AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

EXERCICE n° 1

1) Pour conclure, il était proposé de compléter le tableau 2 de l'énoncé. On trouvera ci-dessous celui-ci complété (les chiffres que les candidats devaient trouver sont inscrits en italique)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	n_i	p_i	np_i	(n_i-np_i)	$(n_i-np_i)^2$	(5)/(3)
1	222	0,56250	225	-3	9	0,04
2	50	0,13125	52,5	-2,5	6,25	0,12
3	28	0,05625	*22,5*	*5,5*	*30,25*	*1,34*
4	78	0,18750	75	3	9	0,12
5	20	0,04375	*17,5*	*2,5*	*6,25*	*0,36*
6	2	0,01875	7,5	-5,5	30,25	4,03
Total	400	1,00000	400			*6,01*

Conclusion : la valeur calculée de 6,01 étant supérieure à la valeur donnée 5,99, il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation. On constate que le calcul opéré à la case n°6 (croisement des critères « clients n'ayant pas retourné la fiche » et « clients peu ou pas satisfaits ») contribue pour beaucoup à cette conclusion : c'est en effet là que l'écart est le plus fort

2) La moyenne vaut 1,964 jours et la variance est égale à 1,955 jours^2

3) Les candidats avaient une grande marge de manœuvre pour le calcul. Le résultat devait être voisin de 15.140 interventions.

EXERCICE n° 2

Pour cet exercice, il n’y a pas de corrigé type. Cependant, quelques idées devaient être énoncées :

- le salaire brut a augmenté de 0,6% en francs constants entre 95 et 96 ;
- le salaire net a reculé de 0,1% en francs constants entre 95 et 96 ;
- A corps, grade, échelon, identiques, il y a recul en brut et en net ;
- le salaire moyen annuel brut s’établit à 169.030 francs ;
- l’éventail des salaires s’est ouvert…

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice :

1) On remarque que 2 n'est pas décomposable,

que $8 = -1-2-3-4+5+6+7$

$= 1-2-3+4-5+6+7$

$= -1+2+3-4-5+6+7$

etc...

Donc :

a) tout nombre pair n'est pas décomposable

b) la décomposition n'est pas unique

2) On remarque que 6 n'est pas décomposable.

Montrons par récurrence que les multiples de 4 sont décomposables

$4p$

a) vrai pour $p=1$

b) $4p = \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k$

$$4p+4 = \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k + 4 = \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k - 1 + 2 + 3$$

$$= \sum_1^{4p-1} \varepsilon_k k + 4p - (4p+1) + (4p+2) + (4p+3)$$

$$= \sum_1^{4p+3} \varepsilon_k k$$

Problème 1

1) $2r^2 - r - 1 = 0$

$\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2}$

$u_n = \lambda(1)^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$u_0 = a = \lambda + \mu$

$u_1 = b = \lambda - \frac{\mu}{2}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{a+2b}{3} \qquad \mu = \frac{2(a-b)}{3}$

$u_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

2) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a+2b}{3}$

3) $v_n = u_{n+1} - u_n$

$u_{n+2} = v_{n+1} + u_{n+1}$

$2(v_{n+1} + u_{n+1}) = u_{n+1} + u_n$

$\Rightarrow 2v_{n+1} = -(u_{n+1} - u_n)$

$$\begin{cases} v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n \\ v_0 = b - a \end{cases}$$

$v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

$\vdots$

$v_0 = u_1 - u_0$

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_0 = u_n - u_0$

$u_n = a + v_0 \sum_0^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

$$u_n = a + (b-a)\,\frac{1-(-1/2)^n}{3/2}$$

$$= \frac{a+2b}{3} + \frac{2(a-b)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On retrouve la forme générale de la question 1.

