/2)\cos n\pi/2 + \int_{[0,\pi/2]} h'(x) \cos nx \, dx$

En passant aux valeurs absolues et en majorant les cosinus par 1 :

$|H(n)| \leq [|h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0,\pi/2]} |h'(x)| dx] / n$

On pose $K = |h(0)| + |h(\pi/2)| + \int_{[0,\pi/2]} |h'(x)| dx$

K est bien indépendant de n et vérifie $|H(n)| \leq K/n$.

On en déduit que la limite de H(n) est 0 quand n tend vers $+\infty$.

Deuxième partie :

5) On note par $J(k ; \alpha, \beta)$ l'intégrale suivante :

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$

Procédons à une première intégration par parties :

$u'(x) = \cos 2kx$

$u(x) = \sin 2kx / 2k$

$v(x) = \alpha x + \beta x^2$

$v'(x) = \alpha + 2\beta x$

$J(k ; \alpha, \beta) = \int_{[0,\pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$
$= [(\alpha x + \beta x^2) \sin 2kx / 2k]_{[0,\pi/2]} - \int_{[0,\pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx/2k \, dx$

d'où :

$J(k ; \alpha, \beta) = -(\int_{[0, \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx\, dx)/ 2k$

Procédons à une deuxième intégration par parties :

$u'(x) = \sin 2kx$

$u(x) = -\cos 2kx / 2k$

$v(x) = \alpha + 2\beta x$

$v'(x) = 2\beta$

Il s'en suit :

$J(k ; \alpha, \beta) = -(\int_{[0, \pi/2]} (\alpha + 2\beta x) \sin 2kx\, dx)/ 2k$

$= -[-(\alpha + 2\beta x) \cos 2kx / 2k]_{[0, \pi/2]} + \int_{[0, \pi/2]} 2\beta \cos 2kx/2k\, dx]/2k$

$= [(-1)^k(\alpha + \beta\pi) - \alpha]/4k^2$

6) On choisit α et β pour que $(\alpha + \beta\pi) = 0$ et $-\alpha = 1$, ce qui conduit à prendre $\alpha^* = -1$ et $\beta^* = 1/\pi$.

On a alors : $J(k ; \alpha^*, \beta^*)) = 1/ 4k^2$

7) $u_n = \Sigma_k 4 J(k ; \alpha^*, \beta^*) = 4 \Sigma_k \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \cos 2kx\, dx$

$= 4 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) \Sigma_k \cos 2kx\, dx$

$= 4 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) f_n(x)\, dx$

8) On remplace $f_n(x)$ par l'expression établie à la question 2 de la première partie.

$u_n = 4 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x\, dx$

On en déduit :

$u_n = 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi) [\sin (2n+1)x/\sin x]\, dx - 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, dx$

$u_n = 2 \int_{[0, \pi/2]} h^*(x) \sin (2n+1)x\, dx - 2 \int_{[0, \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, dx$

où h^* désigne la fonction h introduite à la première partie avec les valeurs (α^*, β^*) pour (α, β).

On a donc, compte tenu de la définition de H (question 4, première partie) :

$u_n = 2\ H(2n+1)\ - 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ dx$

Un calcul élémentaire permet d'établir que $- 2 \int_{[0,\ \pi/2]} (-x + x^2/\pi)\ dx = \pi^2/6$

9) Comme on sait (question 4, première partie) que $\lim\limits_{n \to +\infty} H(2n+1) = 0$, il s'en suit :

$U = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe et est égale à $\pi^2/6$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRECTION DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Il suffit d'étudier la fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x$

Sa dérivée est $f'(x) = -x / (1 + x)$, est positive entre – 1 et 0, négative ensuite. La fonction f est donc croissante sur $]-1, 0]$ et décroissante pour $x \geq 0$, passant par un maximum en $x = 0$.
Or $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0 \ \forall x > -1$.

