ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTIONS MATHEMATIQUES ET ECONOMIE

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

«La technologie est la science de l'homme, en tant que créateur et porteur de culture».

Commentez cette assertion (Votre argumentation doit être soutenue par des exemples précis).

SUJET n° 2

Quelles réflexions vous suggèrent la phrase de Tristan Bernard (écrivain français 1866-1947) dans son dictionnaire humoristique A à Z ?

«Si un individu persiste à marcher droit au milieu d'une foule qui zigzague, c'est lui qui aura l'air de zigzaguer. Il faut suivre le roulis et ne pas lui résister».

SUJET n° 3

Evoquant le passé et l'avenir un proverbe bantou s'exprime ainsi :

«La route n'enseigne pas au voyageur ce qui l'attend à l'étape»

Quelles sont les réflexions que vous inspirent ce proverbe ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée de deux exercices et un problème, tous indépendants.

EXERCICE n° 1

Pour tout nombre réel a, on définit la matrice M(a), carrée d'ordre 3, par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❶ Calculer M(a).M(b) ($b \in$ R)

❷ Pour tout entier n et tout réel a, calculer $M^n(a)$

❸ Montrer que M(a) est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE n° 2

Soit U la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

❶ Calculer U^k pour tout entier positif k.

❷ Etudier l'inversibilité de U.

PROBLEME

Le symbole ln désigne le logarithme népérien. L'objet du problème est de travailler sur une approximation numérique de factorielle n!.

Première partie

Dans cette première partie, on se propose de trouver un encadrement de n!, quel que soit l'entier n.

❶ Calculer l'intégrale $J(n) = \int_1^n \ln(t)dt$

❷ On définit, pour tout entier n strictement positif, la quantité :

$$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n)$$

① Montrer, en donnant toutes les justifications de façon précise, que :

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \ln(k+1)$$

② En déduire l'encadrement suivant pour S_n :

$$J(n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq J(n+1)$$

❸ ① Montrer, en utilisant les résultats de la question 2, que l'on a les inégalités suivantes :

$$(1) \qquad (n/e)^n \leq n! \leq e[(n+1)/e]^{n+1}$$

② Application numérique : on prend n=10 ; quel est l'encadrement numérique de 10! fourni par les inégalités (1) précédentes ? Que pensez-vous de la précision de l'encadrement (1) ?

Deuxième partie

On va essayer de déterminer un équivalent de n!, valable pour n grand, qui fournisse une bonne approximation numérique de n!.

❹ On désigne par A(k) le point de coordonnées (k, 0), k entier, et par B(k) le point de coordonnées (k, ln(k)). Pour tout entier k ≥ 2, on note par T(k) la surface du trapèze (A(k–1), A(k), B(k), B(k–1)) et par R(k) la surface :

$$(2) \qquad R(k) = \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt - T(k)$$

① Calculer T(k).

② Montrer que l'intégrale $H = \int_{k-1}^{k} [(k - 0,5 - t)/t]\,dt$ est égale à R(k).

Montrer ensuite, en le justifiant, que R(k) peut être mis sous les formes :

$$(3) \qquad R(k) = \int_{0}^{1} [(u - 0,5)/(k - u)]\,du$$

puis :

$$(4) \qquad R(k) = 0,5 \int_{0}^{1} [(u - u^2)/(k - u)^2]\,du$$

❺ Etudier la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] par $g(u) = u - u^2$. En déduire que, pour tout nombre entier k ≥ 2 :

$$(5) \qquad 0 \leq R(k) \leq [(k-1)^{-1} - k^{-1}]/8 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

❻ On pose, pour tout entier n, n ≥ 2, U(n) = R(2) + R(3) + ... + R(n).

① Montrer que :

$$0 \leq U(n) \leq (1 - 1/n)/8$$

② En déduire que la série U(n) est convergente.

③ Soit u la limite de U(n), $u = \sum_{k \geq 2} R(k)$. Montrer que :

$$0 \leq u - U(n) \leq 1/8n$$

❼ En sommant les T(k) à partir de la relation (2), montrer que :

$$S_n = (n + 0,5)\ln(n) - n + (1 - u) + \varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n) = u - U(n)$

❽ Déduire de la question 7 que, lorsque $n \to +\infty$, on a l'équivalence suivante :

$$(6) \qquad n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

où C est une constante que l'on exprimera en fonction de u.

