SESSION

D'AVRIL

1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*

* *

PROBLEME n° 1

(R) $P(x)\,P(x+2)+P(x^2)=0$

❶ $Q(x)=P(x^2)+P(x)\,P(x+2)$

Soit P de degré n, $a_n x^n$ sont terme du plus haut degré.

Le terme du plus haut degré de Q est $a_n x^{2n}+a_n^2 x^{2n}$

$\Rightarrow$ il est de degré $2n$ si $a_n \neq -1$

❷ $P(a)=0$

$$\underbrace{P(a)P(a+2)}_{=0}+P(a^2)=0$$

$\Rightarrow P(a^2)=0$ a^2 est racine

De même :

$$P(a^2)P(a^2+2)+P(a^4)=0$$

$\Rightarrow P(a^4)=0$ a^4 est racine

❸ Plus généralement, $(a^2)^k$, $k\in\mathbb{N}$, est racine de P.

Si $a=1$ ou $a=0$, toutes ces quantités sont égales (à 1 ou 0) :

- a = 1 $\Rightarrow$ 1 seule racine (1)
- a = 0 $\Rightarrow$ 1 seule racine (0)
- a = 1 $\Rightarrow$ 2 racines : -1 et 1

On sait, si $|a| \neq 1$ ou 0, il existe une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

❹ $$P(a-2)\underbrace{P(a)}_{=0}+P\left((a-2)^2\right)=0$$

$$\Rightarrow P\left((a-2)^2\right)=0$$

D'où $(a-2)^2$ est racine de P

et donc : $(a-2)^2=0$ ou $(a-2)^2=1$

$a=2$: impossible ($a=0{,}1$ ou -1)
$a-2=1 \Rightarrow a=3$ impossible
$a-2=1 \Rightarrow a=1$ = ok

❺ Soit r l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de P

$$P(x)=\lambda(x-1)^r$$

$$\lambda^2(x-1)^r+\lambda\left(x^2-1\right)^r=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2+\lambda=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=0 \text{ } ou \text{ } \lambda=-1$$

$$P(x)=-(x-1)^r \qquad (r \in \mathbb{N}^*)$$

❻ Pas de changement si le corps de base est $\mathbb{C}$, sinon que l'on est certain que a existe.

PROBLEME n° 2

❶ $x \in \left[0, \pi/4\right]$

$f(x)=tgx$ est une bijection $\left[0, o/4\right] \rightarrow [0,1]$

$\Rightarrow \exists f^{-1}=[0,1] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fct inverse de f

On la note $f^{-1}=Arctg$

❷ $y = Arctg\,x$

$$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

$$x = tg\,y \qquad \frac{dx}{dy} = 1 + tg^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$Arctg$ est une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$

$Arctg\,x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$ (car $Arctg 0 = 0$)

❸

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} \qquad = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(t^2\right)^i = 1 - t^2 + t^4 + \ldots$$

$=$somme des $(n+1)$premiers termes $\sum_{i=0}^{n} \left(-t^2\right)^i$

$$= \frac{1-\left(--t^2\right)^{n+1}}{1-\left(-t^2\right)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t^2} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

❹ ①

$$Arc\ tg\,x \qquad = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \underbrace{\int_0^x \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} \right) dt}_{S_{(n)}(x)} + \underbrace{(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}_{R_n(x)}$$

. $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\dfrac{t^{2i+1}}{2_{i+1}} \right]_0^2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dfrac{x^{2i+1}}{2_{1+1}}$

. $\left|R_n(x)\right| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

sur $[0,1]\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$

$\Rightarrow \left|R_n(x)\right| \leq \left[\frac{t^{2n+2}}{2_{n+3}}\right]_0^2 = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$

② $S_n(x) = Arc\ tg - R_n(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = Arc\,tgx$$

③ $S_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{2_{i+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

$$\left|Arc\,tg\,1 - S_n(1)\right| = \left|R_n(1)\right| \leq \frac{1}{2_{n+3}}$$

$$\left|\frac{\pi}{4} - S_n(1)\right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$\left|\pi - 4S_n(1)\right| \leq \frac{4}{2n+3}$$

