SESSION

D'AVRIL

2000

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets au choix.

SUJET n° 1

Que pensez-vous de cette citation de MONTESQUIEU (écrivain Français 1689-1755).

«Si dans l'intérieur d'un pays vous n'entendez le bruit d'aucun conflit, vous pouvez être sûr que la liberté n'y est pas».

Est-elle toujours d'actualité ?

SUJET n° 2

NÄBÏ prosateur turc (mort en 1712) a écrit cette phrase :

«La nature, qui nous a donné qu'un seul organe pour la parole, nous en a donné deux pour l'ouïe afin de nous apprendre qu'il faut plus écouter que parler».

A l'aide d'exemples précis, quelles réflexions vous inspire-t-elle ?

SUJET n° 3

Albert EINSTEIN, physicien allemand (1879-1955) a écrit ce qui suit sur l'influence du milieu où l'on vit :

«Peu d'homme sont capable d'exprimer une opinion qui diffère des préjugés de leur milieu ambiant».

Etes-vous d'accord avec lui ? En ce temps des communications rapides, de l'Internet, est ce toujours aussi vrai ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée d'un seul problème, présenté en trois parties.

Dans tout le problème, F désigne l'ensemble des applications continues de U dans R, où U est l'intervalle [0, 1] et R l'ensemble des nombres réels.

Première partie

On définit sur $F \times F$ l'application D par :

$$\text{Pour } f, g \in F,\ D(f, g) = \underset{x \in U}{Sup}(|f(x) - g(x)|)$$

Cette définition est licite car la fonction f – g étant continue sur le segment U, elle est bien bornée sur U.

❶ Si f et $g \in F$, que signifie D(f, g) = 0 ?

❷ Montrer que D est symétrique, c'est-à-dire que D(f, g) = D(g, f), $\forall$ f et $g \in F$

❸ Montrer que D vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall \text{ f, g, h} \in \text{F}, \qquad D(f, g) \leq D(f, h) + D(h, g)$$

❹ On définit les fonctions f et g suivantes, pour $x \in U$: $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Etablir que D(f, g) = 1/4. Tracer les graphes de f et g et représenter graphiquement D(f, g).

❺ Tracer les graphes des fonctions $f(x) = |x - 1/2|$ et $g(x) = 1$; représenter D(f, g) et calculer D(f, g).

❻ Calculer D(f, g) pour les fonctions $f(x) = \cos(\pi x)$ et $g(x) = \sin(\pi x)$.

❼ On note par O l'application nulle définie sur U = [0, 1] par : $\forall x \in U, O(x) = 0$. Donner un exemple de fonction f, qui ne soit pas un polynôme, telle que D(f, O) = 2.

Deuxième partie

❽ Montrer que :

$$\forall \text{ f et g} \in \text{F}, \quad \left| \int_U f(t)\,dt - \int_U g(t)\,dt \right| \leq D(f, g)$$

le symbole $\int_U$ désignant simplement l'intégrale de 0 à 1.

❾ On définit sur U la suite de fonctions de F par $f_n(x) = (\sin n^2 x) / n$, où n appartient à l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des nombres entiers strictement positifs.
O désignant, comme dans la question 7 de la première partie, l'application nulle, et f'_n la dérivée de f_n, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$D(f_n, O) = 1 / n \qquad \text{et} \qquad D(f'_n, O) = n$$

Troisième partie

On désire étudier, dans cette partie, la possibilité d'approximer une application f de F par une suite de polynômes P_n, l'approximation de f par P_n étant définie au sens suivant : $\lim_{n\to+\infty} D(f, P_n) = 0$.
Nous allons étudier successivement trois situations de ce type.

