ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

La fonction f est définie pour $x \notin [-1, 1]$
On remarque que f est paire : il suffit donc de l'étudier sur $]1, +\infty[$ puis de faire une symétrie axiale par rapport à l'axe Oy pour avoir l'ensemble de la courbe.

f est continue, dérivable, et $f'(x) = 1 / x\ln x$ pour x supérieur à 1

Quand x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $+\infty$; en outre, comme $\ln x < x$, f(x)/x est majoré par $\ln x/x$ et tend donc vers 0 quand x tend vers l'infini : branche parabolique 0x.
Quand x tend vers 1, f(x) tend vers $-\infty$.

La fonction f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e, et sa tangente en ce point a pour pente 1/e.

Tangentes :

En A (e, 0), l'équation de la tangente D(A) est $y = -1 + x/e$

En B (-e, 0) , l'équation de la tangente D(B) est $y = -1 – x/e$

D(A) et D(B) se coupent au point C d'abscisse 0 et d'ordonnée –1.

Normales :

En A (e, 0), l'équation de la normale $\Delta(A)$ est $y = 1 - x/e$

En B (-e, 0) , l'équation de la tangente $\Delta(B)$ est $y = 1 + x/e$

$\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ se coupent au point D d'abscisse 0 et d'ordonnée 1.

Le quadrilatère ADBC est un losange, de surface 2e.

Problème n° 2

1) La fonction $f(x) = (4 + x^4)^{-1/2}$ est définie pour tout x réel. Elle est paire, ce qui permet de l'étudier sur R^+
Sa dérivée f', qui existe en tout point, est donnée par :

$f'(x) = -2x^3(4 + x^4)^{-7/2}$ est donc négative sur R^+ ; f est donc décroissante de f(0) = ½ à 0.

Sa tangente en x = 0 a une pente nulle, et est parallèle à l'axe horizontal.

2) Considérons la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

2.1) La fonction f étant continue sur R, F(x) existe pour tout réel x.
Concernant la parité de F, calculons F(-x) :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\, dt$$

Faisons le changement de variable u = -t ; comme f est paire, on en déduit immédiatement que F est impaire, F(-x) = - F(x).

2.2) Puisque f est continue, elle admet une primitive notée H. Et F(x) = H(2x) – H(x).
La dérivée de F est donc :

$F'(x) = 2f(2x) – f(x) = 2(4 + 16x^4)^{-1/2} - (4 + x^4)^{-1/2} = (1 + 4x^4)^{-1/2} - (4 + x^4)^{-1/2}$

2.3) D'après la question 1, on sait que f est décroissante sur R^+ ; et donc on a les inégalités $f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ pour tout t entre x et 2x.

Par définition de F, en intégrant entre x et 2x la double inégalité précédente, on obtient :

$x\, f(2x) \leq F(x) \leq x\, f(x)$

ou encore :

$$x.(4 + 16x^4)^{-1/2} \leq F(x) \leq x.(4 + x^4)^{-1/2}$$

Il est évident (comparer les puissances des termes de plus haut degré) que les quantités qui encadrent F(x), respectivement $x.(4 + 16x^4)^{-1/2}$ et $x.(4 + x^4)^{-1/2}$, ont pour limite 0 quand $x \to + \infty$.
Il s'en suit que F(x) tend également vers 0 quand $x \to + \infty$.

3) Puisque F est impaire, étudions-la sur R^+.
D'après l'expression de F' donnée à la question 2.2, en réduisant au même dénominateur et en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée du numérateur, on obtient :

$F'(x) = (3 - 3x^4)\,(1 + 4x^4)^{-1/2}\,(4 + x^4)^{-1/2}\,[(4 + x^4)^{-1/2} + (1 + 4x^4)^{-1/2}]$

Cela revient à dire que le signe de F' est celui de $(3 - 3x^4) = 3\,(1 - x^2)\,(1 + x^2)$

Comme F' est positive sur [0, 1[, nulle en 1, négative sur]1, + ∞[, F est donc croissante de 0 (F(0) = 0) à 1 puis décroissante de 1 à + ∞ (avec lim F(x) = 0 en + ∞).

En x = 0, la pente de la tangente est F'(0) = ½.

