

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 1998

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTIONS MATHEMATIKUES ET ECONOMIE**

EPREUVE D'ORDRE GENERAL

DUREE : 4 HEURES

Les candidats devront traiter au choix, l'un des trois sujets suivants :

SUJET n° 1

Un écrivain écrit à propos de l'immigration ceci : «L'immigration quelle que soit sa couleur et sa saveur, est une injection de vie, d'énergie et de culture et que les pays devraient la recevoir comme une bénédiction».

Appréciez cette affirmation.

SUJET n° 2

Le développement rapide du nombre d'abonnés à INTERNET dans le monde et en particulier en Afrique aura-t-il des conséquences sur la vie politique, sociale, économique des pays africains.

Dans l'affirmative lesquelles ? et pourquoi ? Etayez votre raisonnement par des exemples précis.

SUJET n° 3

EL HADJ OMAR, fondateur du royaume théocratique Toucouleur du Soudan Occidental (1797-1864) parlant de la prévoyance a dit ce qui suit:

«C'est quand on est au sommet de la puissance qu'on doit se frayer une route pour la défaite»

Est-ce toujours d'actualité ? Quelles réflexions vous inspire cette phrase ?

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve se compose d'un exercice et de deux problèmes ; le candidat peut les traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE

P désigne l'ensemble des nombres entiers pairs strictement positifs. Soit n un élément de P.

On cherche à écrire n sous la forme d'une combinaison linéaire des $n - 1$ entiers qui le précèdent, c'est-à-dire 1, 2, 3, ..., $n - 2$, $n - 1$, tous les coefficients de cette combinaison n'étant que + 1 ou - 1. Par exemple, on a $4 = - 1 + 2 + 3$.

En termes plus mathématiques, on cherche pour chaque $n \in P$ une décomposition :

$$(D) \quad n = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k$$

où le symbole ε_k est le coefficient +1 ou - 1 à affecter à l'entier k .

- ❶ La décomposition d'un entier pair $n \in P$ est-elle unique ?
- ❷ Déterminer le sous-ensemble de P pour lequel existe une décomposition de type (D).

PROBLEME N° 1

On rappelle qu'une suite réelle (u_n) est dite « récurrente d'ordre k » lorsque le terme général u_n dépend des k termes précédents $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}$; les k premières valeurs u_0, u_1, \dots, u_{k-1} de la suite sont données comme conditions initiales.

On considère une suite réelle (u_n) , où n est un nombre entier, $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est une suite récurrente d'ordre 2 définie par la relation :

$$u_{n+2} = (u_{n+1} + u_n) / 2$$

On donne les conditions initiales $u_0 = a$ et $u_1 = b$, où a et b sont deux nombres réels.

❶ En utilisant les résultats classiques sur les suites récurrentes d'ordre 2, donner l'expression, en fonction de n et des paramètres a et b , du terme général de la suite u_n .

❷ Déterminer la limite du terme général u_n de la suite (u_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

❸ On définit la suite (v_n) , $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on explicitera la raison.

Donner l'expression générale de v_n en fonction de n , a et b .

Retrouver l'expression du terme général de la suite (u_n) établie à la question 1.

❹ On définit la suite (w_n) , $n \in \mathbb{N}$, par :

$$w_n = u_{n+1} + u_n / 2$$

Etudier la suite (w_n) .

En déduire que la suite (u_n) peut être mise sous la forme d'une suite récurrente d'ordre 1, de la forme :

$$u_{n+1} = A u_n + B$$

où l'on déterminera les expressions des constantes A et B .

⑤ Pour tout entier n , on définit la suite réelle (x_n) , récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = (x_{n+1} x_n)^{1/2}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

Déterminer la limite de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

PROBLEME N° 2

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I(n)$ suivante :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

① Calculer $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$.

② En effectuant une intégration par parties, établir la relation suivante :

$$n I(n) = (n-1) I(n-2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

③ Montrer que la suite des intégrales $I(n)$ est une suite de termes positifs et qu'elle est décroissante.

④ En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} I(n+1)/I(n) = 1$.

⑤ On définit $Z(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $Z(0)$ et $Z(1)$.

⑥ Montrer par récurrence que, pour tout n , $Z(n)$ est égale à une constante C que l'on explicitera.