2) $\ln (1 - x^2/n)^n = n \ln(1 - x^2/n)$
$\forall x \in [-(n)^{1/2}, n^{1/2}]$, $x^2/n \in [-1, 1]$

On applique le résultat de la question 1 avec $x \to -x^2/n$:
$n \ln(1 - x^2/n) \leq -x^2$

D'où : $(1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$

3) Toujours avec le résultat de la question 1, $\ln(1 + x^2/n) \leq x^2/n$

$-n \ln(1 + x^2/n) \geq -x^2$

D'où : $e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$

Problème n° 2

1) Le calcul direct permet d'établir :

$A^2 = 4A$
$B^2 = 2B$
$AB = BA = 0$

Et $A^n = 4^{n-1}A$, $B^n = 2^{n-1}B$

2) $S = A + B$. Par le développement du binôme, en remarquant que tous les produits de la forme $A^i B^j$, i et j entre 1 et n, sont nuls, on obtient :

$S^n = a^n A^n + b^n B^n = 4^{n-1}a^n A + 2^{n-1}b^n B$ pour tout entier n strictement positif.

Problème n° 3

Les coordonnées (x, y, z) du vecteur propre associé à la valeur propre λ vérifient les équations :

$(2\cos^2 t - \lambda)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$

$(1 - \lambda)y = 0$

$- x/2 + (2\sin^2 t - \lambda)z = 0$

Premier cas : $\lambda = 1$

Le système devient :

$(2\cos^2 t - 1)x + y + (1 + \cos 4t)z = 0$

$- x/2 + (2\sin^2 t - 1)z = 0$

ou encore :

$x \cos 2t + y + 2z \cos^2 2t = 0$

$x + 2z \cos 2t = 0$

On en déduit :

$y = 0$ et $x = -2z \cos 2t$

$\lambda = 1$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est engendré par le vecteur $(-2\cos 2t, 0, 1)$, c'est-à-dire une droite (dimension 1).

Deuxième cas : $\lambda \neq 1$

Le système devient :

$x = -2(\lambda - 2\sin^2 t)z$

$y = 0$

$z[2\cos^2 2t - 2(2\cos^2 t - \lambda)(\lambda - 2\sin^2 t)] = 0$

ou encore :

$x = -2(\lambda - 2\sin^2 t)z$

$y = 0$

$(\lambda - 1)^2 z = 0$

ce qui entraîne $x = y = z = 0$

Par suite, la seule valeur propre de T est $\lambda = 1$, la dimension du sous-espace associé est 1 (et non 3) et la matrice T n'est pas diagonalisable.

Problème n° 4

1) On a de façon triviale $U(0) = 1$

$U(1) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{1/2}\, dt$

On fait le changement de variable $t = \sin u$

$U(1) = \int_{[0,\pi/2]} \cos^2 u\, du = \int_{[0,\pi/2]} (1 + \cos 2u)/2\, du = \frac{1}{2}[u + \sin 2u/2]$ à prendre entre 0 et $\pi/2$, d'où :

$U(1) = \pi/4$

2) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a la majoration $(1 - t^2)^{1/2} \leq 1$

Or $(1 - t^2)^{(n+1)/2} = (1 - t^2)^{1/2} (1 - t^2)^{n/2}$, donc $(1 - t^2)^{(n+1)/2} \leq (1 - t^2)^{n/2}$

D'où $U(n+1) \leq U(n)$

3) Faisons une intégration par parties avec : $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, $v(t) = (1 - t^2)^{n/2}$, et donc $v'(t) = - nt(1 - t^2)^{(n-2)/2}$

$U(n) = [t(1 - t^2)^{n/2}]_{[0,1]} + n \int_{[0,1]} t^2(1 - t^2)^{(n-2)/2} dt$

$U(n) = n \int_{[0,1]} (t^2 - 1 + 1)(1 - t^2)^{(n-2)/2} dt = n (- U(n) + U(n-2))$

On obtient le résultat suivant :

$(n + 1) U(n) = n U(n - 2)$

On a donc $U(n) = U(n - 2) n/(n + 1)$ pour tout n supérieur ou égal à 2.