4) Considérons la valeur absolue de E(x) ; on a l'inégalité suivante pour tout x strictement positif :

$$|E(x)| \leq x \int_x^{2x} |f(t) - u(t)|\,dt$$

Calculons $|f(t) - u(t)|$; après mise au même dénominateur et simplification, on trouve :

$|f(t) - u(t)| = |\,- 4\,t^{-2}\,(4 + t^4)^{-1/2}\,[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}]^{-1}|$

Or on a les inégalités suivantes :

$(4 + t^4)^{1/2} \geq t^2$

$[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}] \geq 2\,t^2$

Et donc $t^2\,(4 + t^4)^{1/2}\,[t^2 + (4 + t^4)^{1/2}] \geq 2\,t^6$

La quantité $|f(t) - u(t)|$ est majorée par $2\,t^{-6}$, et on en déduit :

$$|E(x)| \leq x \int_x^{2x} 2\,t^{-6}\,dt$$

ou encore, après intégration :

$|E(x)| \leq 31\,x^{-4} / 80$

Comme le majorant de $|E(x)|$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, on en déduit que lim E(x) = 0 pour $x \to +\infty$.

Problème n° 3

1) La fonction f (impaire) peut être étudiée uniquement sur R^+. Sa dérivée f' est donnée par $f'(x) = 1 + 3x^2$, donc strictement positive, ce qui entraîne que f est une application monotone strictement croissante sur R^+. Plus généralement, par symétrie, f est une bijection de R dans R.

La fonction f admet donc une fonction inverse, ou réciproque, elle aussi monotone strictement croissante de R dans R et impaire, traditionnellement notée f^{-1}, et qui sera notée par la suite g.

2) Soit x un réel tel que $f(x) = x + x^3$; puisque g est une bijection, on peut écrire x = g(y), $y \in R$; la relation déninissant f devient alors :

$f(g(y)) = g(y) + g^3(y) = y$ car f o g = identité

3) Par construction de la fonction réciproque, le graphe de g est le symétrique de f par rapport à la première bissectrice.

4) On sait que f est dérivable sur R, que f' ne s'annule pas sur R ; donc il s'en suit que g est dérivable sur R et d'après les résultats classiques, on a :

$g'(x) = 1 / f'(g(x))$

La dérivée de g est donc égale à :

$g'(x) = 1 / [1 + 3\, g^2(x)]$

A propos des variations de g', on peut avoir les éléments suivants :

- g' est strictement positive
- comme g est une fonction impaire, g' est une fonction paire
- g est strictement croissante et positive sur R^+, $1 + 3\, g^2(x)$ est également strictement croissante et positive sur R^+, et par conséquent g' est strictement décroissante (et positive)
- comme g' est paire, g' est croissante sur R^-.

Donc, de $-\infty$ à 0, g' est croissante de $\lim_{x\to-\infty} g'(x) = 0$ à $g'(0) = 1$, puis g' décroît sur $[0, +\infty[$ de $g'(0) = 1$ à $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

5) Soit la fonction G définie par :

$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$

Effectuons le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale. Les bornes de l'intégrale deviennent 0 et $g(x)$.

On a $dt = f'(u)\,du = (1 + 3u^2)\,du$ et $g(f(u)) = u$; d'où :

$$G(x) = \int_0^{g(x)} u\,(1 + 3u^2)\,du = [2\,g^2(x) + 3\,g^4(x)] / 4$$

Comme g est impaire, on voit immédiatement que G est paire (on va donc l'étudier sur R^+), et, en outre, comme G est la primitive de g s'annulant en 0, on a $G' = g$.

On sait que g est croissante sur R et que $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

On en déduit que G est une fonction croissante sur R^+, allant de $G(0) = 0$ à $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Problème n° 1

1) Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB dans le triangle ABC ; $\sin\alpha$ = CH/AC et donc il est évident que la longueur de AD est égale au produit AB.CH, soit 2S où S est la surface du triangle ABC.

2) D'après le résultat de la question 1, écrire que le produit vectoriel de MA et MB est une constante positive a revient à écrire que :

AB.MH = a

Où H est le pied de la projection orthogonale de M sur AB.
C'est-à-dire que la distance MH est égale à la constante a/AB.

L'ensemble des points M recherché est donc l'ensemble des points dont la distance orthogonale à AB est une constante, c'est-à-dire les deux droites parallèles à AB et situées à la distance a/AB de la droite AB.

Problème n° 2

Partie A :

1) Soient P et Q deux polynômes de E(n), a une constante réelle ; il est trivial d'établir que g(aP + Q) = ag(P) + g(Q)

2) Ecrivons le polynôme $P(x) = \Sigma_k a_k x^k$, avec k = 0 à n.

Remarque préliminaire : il est évident que pour n=0 (ensemble des polynômes constants), g(P) = 0.

Considérons donc le cas non trivial (n non nul).

$P' = \Sigma_k ka_k x^{k-1}$ avec k = 1 à n

$P'' = \Sigma_k k(k-1)a_k x^{k-2}$ avec k = 2 à n.

Le coefficient du terme x^n est $n(n-1)\, a_n + 2n\, a_n = n(n+1)\, a_n$ qui est différent de zéro puisque a_n est non nul.

