ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Qu'a voulu exprimer l'ancien Président du Sénégal Léopold Sédar SENGHOR dans cette phrase :

«Les hommes doivent s'accepter différents et se vouloir complémentaires». En 2002 cette phrase est-elle toujours d'actualité ?

SUJET n° 2

Est ce que vous êtes d'accord avec cette phrase de Jean Rostand biologiste français (1894-1977) ? Donnez des exemples précis.

«La faiblesse des démocraties, c'est qu'il leur faille, trop souvent se renier pour survivre».

SUJET n° 3

Oscar Wilde écrivain anglais (1854-1900) a écrit cette phrase :

«Les tragédies des autres sont toujours d'une banalité désespérante». Qu'a t-il voulu exprimer ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

***Les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants** :*

SUJET n° 1

La définition d'une politique monétaire implique à la fois une capacité à évaluer l'évolution des agrégats monétaires (offre de monnaie), et une spécification de la demande de monnaie. Après avoir rappelé sommairement les fondements de la théorie de l'offre (théorie du multiplicateur de monnaie, théorie du diviseur de crédit…) et de la demande de monnaie (approches en terme de flux, théories du portefeuille…) il vous est demandé de réfléchir sur leurs implications respectives sur la politique monétaire, et en particulier sur les politiques macroéconomiques de stabilisation dans les économies en développement.

SUJET n° 2

L'hypothèse de concurrence imparfaite sur le marché des biens et services, sur le marché du travail et sur le marché des capitaux constitue le socle de la rénovation théorique tant en macroéconomie qu'en microéconomie. Il vous est demandé :

1) de rappeler ici les principes microéconomiques de fixation des prix et des quantités en situation de monopole et d'oligopole sur le marché des biens et services,

2) de déduire les implications de ces hypothèses de concurrence imparfaite dans différents domaines de l'analyse économique (théories du commerce international, théories du marché du travail…).

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Préliminaires :

- On rappelle que le nombre complexe z, $z \in C$, corps des complexes, peut s'écrire sous les formes algébrique et trigonométrique :

(1) $z = a + ib$, $a \in R$, $b \in R$

(2) $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}$

- Ecrire a et b en fonction de z et de son conjugué, noté $\overline{z}$
- Ecrire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

Première partie :

On considère, pour tout entier n strictement positif, les fonctions f_n et g_n d'une variable réelle définies, pour $0 \leq x \leq \pi/2$, par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$$

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin 2kx$$

1) Calculer $f_n(0)$ et $g_n(0)$

2) En écrivant $\cos 2kx + i \sin 2kx = e^{i2kx}$, montrer que $f_n(x)$ peut, pour $0 < x \leq \pi/2$, se mettre sous la forme :

$$f_n(x) = [\sin (2n+1)x - \sin x] / 2 \sin x$$

Donner une expression analogue pour $g_n(x)$.

3) α et β étant deux nombres réels, on considère la fonction h(x) définie sur $[0 , \pi/2]$ par :

$$h(x) = (\alpha x + \beta x^2) / \sin x \quad \text{pour } 0 < x \leq \pi/2$$

$$h(0) = \alpha$$

Montrer que h est dérivable sur $[0 , \pi/2]$. Calculer alors $h'(x)$ pour $x \in [0 , \pi/2]$.

Montrer que h' est continue sur $[0 , \pi/2]$.

4) Pour tout entier n strictement positif, on définit l'intégrale :

$$H(n) = \int_{[0, \pi/2]} h(x) \sin nx \, dx$$

La notation $\int_{[0, \pi/2]}$ signifie simplement que l'intégrale est prise pour x allant de 0 à $\pi/2$.

a – Montrer que $h(x) \sin nx$ est continue sur $[0 , \pi/2]$. En déduire que H(n) existe.

b – En utilisant <u>une</u> intégration par parties, démontrer qu'il existe un réel K, ne dépendant pas de l'entier n, tel que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$$|H(n)| \leq K/n$$

En déduire la limite de H(n) quand n tend vers $+ \infty$.

Deuxième partie :

On considère la suite définie, pour tout entier n strictement positif, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$$

On note par U la limite, si elle existe, de u_n quand n tend vers $+\infty$:

$$U = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$$

5) On note par J(k ; α, β) l'intégrale suivante :

$$J(k\,;\alpha,\beta) = \int_{[0,\,\pi/2]} (\alpha x + \beta x^2) \cos 2kx \, dx$$

Montrer que :

$$J(k\,;\alpha,\beta)) = [(-1)^k (\alpha + \beta\pi) - \alpha] / 4k^2$$

Remarque : pour établir ce résultat, on pourra procéder, par exemple, à deux intégrations par parties successives.