❾ A partir de la relation (6), donner un équivalent de C_{2n}^n, nombre de combinaisons de n éléments pris parmi 2n.

Sachant que l'on donne également $C_{2n}^n \sim 4^n/(n\pi)^{1/2}$, calculer la constante C en égalant les deux équivalents; en déduire un équivalent de n! quand $n \to +\infty$.

Application numérique : calculer cet équivalent pour n = 10.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

***les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants** :*

SUJET n° 1

IMPACT DES POLITIQUES MACRO-ECONOMIQUES SUR LA PAUVRETE ; le cas des pays d'Afrique Noire dans les années quatre-vingts

Après avoir étudié les politiques macro-économiques, analysez les mécanismes de transmission et leur impact sur la pauvreté.

SUJET n° 2

Depuis la fin de la décennie 80, nombre de gouvernements semblent considérer que les régimes de taux de change fixes sont plus à même de maintenir la confiance des agents économiques privés domestiques et étrangers, et d'imposer une discipline budgétaire et monétaire. En vous appuyant sur le cadre standard de l'analyse macro-économique keynesienne (le modèle IS/LM en économie ouverte), il vous est demandé de débattre de l'intérêt respectif des différents régimes de taux de change dans des économies en développement soumises à la contrainte de l'internationalisation commerciale et financière.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

PROBLEME n° 1

❶ Soit $P(x)$ un polynôme quelconque non nul de la variable réelle x. Etudier le degré du polynôme $Q(x) = P(x)\,P(x + 2) + P(x^2)$.

❷ On suppose à partir de cette question que le polynôme P vérifie la relation (R):

$$(R) \qquad P(x)\,P(x + 2) + P(x^2) = 0$$

On note par a une racine de P, supposée exister. Démontrer que a^2 et a^4 sont deux racines de P.

❸ En déduire que, si $|a| \neq 1$ et $a \neq 0$, P admet une infinité de racines. Qu'est alors le polynôme P ?

❹ On suppose donc que $|a| = 1$ ou $a = 0$. Démontrer que $(a - 2)^2$ est une racine de P. En déduire que P n'admet qu'une seule racine a et donner sa valeur.

❺ Donner alors l'expression générale de tous les polynômes $P(x)$ non nuls, de la variable réelle x, à coefficients réels, vérifiant la relation (R).

❻ Examiner les résultats des questions 2 à 5 dans le cas où la relation (R) est vérifiée par un polynôme non nul quelconque $P(z)$ de la variable complexe z et à coefficients complexes.

PROBLEME n° 2

❶ On considère la fonction « tangente » $f : x \to \operatorname{tg} x$ définie pour $x \in [0, \pi/4]$. Montrer rigoureusement que f est inversible ; on note Arctg la fonction f^{-1}.

❷ Calculer la dérivée de Arctg.

En déduire que $\operatorname{Arctg} x = \int_0^x 1/(1 + t^2)\, dt$ pour $0 \leq x \leq 1$

❸ Montrer que pour tout réel t et tout entier n, on a :

$$(1 + t^2)^{-1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{2i} + (-1)^{n+1} t^{2n+2}/(1 + t^2)$$

❹ ① Montrer que Arctg x peut s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{Arctg} x = S_n(x) + R_n(x)$$

où les quantités $S_n(x)$ et $R_n(x)$ vérifient :

- $S_n(x) = \Sigma_{i=0}^{n} (-1)^i x^{2i+1}/(2i + 1)$
- $R_n(x)$ est tel que $|R_n(x)| \leq x^{2n+3}/(2n + 3)$

② En déduire que $\operatorname{Arctg} x = \lim S_n(x)$ quand $n \to +\infty$.

③ On prend $x = 1$; établir que $|\pi - 4\, S_n(1)| \leq 4/(2n + 3)$. Déterminer la valeur de n de façon à avoir une approximation de π à 10^{-4} près.

❺ On considère deux nombres réels a et b tels que $b = (a + 1)/(a - 1)$; montrer, en faisant le changement de variable $t \to u$ tel que $t = (au - 1)/(a + u)$ dans l'intégrale de définition de Arctg(1/b), que l'on a :

$$\text{Arctg}\,(1/a) + \text{Arctg}(1/b) = \pi/4$$

❻ On prend $a = 2$; montrer que $\pi/4 = \lim\,[S_n(1/2) + S_n(1/3)]$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $\left|\pi - 4\,[S_n(1/2) + S_n(1/3)]\right| \leq (2^{-(2n+1)} + 4\times 3^{-(2n+3)})/(2n + 3)$. Quelle précision peut-on avoir pour $n = 8$?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Note : l'épreuve est composée de trois exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Attention : le tableau 3 est à rendre impérativement avec votre copie.