❶⓿ On note par f l'application de F définie par :

$$f(x) = 2/(2 + x)$$

Pour $n \in N^*$, on définit le polynôme P_n élément de F par :

$$P_n(x) = \Sigma_k (-1)^k (x/2)^k \qquad \text{où k varie de 0 à n et } x \in U$$

Etablir que $D(P_n, f) = 1 / (3.2^n)$

❶❶ On prend pour f la restriction à U = [0, 1] de la fonction exponentielle e^x, et on définit pour tout nombre entier n la suite de polynômes P_n de F par :

$$P_n(x) = \Sigma_k x^k / k! \qquad \text{où k varie de 0 à n et } x \in U$$

a) On veut établir que l'on a l'égalité (E) suivante :

$$\text{(E)} \qquad e^x - P_n(x) = J(n, x)$$

où J(n, x) est l'intégrale $\int_{[0,x]} [e^t (x-t)^n / n!]\, dt$

Etablir une relation entre J(n, x) et J(n+1, x).
Démontrer ensuite par récurrence l'égalité (E).

b) Montrer que $e^t (x-t)^n$ est majoré par $e(x-t)^n$.

c) En déduire que $D(P_n, f) \le e/(n+1)!$

❶❷ Dans cette question, on prend pour f la restriction de la fonction sinus à l'intervalle U = [0, 1].

La suite P_n de polynômes de F est définie par récurrence de la façon suivante, pour tout $x \in U$:

$P_1(x) = x$

$P_{n+1}(x) = 3\, P_n(x/3) - 4\, [P_n(x/3)]^3$

a) Donner les formes explicites des polynômes $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

b)On note par A l'intervalle $[-1, +1]$ et on définit l'application T sur A par : $\forall x \in A$, $T(x) = 3x - 4x^3$. Etudier l'application T.

Montrer, en utilisant la formule des accroissements finis, que :

$$\forall\ u, v \in A \quad |T(u) - T(v)| \leq 9|u - v|$$

c)Etablir la formule trigonométrique : $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

d) Montrer que l'on a, pour tout $x \in U$: $0 \leq x - \sin x \leq x^3/6$

e) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in N^*$, on a :

$$\forall\ x \in U,\ \ P_n(x) \in A, \ \text{ et } \ |P_n(x) - \sin x| \leq x^3 / (2.3^n)$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

Les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants *:*

SUJET n° 1

Après avoir exposé les principales innovations des nouvelles théories de la croissance (endogène) par rapport aux modèles néo-keynesien et néo-classique traditionnels, il vous est demandé d'en déduire les mesures concrètes de politiques de développement économique qu'elles suggèrent.

SUJET n° 2

L'accroissement du taux d'épargne constitue-t-il un préalable à celui des investissements et au raffermissement de la croissance dans les économies en développement ? Après un rappel détaillé des dimensions théoriques du sujet, vous présenterez quelques illustrations passées et récentes.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve se compose de trois exercices indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

On se place dans l'ensemble $M_3(R)$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera I la matrice unité et O la matrice nulle de $M_3(R)$.

Les paramètres a, b et c sont des nombres réels ; on définit la classe Δ des matrices T(a, b, c) de $M_3(R)$ de la forme :

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On note par A la matrice T(1, 2, 3) correspondant aux choix de paramètres a = 1, b = 2, c = 3.

On considère l'équation matricielle (E) : $X^n = A$, où l'inconnue est une matrice X de $M_3(R)$, n étant un nombre entier non nul.

❶ Montrer que T(a, b, c) peut se mettre sous la forme aI + R, où R est une matrice que l'on explicitera.

❷ Donner l'expression de la matrice $T^n(a, b, c)$, pour tout entier n.

❸ On suppose que la matrice X vérifie l'équation (E).

a) Démontrer que X commute avec A : AX = XA.

b) En déduire que X appartient à Δ.

c) Déterminer les éventuelles solutions de (E) en distinguant selon la parité de n.

EXERCICE n° 2

❶ On considère le système linéaire d'inconnues réelles x, y, z, t où a, b, c et d sont des paramètres réels :

$$\begin{aligned} &-0{,}75x + y = a \\ &0{,}25x - y + z = b \\ &0{,}25x - z + t = c \\ &0{,}25x - t = d \end{aligned}$$

Donner une condition (C) nécessaire sur les paramètres a, b, c, d pour que ce système admette au moins une solution.