6) Déterminer un couple de valeurs (α^*,β^*) pour (α,β) tel que :

$$J(k\,;\alpha^*,\beta^*)) = 1/\,4k^2$$

On conservera les valeurs $\alpha = \alpha^*$ et $\beta = \beta^*$ pour toute la suite du problème.

7) Montrer que

$$u_n = 4 \int_{[0,\,\pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, f_n(x)\, dx$$

8) Démontrer alors que u_n peut se mettre sous la forme :

$$u_n = 2H(2n+1) - 2 \int_{[0,\,\pi/2]} (-x + x^2/\pi)\, dx$$

où H est l'intégrale introduite à la question 4 de la première partie, la fonction h intervenant dans son expression étant prise avec les valeurs (α^*,β^*) des paramètres (α,β).

9) En déduire que $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et donner la valeur de U.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Problème n °1 :

1) Le symbole ln est celui des logarithmes népériens.

Montrer que, $\forall\, x > -1,\ \ln(1 + x) \leq x$

2) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\forall\, x \in [\,-(n)^{1/2}, n^{1/2}\,] \qquad (1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$$

3) Montrer que pour tout entier n strictement positif :

$$\forall\, x \in R \qquad e^{-x^2} \leq (1 + x^2/n)^{-n}$$

Problème n °2 :

M_4 désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels.

A et B sont deux matrices symétriques de M_4, de coefficients respectifs : pour A, $a_{i,j} = 1$, $\forall i = 1$ à 4, $\forall j = 1$ à 4 ; pour B, $b_{i,i} = 1$ $\forall i = 1$ à 4, $b_{i,i+1} = 0$ $\forall i = 1$ à 3, $b_{i,i+2} = -1$, $\forall i = 1$ à 2, $b_{1,4} = 0$.

1) Calculer A^2, B^2, A^n, B^n, AB et BA.

2) Soit la matrice S = A + B. Donner l'expression de S^n, pour tout entier n strictement positif.

Problème n °3 :

Dans l'espace M_3 des matrices carrées d'ordre 3, on définit la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 1 & 1+\cos 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel quelconque.

Déterminer les valeurs propres de T et les sous-espaces associés.
La matrice T est - elle diagonalisable ?

Problème n °4 :

Pour tout n entier, on considère l'intégrale U(n) définie par :

$U(n) = \int_{[0,1]} (1 - t^2)^{n/2}\, dt$

Le symbole $\int_{[0,1]}$ signifie que l'intégrale est calculée pour t allant de 0 à 1.

1) Calculer U(0) et U(1).

2) Montrer que, $\forall\ n \in\ N$, $U(n+1) \leq U(n)$

3) Etablir une relation entre U(n) et U(n – 2).
En déduire la valeur de U(n). (On distinguera n pair et n impair).

Problème n °5 :

Dans ce problème, K représente un entier <u>fixé</u>, strictement supérieur à 1 ; α est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0, 1[.

On définit les suites u_n et v_n par les équations de récurrence suivantes :

(I) $\forall\ n \geq 1$, $u_n = \alpha\, u_{n+1} + (1 - \alpha)\, u_{n-1}$

avec $u_0 = 0$ et $u_K = 1$

(II) $\forall\ n \geq 1$, $v_n = \alpha\, v_{n+1} + (1 - \alpha)\, v_{n-1}$

avec $v_0 = 1$ et $v_K = 0$

Donner, selon les valeurs du paramètre α, les expressions de u_n et v_n en fonction de α, n et K.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice n° 1

L'association des élèves (BdE) d'une école envisage, comme à chaque rentrée scolaire, un achat groupé d'ordinateurs dotés des principaux logiciels statistiques d'utilisation courante dans le cursus du diplôme. Actuellement, la machine qui présente le meilleur rapport qualité/prix est la I.T - 22, fabriquée par la société "Intelligent Technics" et auprès de laquelle des commandes similaires ont déjà été passées au début des trois dernières rentrées scolaires. Cette machine pose cependant un problème de conception au niveau de sa carte mère et l'association des élèves a dû retourner 6% des machines au fabricant, dans le cadre de la garantie de 12 mois "pièces et main d'œuvre" mais est d'une très grande fiabilité par ailleurs. Il se trouve que par la suite les incidents de cette nature se raréfient et que sur une durée d'utilisation de 4 ans, le pourcentage de machines donnant satisfaction est de 90% ; autrement dit 4% des ordinateurs doivent être réparés entre leur seconde et leur quatrième année et le coût de la réparation (300 euros) doit alors être supporté par le propriétaire de la machine. Par ailleurs on admettra qu'une machine réparée ne retombe plus jamais en panne sur le reste de la durée d'utilisation de 4 ans. Ce problème préoccupe vivement l'association des élèves, mais les ordinateurs des autres marques sont beaucoup plus chers ; c'est la raison pour laquelle le choix des I.T - 22 est maintenu mais deux solutions caractérisées l'une par une garantie de 1 an et l'autre par une garantie de 4 ans est mise à l'étude. Mais auparavant le BdE cherche à mieux "cerner le marché".