Cas n = 2p

$U(2p) = [2p\times2(p - 1)\times \dots \times2 / (2p + 1)\times(2p - 1)\times\dots\times5\times3] U(0)$

$U(2p) = [2^p p!]^2 / (2p + 1)!$

Cas n = 2p – 1

$U(2p - 1) = [(2p - 1)\times(2p - 3)\times\dots \times3 / 2p\times2(p - 1)\times \dots \times4] U(1)$

$U(2p - 1) = \{(2p)! / [2^p p!]^2\} \times \pi/2$

Problème n° 5

Considérons la suite u_n : $\alpha\, u_{n+1} - u_n + (1 - \alpha)\, u_{n-1} = 0$.
C'est une suite linéaire récurrente d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :

(C) $\alpha\, x^2 - x + (1 - \alpha) = 0$.

$\Delta = (1 - 2\alpha)^2$

Premier cas : $\alpha = 1/2$

(C) admet une racine double $1/2\alpha = 1$

On sait que dans ce cas la solution générale est donnée par $u_n = a + bn$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$a = 0$

$a + bK = 1 \Rightarrow b = 1/K$

$\mathbf{u_n = n/K}$

Deuxième cas : $\alpha \neq 1/2$

L'équation (C) admet deux racines distinctes :

$x' = (1 - (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = 1$

$x'' = (1 + (1 - 2\alpha)) / 2\alpha = (1 - \alpha)/\alpha$

La solution générale est de la forme $u_n = a(x')^n + b(x'')^n = a + b((1 - \alpha)/\alpha)^n$

Avec les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_K = 1$:

$a = 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$b = - 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

D'où : $\mathbf{u_n = [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^n] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]}$

En ce qui concerne la suite v_n, la seule différence concerne les conditions initiales. On trouve ainsi les résultats suivants :

Pour $\alpha = ½$, $\mathbf{v_n = 1 - n/K}$

Pour $\alpha \neq ½$, les équations vérifiées par les constantes a et b sont :

$a + b = 1$

$a + b((1 - \alpha)/\alpha)^K = 0$

où encore :

$a = -((1 - \alpha)/\alpha)^K /[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$b = 1/[1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]$

$\mathbf{v_n = [((1 - \alpha)/\alpha)^n - ((1 - \alpha)/\alpha)^K] / [1 - ((1 - \alpha)/\alpha)^K]}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Soit X la v.a. nombre de ventes, alors la loi de X est un loi binomiale de paramètres n=824 et p=0,9. Les valeurs de n et de p vérifient la formule donnée qui permet d'approximer la loi binomiale par une loi normale, donc on fait comme si X suit une loi normale de moyenne 741,6 et d'écart type 8,6. En utilisant la table donnée, on trouve, par interpolation linéaire, une valeur de 738 machines à acheter.

2) Avec la somme récupérée au titre de l'assurance, le BdE peut financer 40,7 pannes. Soit Z la v.a. nombre de réparations, on sait que Z suit une loi binomiale de paramètres n=740 et p=0,04. Les valeurs de n et de p vérifient la formule donnée, donc on considère que Z peut suivre une loi normale de moyenne 29,6 et d'écart type 5,3. En utilisant la loi normale centrée réduite, on est conduit à calculer P(T>2,09) et on obtient environ 1,8% par interpolation linéaire.

Exercice n° 2

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice mais on pouvait évoquer :

- que l'Ile-de-France est la région disposant du RDB par habitant le plus élevé ;
- qu'à l'inverse, la région Nord-Pas-de-Calais est la région disposant du RDB par habitant le plus faible ;
- que chaque habitant dispose en moyenne de 94.000 francs ;
- que 5 régions (Ile-de-France, Rhône-Alpes, Provence-Alpes-Côte d'Azur, Nord-Pas-de-Calais, Pays de la Loire), les plus peuplées de France, concentrent à elles seules 50% du revenu ;
- que les revenus du travail caractérisent plutôt les régions du nord de la France ;
- que les prestations sociales bénéficient plutôt à la province ;
- ….