Donc, si degré P = n, alors degré g(P) = n.

3) Soit à déterminer l'ensemble des polynômes P tels que g(P) = O.

D'après la question précédente, pour tout polynôme de degré n (n ≥ 1), g(P) est aussi de degré n ; il ne peut donc être nul.

D'où le noyau de g se réduit à l'ensemble des constantes.

4) La matrice de g dans B est donnée par les coefficients dans B de g(1), g(x), …., $g(x^n)$.

g(1) = 0

g(x) = 1 + 2x

…..

$g(x^k) = k(1-k)\, x^{k-2} + k\, x^{k-1} + k(k+1)x^k$

La matrice G est donc :

0 1 -2 0 0 …………………0
0 2   2 0 0 …………………0
0 0   6 0 0 …………………0

…………………k(1-k)….
……………………k…….
…………………. k(k+1)

………………………………n(n+1)

G est une matrice dont le triangle inférieur est nul. Le polynôme caractéristique conduisant aux valeurs propres est donné par :

$D(\lambda) = \Pi_k\ [k(k+1) - \lambda]$ où k varie de 0 à n.
Les n+1 valeurs propres sont donc $\lambda = k(k+1)$, k = 0 à n.

Partie B :

1) Trivial : h(aP + Q) = ah(P) + h(Q)

2) Degré de h(P) : examinons quelques cas particuliers.
Soit P polynôme constant (degré nul) : h(P) est nul.
Soit P de degré 1 : P(x) = a + bx
Alors h(P) = a + b(x+2) – 2a –2b(x+1) + a + bx = 0
Soit P de degré 2 : P(x) = a + bx + cx² ; h(P) = 2c, polynôme constant de degré nul.

Cas général :
$P(x) = \Sigma_k\ a_k\ x^k$, avec k = 0 à n

En développant h(P) et en écrivant les coefficients des termes de puissance n, n-1 et n-2, on constate que le coefficient de x^n est nul, ainsi que celui de x^{n-1}, alors que le coefficient de x^{n-2} est non nul, égal à $n(n-1)\ a_n$.

Conclusion : pour P de degré n ≥ 2, le degré de h(P) est de degré n-2 ; pour n = 1 ou n = 0, h(P) est nul.

3) Compte tenu des résultats de la question précédente, le noyau de h est constitué des polynômes de E(1), c'est-à-dire les polynômes de degré 0 ou 1.

Problème n° 3

Partie A :

Le polynôme $D(\lambda)$ des valeurs propres s'obtient en calculant le déterminant de la matrice $A - \lambda I$, où I est la matrice unité de dimension 4.

Le calcul conduit à :

$D(\lambda) = (\lambda^2-4)(\lambda^2-6)$

Les valeurs propres sont donc 2, -2, $-\sqrt{6}$, $+\sqrt{6}$

Le système vérifié par le vecteur propre (x, y, z, t) associé à la valeur propre λ est :

$4t = \lambda x$; $3z = \lambda t$; $2y = \lambda z$; $x = \lambda t$

$\lambda=2$
Un vecteur propre est (2, 0, 0, 1), ou, normé, $(2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})$

$\lambda=-2$
Un vecteur propre est (-2, 0, 0, 1), ou, normé, $(-2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})$

$\lambda=\sqrt{6}$
Un vecteur propre est $(0, \sqrt{6}/2, 1, 0)$, ou, normé, $(0, \sqrt{3}/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{5}, 0)$

$\lambda=-\sqrt{6}$
Un vecteur propre est $(0, -\sqrt{6}/2, 1, 0)$, ou, normé, $(0, -\sqrt{3}/\sqrt{5}, \sqrt{2}/\sqrt{5}, 0)$

Partie B :

Le polynôme caractéristique est $D(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-k)$

Cela conduit à quatre situations :

Cas n°1 : $k = 0$
$\lambda = 2$, $\lambda = 0$ (racine double)

Cas n°2 : $k = 4$
$\lambda = 2$ (double), $\lambda = -2$

Cas n°3 : $k < 0$
$\lambda = 2$

Cas n°4 : $k > 0$
$\lambda = 2$, $\lambda = -\sqrt{k}$, $\lambda = \sqrt{k}$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Soit X la variable aléatoire « nombre de pannes survenant au cours d'une période de 40 jours sur un photocopieur donné », on recherche P(X>0). On sait que P(X>0)=1-P(X=0) car X prend les valeurs comprises entre 0 et 40 incluses. P(X=0) correspond à aucune panne recensée au cours de la période des 40 jours. La probabilité qu'un photocopieur ne tombe pas en panne un jour donné est connue et est égale à 1-p. De plus, les évènements « pas de panne le premier jour », « pas de panne le second jour »,…, « pas de panne le 40$^{\text{ème}}$ jour », sont indépendants ; ce qui permet d'utiliser le théorème des probabilités composées dans le cas de l'indépendance.