Si on veut une approximation à 10^{-4}

$$\frac{4}{2n+3} \leq 10^{-4}$$
$$\Rightarrow\ n > 9999$$

❺ $Arc\ tg\frac{1}{b} = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{dt}{1+t^2}$

$$t = \frac{au-1}{au+u} \Rightarrow at + nt = au - 1\ ;\ \frac{dt}{du} = \frac{1+u^2}{(a+u)^2}$$

$u(a-t) = at + 1$

$u = \frac{at+1}{a-t}$ varie de $\frac{1}{a}$ à 1 (remplacer t par 0 puis t par $\frac{1}{b}$ avec $b = (a+1)/(a-1)$)

$$\int_0^{1/b}\frac{dt}{1+t^2} \qquad = \int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{au-1}{a+u}\right)^2}\frac{a^2+1}{(a+u)^2}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1+a^2}{(a+u)^2+(a-u)^2}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1+a^2}{\left(1+a^2\right)u^2+\left(a^2+1\right)}du$$

$$= \int_{1/a}^{1}\frac{1}{1+u}du = \underbrace{Arc\ tg\ 1}_{\pi/4} - Arc\ tg\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow Arc\ tg\frac{1}{a} + Arc\ tg\frac{1}{b} = \pi/4$$

❻ $a = 2(\Rightarrow b = 3)$

$$\frac{\pi}{4} = Arc\ tg\frac{1}{2} + Arc\ tg\frac{1}{3}$$

$$= S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left|\pi - 4\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right) + S_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right| \qquad = 4\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\leq 4\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$\leq 4\left(\frac{(1/2)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(1/3)^{2n+3}}{2n+3}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2n+3}\left(\frac{4}{2^{2n+1}} + \frac{4}{2^{2n+3}}\right)$$

Pour $n = 8, \frac{1}{2n+3}\left(\frac{4}{2^{2n+1}} + \frac{4}{2^{2n+3}}\right) \approx 4{,}02.10^{-7}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

1- $M(a)M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+b \\ a+b & 0 & -(a+b)^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(a)M(b) = M(a+b)$$

2- $M(2a) = M^2(a)$

On montre sans difficulté (récurrence) :

$$M^n(a) = M(na)$$

3- Soit $b = -a$

$$M(a)M(-a) = M(0) = I$$

$$\Rightarrow \quad M^{-1}(a) = M(-a)$$

EXERCICE n° 2

1- $U^2 = nU$

$U^3 = U^2U = nU^2 = n^2U$

<u>Récurrence :</u>

Hypothèse : $U^k = n^{k-1}U$
Vrai pour $k = 1$
Vrai pour k

$$U^{k+1} = U^kU = n^{k-1}UU = n^{k-1}U^2 = n^kU$$

2- Soit A l'inverse de U :

$$AU = I$$

$\Rightarrow \quad AU^2 = U = nAU = nI$

en multipliant par U et en utilisant le résultat de la question 1.

$\Rightarrow \quad U = nI$

ce qui est impossible (sauf si $n = 1$, cas particulier vraiment « très particulier »).

PROBLEME

1- $I(n) = \int_1^n \ln t \ dt = [t \ \log \ t - t]_1^n$

$= n \ln n - (n-1)$

2- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$

On remarque que $S_n = \ln(n!)$

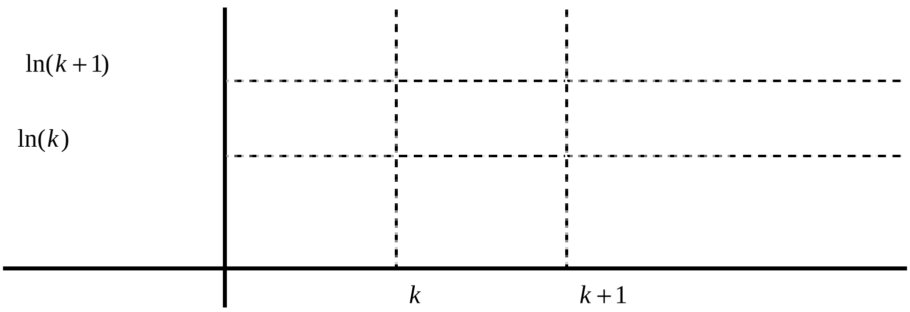
2a- La fonction $t \to \ln t$ est <u>croissante</u> sur $[k, k+1]$, donc $\forall \ t \in [k, k+1]$

$$\ln k \leq \ln t \leq \ln(k+1)$$

Et, par positivité de l'intégrale :