1. Il est bien connu que tant que des arrhes ne sont pas versées, des “intentions d’achat” ne se concrétisent pas toujours. L’expérience passée montre qu’il existe une probabilité de 90% pour qu’une intention d’achat se transforme en achat définitif. Au cours de la première quinzaine de l’année scolaire, les représentants du BdE ont fait circuler des feuilles pour connaître le nombre d’étudiants désireux de passer par l’association des élèves pour acheter une I.T - 22. Bien entendu les conditions de vente sont alors spécifiées : le prix n’excèdera pas 795 euros et la livraison sera effectuée au maximum 15 jours plus tard. Le nombre d’étudiants ayant répondu positivement s’élève à 824. Donnez le nombre de machines que le BdE doit commander si, voulant limiter le risque de ne pas écouler sa commande, elle accepte une probabilité de 65% d’être en rupture de stock (c’est-à-dire dans l’impossibilité de satisfaire une ou plusieurs demandes d’élèves ayant fait part de leur intention de passer par elle pour l’achat de cette machine).

2. En définitive, l’association des élèves décide d’acheter 740 ordinateurs et l’on supposera, pour simplifier, qu’elles seront toutes vendues. Pour une commande directe de cette importance, la société I.T consent un prix unitaire de 736,5 euros, avec une garantie de 1 an (pièces et main d’œuvre). A ce coût d’acquisition, il convient d’ajouter, au titre de “frais divers de gestion” 30 euros pour déterminer le prix de vente qui s’élèverait donc à 766,5 euros pour cette première solution envisagée. La seconde solution envisagée consiste à offrir systématiquement une garantie de 4 ans (pièces et main d’œuvre) mais à un prix majoré de 16,5 euros (d’où un prix de vente de 783 euros), étant entendu que le BdE prend à sa charge le coût des réparations non couvertes par la garantie annuelle. Calculez la probabilité pour que le cumul des “primes d’assurance” (16,5 euros/ordinateur) perçu par le BdE ne suffise pas à couvrir les dépenses de réparation qu’il s’engage à prendre à sa charge ; qu’en concluez vous ?

Rappel de cours : Si $n > 5 \text{ et } \left|\sqrt{\frac{p}{1-p}} - \sqrt{\frac{1-p}{p}}\right| \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}3$ *alors la loi d’une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de caractéristique n et p peut être approximée par une loi normale de moyenne np et de variance np(1-p)*

On vous donne également pour vous aider la table de la loi normale centrée réduite N(0,1) ci-dessous. Si T suit une loi normale centrée réduite alors :

t	**P(T<t)**	**t**	**P(T<t)**	**t**	**P(T<t)**
0,0	0,5000	1,0	0,8413	2,0	0,9772
0,1	0,5398	1,1	0,8643	2,1	0,9821
0,2	0,5793	1,2	0,8849	2,2	0,9861
0,3	0,6179	1,3	0,9032	2,3	0,9893
0,4	0,6554	1,4	0,9192	2,4	0,9918
0,5	0,6915	1,5	0,9332	2,5	0,9938
0,6	0,7257	1,6	0,9452	2,6	0,9953
0,7	0,7580	1,7	0,9554	2,7	0,9965
0,8	0,7881	1,8	0,9641	2,8	0,9974
0,9	0,8159	1,9	0,9713	2,9	0,9981

Exercice n° 2

A l'aide des tableaux fournis en annexe, rédiger une note de synthèse traitant des revenus des ménages entre les régions françaises en 1996.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Le revenu disponible brut (RDB) des ménages correspond au montant des revenus de l'année qui reste à la disposition des ménages, une fois payés impôts et cotisations sociales, pour consommer et épargner. Il est égal au revenu primaire brut corrigé des transferts nets de redistribution.

Le revenu primaire brut correspond aux ressources que les ménages tirent de leur participation directe (rémunération du travail) ou indirecte (rémunération du capital) à la production : salaires, excédent brut d'exploitation des entrepreneurs individuels (agriculteurs, artisans, membres de profession libérale,…), loyers, intérêts, dividendes. Il inclut les cotisations sociales, y compris la part patronale.

Les transferts nets de redistribution sont le solde des prélèvements amputant le revenu des ménages (cotisations sociales et impôts directs) et des versements les majorant (prestations sociales).

Les prestations sociales sont de nature très diverses et comprennent principalement les retraites et préretraites, les allocations chômage, les allocations familiales, et les remboursements maladie.