4) $u_{n+2} + \frac{u_{n+1}}{2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2}$

$\Rightarrow \quad W_{n+1} = W_n$

La suite (W_n) est constante, égale à $W_0 = u_1 + \frac{u_0}{2} = b + \frac{a}{2}$

$$u_{n+1} + \frac{u_n}{2} = b + \frac{a}{2}$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + b + \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{a}{2} + b \end{cases}$$

5) $x_n > 0 \quad \forall n$

On passe au logarithme: $u_n = \ln x_n$

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

$$u_0 = \ln 1 = 0$$

$$u_1 = \ln 2$$

$$x_n = \exp\left\{\frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$= e^{+\frac{2}{3}\ln 2\,[1-(-1/2)^n]}$$

$u_n \to \frac{2}{3}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad x_n \to e^{\frac{2}{3}\ln 2} = 2^{2/3}$

Problème 2 : $\quad I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$

1) $\cdot$ $I(0) = \pi/2$

$\cdot$ $I(1) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$

$\cdot$ $I(2) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

2) $I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t \cos t \, dt$

$$= \left(\sin t \cos^{n-1} t\right)_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-2} t \sin t \, dt$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^{n-2} t \, dt$$

$$= (n-1)\, I(n-2) - (n-1)\, I(n)$$

$$n\, I(n) = (n-1)\, I(n-2)$$

3) Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^n t \geqslant 0 \Rightarrow I(n) \geqslant 0$

$I(n+1) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \cos t \, dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = I(n)$

en majorant $\cos t$ par 1

4) On a : $\quad I(n+2) \leq I(n+1) \leq I(n)$

$$\frac{I(n+2)}{I(n)} \leq \frac{I(n+1)}{I(n)} \leq 1$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

D'où, en passant à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I(n+1)}{I(n)} = 1$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE – AVRIL 1998

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

<u>Exercice 1</u>

1) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \int_1^2 u^n\,du$ en posant $u = 1+x$

$$= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2) $\displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

<u>Exercice 2 :</u>

$$f_t(x) = \frac{t+1}{x^2+t}$$

$x \in \mathbb{R}$, $t>0 \Rightarrow$ dénominateur toujours >0

1) $\displaystyle f_t'(x) = \frac{(x^2+t)-(t+1)}{(x^2+t)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+t)^2}$

1^{er} cas : $|x|>1$

t	0		$+\infty$
$f_t'(x)$		$+$	
$f_t(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\nearrow$	1

<u>2^e cas :</u> $|x|<1$

t	0		$+\infty$
$f_t'(x)$		$-$	
$f_t(x)$	$\frac{1}{x^2}$	$\searrow$	1

3e cas:

$|x| = 1 \Rightarrow f_t(x) = 1$

D'où:

Minimum:

$m(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| > 1$

$m(x) = 1$ si $|x| = 1$

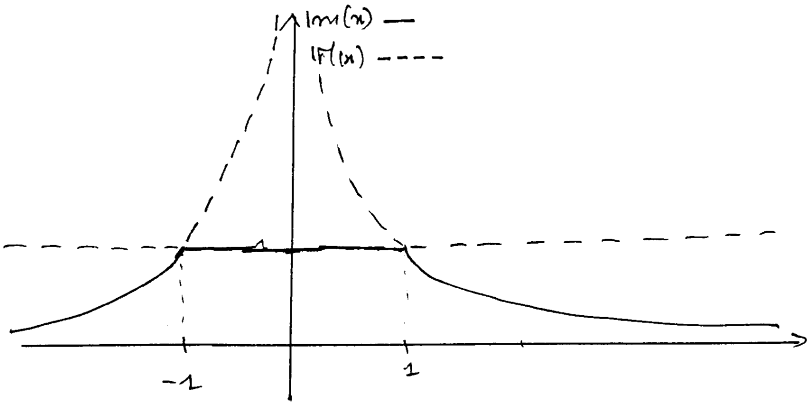
$m(x) = 1$ si $|x| < 1$

Maximum:

$M(x) = 1$ si $|x| > 1$

$M(x) = \frac{1}{x^2}$ si $|x| < 1$

$M(x) = 1$ si $|x| = 1$



Problème:

$$f(x) = \frac{x}{e^x+1} \qquad x \geqslant 0$$

1) $$f'(x) = \frac{e^x+1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2}$$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) - 1 = 0$

$h(x) = e^x(x-1) - 1$

$h'(x) = xe^x$

x	0	1	α		$+\infty$
h'			$+$		
h	-2	-1	0		$+\infty$

h varie continûment en croissant de -2 à $+\infty$ qd x varie de 0 à $+\infty$ $\Rightarrow \exists\, \alpha \,/\, h(\alpha)=0 = f'(\alpha)$

3) α vérifie : $e^{\alpha}(\alpha-1) - 1 = 0$

et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}$

$$e^{\alpha} = \frac{\alpha}{f(\alpha)} - 1$$

$$(\alpha - f(\alpha))(\alpha-1) - f(\alpha) = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha - \alpha f(\alpha) + f(\alpha) - f(\alpha) = 0$$

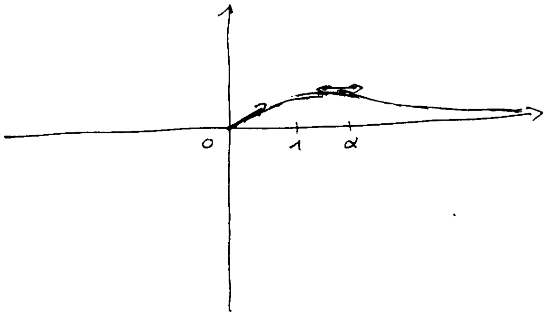
$$\alpha - 1 - f(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \alpha - 1$$

4)

	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		$\alpha-1$		0

$f'(0) = \frac{1}{2}$



5) $g(x) = 1 + e^{-x}$

$g(\alpha) = 1 + e^{-\alpha} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}} = \alpha - 1 \Rightarrow e^{\alpha}(\alpha - 1) - 1 = 0$

$\downarrow$

(équation vérifiée par α (Q 2))

Est ce l'unique ?

$u(x) = g(x) - x = 1 + e^{-x} - x$

$u'(x) = -e^{-x} - 1 = -\frac{1}{e^{x}} - 1 < 0$

x	0	1	α	$+\infty$
$u'(x)$		$-$		
$u(x)$	2	$1/e$	0	$-\infty$

$\exists$ 1 et 1 seule valeur x_0 telle que $u(x_0) = g(x_0) - x_0 = 0$

$\Rightarrow x_0 = \alpha$.

$u(1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

• $g(\alpha) = \alpha \Rightarrow 1 + e^{-\alpha} = \alpha$

$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha - 1$

Comme $\alpha > 1$, $e^{-\alpha} < e^{-1} \Rightarrow \alpha - 1 < e^{-1}$

6) $g'(x) = -e^{-x}$

x	0	1	α	$+\infty$
g'		$-$		
g	2	$1+\frac{1}{e}$	α	1

Il est trivial que $g(x) \geq 1$

$\forall x \geq 1 \quad g(x) - g(\alpha) = (x - \alpha)\, g'(c) \quad c \geq 1$

$|g(x) - g(\alpha)| = |x - \alpha| \underbrace{|g'(c)|}_{\text{majoré par } |g'(1)| = e^{-1}}$

7) En utilisant la réponse à la question 6

$$\underbrace{|g(\alpha_0) - \alpha|}_{=|\alpha_1-\alpha|} \leq e^{-1} |\alpha_0 - \alpha|$$

$$|\alpha_2-\alpha| \leq e^{-1} |\alpha_1-\alpha|$$

$$\vdots$$

$$|\alpha_n-\alpha| \leq e^{-1} |\alpha_{n-1}-\alpha|$$

$$|\alpha_n-\alpha| \leq (e^{-1})^n \underbrace{|1-\alpha|}_{< e^{-1}} \quad \text{car } \alpha_0 = 1$$

d'après la Q.5

$$\Rightarrow |\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$