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) \ dt \leq \ln(k+1) \qquad \forall \ k \geq 1$$

<u>Remarque</u> : l'intégralité précédente revient à comparer les aires des rectangles entourant la courbe (C)



2b- Par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_{1}^{n+1} \ln(t)\ dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

ou :

$$S_n \leq I(n+1) \leq S_n + \ln(n+1)$$

D'où l'encadrement :

$$I(n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq I(n+1)$$

$$n\ \ln(n+1) - n \leq S_n \leq (n+1)\ \ln(n+1) - n$$

3- En passant à l'exponentielle :

$$e^{n\ln(n+1)-n} \leq n! \leq e^{(n+1)\ln(n+1)-n}$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Comme $\left(\frac{n}{e}\right)^n < \left(\frac{n+1}{e}\right)^n$, on en déduit l'encadrement (1) demandé.

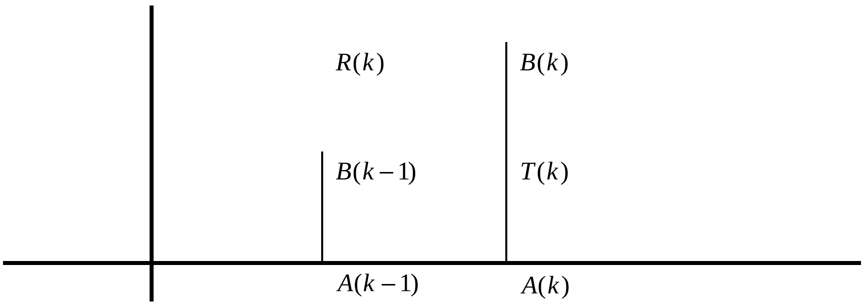
<u>A- Numérique</u> : $n = 10$, $10! = 3628800$

$$\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 453999$$

$$e\left(\frac{11}{e}\right)^{11} \approx 12953130$$

L'encadrement (1) n'apporte à l'évidence aucune approximation intéressante : trop large

4-



Par construction :

$$R(k) + T(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\ dt$$

4a- $T(k)=\frac{1}{2}\left[\ln(k-1)+\ln(k)\right] \qquad (k\geq 2)$

4b- $R(k)=\int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt-T(k)$

$$J=\int_{k-1}^{k}\frac{k-0{,}5-t}{t}\ dt$$

en posant $du=\frac{dt}{t}$ et $u=k-0{,}5-t$

$$J=\left[(k-0{,}5-t)\ \ln t\right]_{k-1}^{k} \qquad + \int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{2}\left[\ln(k)+\ln(k-1)\right]}_{T(k)} \qquad + \int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt=R(k)$$

Posons $t=k-u$, $u=k-t$, $du=-dt$

$$R(k)=\int_{1}^{0}\frac{u-1/2}{k-u}\ (-du)=\int_{0}^{1}\frac{u-0{,}5}{k-u}\ du$$

Intégrons par parties :

$$R(k)=\underbrace{\left[\frac{1}{k-u}\left(\frac{1}{2}\ u^{2}-\frac{1}{2}\ u\right)\right]_{0}^{1}}_{0}-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{(u^{2}-u)\ du}{(k-u)^{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{u(u-1)\ du}{(k-u)^{2}}$$

5- $g(u)=u-u^{2} \qquad 0\leq u\leq 1$

$g'(u)=1-2u$

	0		1/2		1
g’		+	0	-	
g			1/4		
		↗		↘	
	0				0

On en déduit :

$$R(k)\leq\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{1/4}{(k-u)^{2}}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{k-u}\right]_{0}^{1}$$

$$R(k)\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

6- $U(n) = \sum_{k=2}^{n} R(k)$

6a- $$0 \le \sum_{k=2}^{n} R(k) \le \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}$$
$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

6b- On a :
$$0 \le U(n) \le \frac{1}{8}$$
La série $U(n)$ est croissante (trivial) et majorée, donc convergence :

soit $u = \lim_{n \to +\infty} U(n) = \sum_{k=2}^{\infty} R(k)$

6c- $u - U(n) = \sum_{k \ge n+1} R(k)$

D'où, pour M fixé $\ge n+1$
$$\sum_{k=n+1}^{M} R(k) \le \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{k=n+1}^{M}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{M}\right)$$
$\Rightarrow$, en faisant $M \to +\infty$:
$$u - U(n) \le \frac{1}{8n}$$