En supposant cette condition (C) vérifiée, montrer que pour tout réel r il existe une unique solution au système précédent vérifiant de plus l'égalité x + y + z + t = r. Préciser cette solution.

❷ On définit la suite réelle (u_n), $n \in N$, ensemble des nombres entiers naturels, vérifiant pour tout entier n l'égalité :

$$u_{n+4} = (u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n)/4$$

On définit alors, pour tout $n \in N$, les deux suites m_n et M_n par :

$$m_n = \text{Min}\,(u_n\,,\, u_{n+1}\,,\, u_{n+2}\,,\, u_{n+3})$$

$$M_n = \text{Max}\,(u_n\,,\, u_{n+1}\,,\, u_{n+2}\,,\, u_{n+3})$$

2 a – Etablir pour tout entier naturel n les inégalités : $m_n \leq u_{n+4} \leq M_n$

2 b – En déduire que la suite (m_n) est croissante et que la suite (M_n) est décroissante, puis que ces deux suites sont convergentes. On notera par m et M leurs limites respectives.

2 c – Etablir pour tout entier naturel n l'inégalité :

$$u_{n+4} \leq 0,75\, M_n + 0,25\, m_n$$

puis l'inégalité :

$$u_{n+4} \leq 0,75\, M_n + 0,25\, m$$

2 d – En appliquant ce résultat successivement à n, n+1, n+2, n+3, établir pour tout entier naturel n l'inégalité :

$$M_{n+4} \leq 0,75\, M_n + 0,25\, m$$

2 e – En déduire que les deux suites (m_n) et (M_n) sont adjacentes et que la suite (u_n) converge.

EXERCICE n° 3

❶ On définit la fonction s de R dans R par : $\forall\, x \in$ R, $s(x) = (e^x - e^{-x})/2$.
Faire l'étude complète de la fonction s, tracer très précisément son graphe (on précisera la tangente au point d'abscisse 0, et les intervalles sur lesquels s est convexe ou concave).

❷ Montrer que s est une bijection de R sur R et expliciter son inverse s^{-1}.

❸ Pour alléger les notations, on note $h = s^{-1}$; montrer que h est dérivable sur R et que, pour tout x réel, on a :

$$h'(x) = 1 / (1 + x^2)^{1/2}$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

On se propose d'étudier un ensemble de données statistiques sur " Le Cinéma en France ".

Les 2 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Attention *:*

La feuille de papier millimétré nécessaire pour l'exercice 2 est à remettre avec votre copie.

Une attention particulière sera portée aux commentaires.

EXERCICE n° 1

Le tableau 1 donne la répartition, sur les six périodes quinquennales, du nombre d'entrées suivant le pays d'origine du film.

Tableau 1

Nombre d'entrées suivant le pays d'origine du film (millions)

Période	France	USA	Autres	Total
1960-1964	786	460	317	1563
1965-1969	553	295	244	1092
1970-1974	481	210	209	900
1975-1979	432	260	194	886
1980-1984	472	321	163	956
1985-1989	259	326	141	726

Question 1 :

Exprimez les données en pourcentage du total sur chaque période.

Représentez les résultats par un graphique de votre choix et commentez.

Question 2 :

Le tableau 2, qui présente les cinq plus fortes entrées de chaque période, semble contredire le tableau précédent. Imaginez des arguments pour expliquer cette contradiction.