$P(X=0)=(1-p)^{40}$

Donc P(X>0) est égale à $1-0{,}998^{40}=0{,}077$

2) La variable X suit une loi binomiale de paramètres n=40 et p=0,002. En effet,

- au cours de chaque épreuve (journée), l'événement « panne » ou « non panne » se produit ;
- ces épreuves sont indépendantes car on suppose que les réparations sont effectuées de telle façon que la probabilité qu'une machine retombe en panne après réparation le lendemain d'un jour avec panne est identique à celle de tomber en panne le lendemain d'un jour sans panne ;
- les conditions d'utilisation ne varient pas d'un jour à l'autre.

3) P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)

P(X=0) est connue (voir question 1), c'est $(1\text{-}p)^{40}$=0,92304

Pour calculer P(X=1), on va utiliser les propriétés de la loi binomiale, à savoir

$$P(X = k) = C_{40}^{k}(0,002)^{k}(1 - 0,002)^{40-k}$$

Pour k=1, on trouve 0,07399. Donc la probabilité cherchée vaut 0,00297

4) Sans préciser ici les règles d'application, on peut dire que la variable Y suit également une loi binomiale de paramètres n=52 et de p'=0,077.

L'espérance mathématique E(Y) vaut np' soit 4 photocopieurs.
La variance V(Y) vaut np'(1-p') soit 3,7. Son écart-type est égal à 1,9 photocopieurs.

Exercice n° 2

1) La probabilité pour qu'une machine soit disponible à la clientèle un jour donné est de 1-0,1=0,9. La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n=2 et p=0,9

Donc P(Y=0)=0,01 ; P(Y=1)=0,18 ; P(Y=2)=0,81

2) La variable Y définie à la question 1 correspond à l'Offre, la variable X à la Demande et la variable Z exprime la confrontation entre l'Offre et la Demande. Le nombre de machines louées est égal à :

- la demande exprimée X si celle-ci n'excède pas l'offre disponible Y ;
- l'offre disponible Y si la demande X est supérieure à cette offre disponible.

Les lois d'Offre et de Demande sont indépendantes, on peut donc écrire que P(X demandé et Y offert)=P(X demandé).P(Y offert)

Le tableau ci-dessous confronte l'Offre et la Demande

	P(Y=0)=0,01	P(Y=1)=0,18	P(Y=2)=0,81
P(X=0)=0,05	P(Z=0)=0,0005	P(Z=0)=0,0090	P(Z=0)=0,0405
P(X=1)=0,20	P(Z=0)=0,0020	P(Z=1)=0,0360	P(Z=1)=0,1620
P(X=2)=0,45	P(Z=0)=0,0045	P(Z=1)=0,0810	P(Z=2)=0,3645
P(X=3)=0,30	P(Z=0)=0,0030	P(Z=1)=0,0540	P(Z=2)=0,2430

On tire de ce tableau que la loi de probabilité de la variable Z est la suivante :

P(Z=0)=0,0595
P(Z=1)=0,3330
P(Z=2)=0,6075

1) E(Z)=(0 x0,0595) + (1x0,3330) + (2x0,6075) = 1,548 machines louées

La marge brute moyenne est donc de 1.548 francs

2) La loi de probabilité de Y change dans le cas d'acquisition d'une troisième machine. Ce qui donne le tableau de synthèse ci-dessous :

	P(Y=0)=0,001	P(Y=1)=0,027	P(Y=2)=0,243	P(Y=3)=0,729
P(X=0)=0,05	P(Z=0)=0,00005	P(Z=0)=0,00135	P(Z=0)=0,01215	P(Z=0)=0,03645
P(X=1)=0,20	P(Z=0)=0,00020	P(Z=1)=0,00540	P(Z=1)=0,04860	P(Z=1)=0,14580
P(X=2)=0,45	P(Z=0)=0,00045	P(Z=1)=0,01215	P(Z=2)=0,10935	P(Z=2)=0,32805
P(X=3)=0,30	P(Z=0)=0,00030	P(Z=1)=0,00810	P(Z=2)=0,07290	P(Z=3)=0,21870

P(Z=0)=0,05095
P(Z=1)=0,22005
P(Z=2)=0,51030
P(Z=3)=0,21870

E(Z)=1,89675 machines louées. La marge brute moyenne quotidienne passe alors à 1.707,08 francs. L'achat de la troisième machine est donc intéressant.