7- On sait que :
$$T(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt - R(k)$$
$$\sum_{k=2}^{n} T(k) = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt - \sum_{k=2}^{n} R(k)$$
$$\underbrace{\frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)\right]}_{\downarrow} = \int_{1}^{n} \ln(t)\, dt - U(n)$$
$$= S_n - \frac{1}{2}\ln(n) \qquad (\text{car } \ln 1 = 0)$$

$$S_n - \frac{1}{2}\ln(n) = n\ \ln(n) - (n-1) + u - U(n) - u$$

$$S_n = n\ \ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + (1-u) + \underbrace{u - U(n)}_{\varepsilon(n)}$$

8- En passant à l'exponentielle :

$$e^{S_n} = n! = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\ n}\ e^{-n}\ e^{1-u}\ e^{u-U(n)}$$

$$= \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\ e^{1-u}\ e^{\varepsilon(n)}$$

D'après 6c, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0 \Rightarrow e^{\varepsilon(n)} \to 1$

$$n! \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

avec $C = e^{1-u}$

9- $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{C^2 n\left(\frac{\mathrm{n}}{e}\right)^{2n}}$

$$\frac{1}{C}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ \frac{2^{2n}}{n^{2n}} = \frac{4^n\sqrt{2}}{C\sqrt{n}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{2\pi}\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Pour $n = 10$, $n! \sim 3598696$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

EXERCICE n° 1

1) Pour l'année 1991, on a :

- TBM (Malaisie) = 4,6‰
- TBM (France) = 9,2‰ > TBM (Malaisie)

Age	Malaisie	France
<1	12,9‰	7,3‰
1-4	0,9‰	0,4‰
5-14	0,5‰	0,2‰
15-24	1,0‰	0,8‰
25-34	1,3‰	1,2‰
35-44	2,3‰	2,0‰
45-54	5,8‰	4,4‰
55-64	15,2‰	9,4‰
65-74	36,8‰	20,3‰
+ de 75	99,5‰	77,5‰

Par tranche d'âge, tous les taux bruts de mortalité de la France sont inférieurs à ceux de la Malaisie alors que globalement le TBM de la France est plus élevé que le TBM de la Malaisie. Cela s'explique par la structure de la population, plus jeune en Malaisie…

2) Le nombre de décès qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Malaisie, dans l'hypothèse d'un taux de mortalité identique à celui de la France est donné ci-dessous :

Age	Nb de décès
<1	3600
1-4	800
5-14	800
15-24	2900
25-34	3600
35-44	4200
45-54	5800
55-64	8200
65-74	9900
+ de 75	17500
Total	57300

Soit un TBM (Malaisie) de 3,1‰, encore plus faible que celui constaté (4,2‰)…

EXERCICE n° 2

1) P(D<40) = 0,28
P(D>70) = 0,38
P(30<D<60) = 0,19
P(D<30 ou D>60) = 0,81
P(D>60 sachant 20 ans) = 0,70
P(D<80 sachant 30 ans) = 0,80

2)

i	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge S_{xi}	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10q_{xi}$
1	0	1000	150	0,150
2	10	850	50	0,059
3	20	800	50	0,063
4	30	750	30	0,040
5	40	720	40	0,056
6	50	680	120	0,176
7	60	560	180	0,321
8	70	380	230	0,605
9	80	150	130	0,867
10	90	20	20	1,000
11	100	0		

2) e_0 = 54,1 ans
e_{20} = 65,75 ans
e_{70} = 79,47 ans

EXERCICE n° 3

Il n’y a pas de corrigé type pour cet exercice. Toutefois, un certain nombre d’idées doivent figurer dans le commentaire :

- la population augmente de 231.000 habitants en 1997 ;
- la population continue de vieillir ;
- le nombre de naissances et de décès diminue ;
- l’indicateur de fécondité est de 1,71 enfant par femme ;
- recul de la mortalité ;
- l’espérance de vie à la naissance est de 74,2 ans pour un homme ;
- l’espérance de vie à la naissance est de 82,1 ans pour une femme ;
- stabilité de l’immigration pour long séjour ;
- 284.500 mariages, augmentation pour la deuxième année consécutive ;
- l’âge au premier mariage est retardé un peu plus chaque année….