Tableau 2

Le " TOP 5 " du cinéma en France

TITRE	*ORIGINE*	*ENTREES (en millions)*
1960-1964		
Ben Hur	USA	13,8
Le jour le plus long	USA	11,9
Les 101 dalmatiens	USA	11,6
Les canons de Navarone	USA	10,2
La guerre des boutons	F	9,7
1965-1969		
La grande vadrouille	F	17,2
Il était une fois dans l'Ouest	ITA	14,8
Le livre de la jungle	USA	12,5
Le corniaud	F	11,7
le docteur Jivago	USA	9,8
1970-1974		
Les aristochats	USA	10,4
Emmanuelle	F	8,9
Les bidasses en folie	F	7,8
Les aventures de Rabbi Jacob	F	7,4
Robin des bois	USA	6,5
1975-1979		
Les aventures de Bernard et Bianca	USA	7,2
Les dents de la mer	USA	6,2
Le gendarme et les extra-terrestres	F	6,2
Midnight express	USA	5,9
L'aile ou la cuisse	F	5,8
1980-1984		
E.T	USA	8,9
La chèvre	F	7,0
Rox et Rouky	USA	6,7
Les aventuriers de l'arche perdue	USA	6,3
Marche à l'ombre	F	6,1
1985-1989		
Trois hommes et un couffin	F	10,2
L'ours	F	9,1
Le grand bleu	F	9,0
Jean de Florette	F	7,2
Manon des sources	F	6,6

EXERCICE n° 2

Le tableau 3 donne le nombre d'entrées et le prix moyen du billet de 1960 à 1990.

Tableau 3

ANNEE	*ENTREES* (en millions)	*PRIX BILLET* (en francs)
1960	355	2,10
1961	328	2,22
1962	312	2,52
1963	292	2,87
1964	276	3,13
1965	259	3,45
1966	235	3,78
1967	211	4,20
1968	203	4,37
1969	184	4,97
1970	184	5,41
1971	177	5,96
1972	184	6,62
1973	176	7,56
1974	179	8,57
1975	182	9,79
1976	177	11,21
1977	170	12,21
1978	179	13,37
1979	178	14,66
1980	175	16,01
1981	189	18,34
1982	202	20,48
1983	199	22,14
1984	191	23,45
1985	175	24,94
1986	168	26,96
1987	137	27,66
1988	125	29,12
1989	121	30,44
1990	122	31,45

<u>Question 1</u> :

A l'aide du papier millimétré fourni en annexe, tracez la courbe du nombre d'entrées.

Commentez le graphique, en distinguant 3 périodes dans l'évolution.

Sur chacune des 3 périodes, ajustez graphiquement l'évolution par une droite. Que mesure la pente de chaque droite ? Expliquez.

Par lecture graphique, déterminez approximativement le taux annuel moyen de décroissance du nombre des entrées sur la dernière période et estimez le nombre d'entrées pour 1991.

<u>Question 2</u> :

On veut étudier la relation existant entre le nombre d'entrées et le prix du billet. On utilisera, pour cela, l'information des années 1960, 1966, 1972, 1978, 1984 et 1990.

Calculez les indices base 100 en 1960 du nombre d'entrées (**E**) et du prix du billet.

On veut montrer que l'évolution du nombre d'entrées dépend de l'évolution relative du prix du billet par rapport à l'indice général des prix : par exemple, le nombre des entrées baisse quand le prix du billet augmente plus vite que l'indice général des prix (**IGP**).

L'IGP, base 100 en 1960, est le suivant sur les années retenues :

1966	:	123,9
1972	:	171,2
1978	:	307,9
1984	:	569,9
1990	:	695,7

Calculez les indices du prix relatif du billet P suivant la formule :

P = 100 x (indice du prix du billet / IGP)

<u>Question 3</u> :

Représentez sur un graphique les couples (indice du prix relatif du billet **P,** indice du nombre d'entrées **E**). Commentez le résultat.

Tracez la droite ajustant au mieux l'ensemble des points tracés :

$$\mathbf{E = 144{,}9 - (0{,}5 \times P)}$$

Sachant que le prix du billet a subi en 1991 la même hausse qu'en 1990 et que l'indice général des prix a augmenté de 3,1 % de 1990 à 1991, estimez à partir de la relation précédente, le nombre d'entrées en 1991. Comparez au résultat obtenu à la question 1.

Que pensez-vous des 2 méthodes ?