Exercice n° 1

❶ ① D'aprés les données du tableau 1, calculer les taux bruts de mortalité (définis comme le rapport du nombre de décès durant une année donnée, à la population moyenne de cette année) de la France et de la Malaisie pour 1991.

② Calculer de même les taux bruts de mortalité par tranche d'âge.

❷ Calculer le nombre de décès qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Malaisie, si ce pays avait les taux de mortalité par âge de la France. Commenter.

Tableau 1 - Données Population

Malaisie				France	
Age	Population en 1991	Décès en 1991		Population en 1991	Décès en 1991
<1	495.600	6.400		749.000	5.500
1-4	1.939.800	1.700		3.022.800	1.200
5-14	4.222.900	2.100		7.646.700	1.400
15-24	3.552.800	3.600		8.490.000	6.400
25-34	2.977.600	4.000		8.576.300	10.500
35-44	2.095.000	4.900		8.642.000	17.700
45-54	1.315.800	7.600		5.835.700	25.500
55-64	867.700	13.200		5.952.400	56.000
65-74	488.600	18.000		4.310.700	87.700
+ de 75	225.100	22.400		4.037.200	312.800
Total	18.180.900	83.900		57.262.800	524.700

Exercice n° 2

On dispose d’une table de survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et suivies à partir de leur naissance (âge 0).

Tableau 2 - Table de survie

i	âge (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge S_{xi}
1	0	1000
2	10	850
3	20	800
4	30	750
5	40	720
6	50	680
7	60	560
8	70	380
9	80	150
10	90	20
11	100	0

❶ Calculer :

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant l'âge de 40 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder après l'âge de 70 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder entre 30 et 60 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant 30 ans ou après 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 20 ans d'atteindre l'âge de 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 30 ans de décéder avant l'âge de 80 ans.

❷ On définit la variable d(x,x+a) comme étant le nombre de décès entre deux âges séparés de a années. De même, on définit la variable aq_x comme étant le rapport entre d(x,x+a) et le nombre de survivants à l'âge x. En utilisant les données du tableau 2, calculer d(x,x+10) et $10q_x$ pour chacune des classes d'âge du tableau **(pour ce faire, vous compléterez le tableau 3 que vous remettrez avec votre copie)**.

❸ On définit l'espérance de vie à l'âge x par la formule suivante :

$e_x = x + \frac{1}{S_x}\sum_{i=k}^{10} d(x_i, x_i + 10) * (\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x)$ o□ i est défini dans le tableau 2. k étant la valeur de l'indice i dans le tableau 2 correspondant à l'âge x (exemple : pour le calcul de e_{20}, espérance de vie à 20 ans, k=3)

Calculer e_0, e_{20} et e_{70}.

Exercice n° 3

A l’aide des tableaux fournis en annexe, rédiger une note de synthèse faisant un bilan démographique de l’année 1997 en France.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Pour l’année 1997, les résultats provisoires sont évalués à partir des statistiques de l’état civil sur les neuf premiers mois et d’extrapolation de l’enquête démographique auprès d’un échantillon de grandes villes en ce qui concerne le dernier trimestre.

L’indicateur conjoncturel de fécondité est la somme des taux de fécondité par âge observés une année donnée. Cet indicateur donne le nombre d’enfants qu’aurait une femme tout au long de sa vie, si les taux de fécondité observés l’année considérée à chaque âge demeuraient inchangés.

L’espérance de vie à la naissance est égale à la durée moyenne d’une génération fictive qui aurait tout au long de son existence les conditions de mortalité par âge de l’année considérée.

Ces deux indicateurs sont indépendants de la structure par âge de la population. Ils caractérisent la situation du moment tout en permettant des comparaisons dans le temps et dans l’espace.

TABLEAU 3

(A RENDRE IMPERATIVEMENT AVEC VOTRE COPIE)

I	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge S_{xi}	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10q_{xi}$
1	0	1000		
2	10	850		
3	20	800		
4	30	750		
5	40	720		
6	50	680		
7	60	560		
8	70	380		
9	80	150		
10	90	20		
11	100	0		