L'opération "autres" figurant dans le tableau 2 est le solde entre diverses ressources (production de services de logement et de services domestiques par les ménages (hors entrepreneurs individuels), intérêts reçus, dividendes, indemnités d'assurance dommage,…) et prélèvements (intérêts versé, cotisations sociales des non salariés, primes d'assurance, …).

Le revenu disponible brut par habitant d'une région est un indicateur qui permet de s'affranchir de la taille de la région.

Tableau 1 – Poids des régions dans la population, le revenu disponible brut (RDB) et le produit intérieur brut (PIB) en 1996

Région	RDB (en millions de francs)	RDB par habitant (en francs)	Part de chaque région dans		
			La population (en %)	Le RDB (en %)	Le PIB (en %)
Alsace	165800	97100	2,9	3,0	3,0
Aquitaine	274200	95100	4,9	5,0	4,4
Auvergne	121000	92000	2,3	2,2	1,8
Bourgogne	149900	92300	2,8	2,7	2,4
Bretagne	266000	92700	4,9	4,9	4,1
Centre	224400	91600	4,2	4,1	3,7
Champagne-Ardenne	124900	92400	2,3	2,3	2,1
Corse	23000	88100	0,4	0,4	0,4
Franche-Comté	98400	88100	1,9	1,8	1,7
Basse-Normandie	126200	88900	2,4	2,3	2,1
Haute-Normandie	160200	89900	3,1	2,9	3,1
Languedoc-Roussillon	197400	87600	3,9	3,6	2,9
Limousin	65100	90600	1,2	1,2	1,0
Lorraine	202100	87400	4,0	3,7	3,4
Midi-Pyrénées	230100	91600	4,3	4,2	3,6
Nord-Pas-de-Calais	325400	81300	6,9	5,9	5,6
Pays de la Loire	279900	88400	5,4	5,1	4,7
Picardie	156000	83600	3,2	2,9	2,6
Poitou-Charentes	141900	87300	2,8	2,6	2,2
Provence-Alpes-Côte d'Azur	418700	93800	7,7	7,6	6,8
Rhône Alpes	511800	91000	9,6	9,3	9,3
Ile-de-France	1224200	110800	18,9	22,3	29,1
France métropolitaine	**5486600**	**94000**	**100,0**	**100,0**	**100,0**

Source : Insee Première n°617 de novembre 1998

Tableau 2 – La formation du revenu disponible brut (RDB) des ménages en 1996
(pour 100 francs)

Région	Salaires nets (+)	Excédent brut d'exploitation des entrepreneurs individuels (+)	Prestations sociales (+)	Impôts (-)	Autres (+)
Alsace	48,8	11,3	32,6	9,8	17,1
Aquitaine	37,6	18,7	37,2	8,6	15,1
Auvergne	37,9	16,4	38,5	8,5	15,7
Bourgogne	38,0	17,9	38,6	8,5	14,0
Bretagne	38,1	18,0	36,5	8,8	16,2
Centre	41,0	15,5	37,5	10,1	16,1
Champagne-Ardenne	40,5	19,2	35,4	8,8	13,7
Corse	30,2	14,4	47,1	9,7	18,0
Franche-Comté	42,7	14,4	36,5	8,3	14,7
Basse-Normandie	41,3	17,1	36,0	8,9	14,5
Haute-Normandie	44,2	12,0	37,0	9,9	16,7
Languedoc-Roussillon	34,5	14,9	43,4	9,4	16,6
Limousin	35,6	14,6	44,2	9,3	14,9
Lorraine	42,3	12,0	39,1	8,6	15,2
Midi-Pyrénées	39,2	16,6	39,0	9,9	15,1
Nord-Pas-de-Calais	41,5	10,7	41,4	9,4	15,8
Pays de la Loire	40,9	16,2	35,6	9,3	16,6
Picardie	42,0	15,0	37,3	9,3	15,0
Poitou-Charentes	36,3	18,2	38,3	8,6	15,8
Provence-Alpes-Côte d'Azur	40,5	12,9	39,7	10,7	17,6
Rhône Alpes	45,1	13,5	35,2	10,1	16,3
Province	**40,7**	**14,9**	**37,9**	**9,4**	**15,9**
Ile-de-France	54,9	8,3	30,0	15,2	22,0
France métropolitaine	**43,9**	**13,4**	**36,1**	**10,7**	**17,3**

Source : Insee Première n°617 de novembre 1998

Lecture : pour disposer de 100 francs de revenu, l'ensemble des ménages métropolitains ont reçu 43,90 francs de salaires nets, 13,40 francs d'excédent brut d'exploitation, 36,10 francs de prestations sociales, 17,30 francs d'autres ressources, et ont versé 10,70 francs d'impôts. L'opération “ autres ” est en fait un solde entre diverses ressources et prélèvements.