⑦ Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n I^2(n) = \pi/2$$

③ A l'aide de la relation établie à la question 2, établir les formules suivantes :

$$I(2p) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p} \frac{\pi}{2}$$

$$I(2p) = \pi C_{2p}^p / (2 \times 4^p)$$

$$I(2p+1) = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2p)}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)}$$

$$I(2p+1) = 4^p / [(2p+1) C_{2p}^p]$$

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

EPREUVE D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

les candidats devront traiter au choix, l'un des deux sujets suivants :

SUJET n° 1

La libéralisation interne et externe et la mondialisation des économies permettent-elles encore aux Etats de mener des politiques conjoncturelles indépendantes ? Vous appuierez votre raisonnement sur une reformulation critique des modèles de la théorie macro-économique, et sur l'histoire des politiques récentes appliquées aux économies en développement.

SUJET n° 2

Les théories classique et néoclassique des échanges internationaux (de Ricardo et J.S. Mills à Herksher, Ohlin et Samuelson) vous semblent elles pouvoir guider le développement et l'insertion internationale des économies émergentes ? Vous appuierez votre raisonnement sur des cas empiriques.

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION ECONOMIE

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve se compose de deux exercices et un problème ; le candidat peut les traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $S(n)$ par :

$$S(n) = \int_0^1 (1+x)^n dx$$

❶ Calculer $S(n)$

❷ En déduire $\sum_{k=0}^n C_n^k / (k+1)$

EXERCICE n° 2

Pour t réel strictement positif, on définit la fonction f_t de la variable réelle x dépendant du paramètre t de la façon suivante :

$$f_t : x \rightarrow (t + 1) / (x^2 + t).$$

❶ Déterminer, quand ils existent, les réels $M(x)$ et $m(x)$ définis par :

$$M(x) = \text{Max}_{t > 0} f_t(x)$$

$$m(x) = \text{min}_{t > 0} f_t(x)$$

$M(x)$ (resp. $m(x)$) est le maximum (resp. minimum) de la fonction $f_t(x)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.

❷ Représenter les graphes des fonctions M et m .

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = x / (e^x + 1) \quad (x \geq 0)$$

❶ Calculer la dérivée f' de f .

❷ Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution et une seule sur \mathbb{R}^+ ; on notera par α cette solution.

❸ Montrer que α vérifie l'équation : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

❹ Construire le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

❺ On introduit la fonction g définie sur \mathbb{R}^+ par la relation :

$$g(x) = 1 + e^{-x}$$

Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

Etablir que $\alpha > 1$. En déduire que $\alpha - 1 < e^{-1}$.

⑥ Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, on a :

$$g(x) \geq 1$$

et que :

$$|g(x) - \alpha| \leq e^{-1} |x - \alpha|$$

⑦ On définit la suite (α_n) , $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $[1, +\infty[$ par la relation de récurrence d'ordre 1 :

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$$

avec la condition initiale $\alpha_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier n , on a :

$$|\alpha_n - \alpha| \leq e^{-(n+1)}$$

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN**

AVRIL 1998

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION ECONOMIE**

EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Note : l'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Attention : le tableau 2 est à recopier et à compléter sur votre copie. Sinon, il vous faudra rendre ce document.

PROBLEME n° 1

La société anonyme BOUTY est spécialisée dans la vente d'appareils ménagers. Le dépannage des appareils en atelier est sous-traité à une entreprise extérieure non connue du client dans la mesure où la société BOUTY a un service après vente (S.A.V.) auquel s'adresse directement le client. Chaque intervention du S.A.V. donne lieu à l'envoi d'une fiche d'évaluation au client qui n'en supporte pas les frais d'expédition.

Le directeur de la qualité de BOUTY a décidé de faire faire une étude sur les prestations du S.A.V. d'une des succursales. Un échantillon de 400 fiches d'intervention est prélevé sur les interventions sur des réfrigérateurs, dans le courant du premier trimestre 1994. Les tableaux 1 et 2 fournissent certains résultats de cette étude. Les informations relatives aux clients n'ayant pas retourné la fiche ont été obtenues par relance téléphonique.

❶ Il vous est demandé, tout d'abord, d'analyser et de commenter le tableau 1 relatif au niveau de satisfaction des clients ayant demandé une réparation de réfrigérateur. Pour ce faire, il vous est suggéré d'analyser la dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation en complétant le tableau 2 et de commenter les résultats.

Tableau 1

Niveau de satisfaction des clients ayant demandé une réparation de réfrigérateur

Clients	très satisfaits	satisfaits	peu ou pas satisfaits	Total
ayant retourné la fiche	222	50	28	300
n'ayant pas retourné la fiche	78	20	2	100
Total	300	70	30	400

Tableau 2
(à compléter)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Ni	pi	npi	(ni-npi)	(ni-npi) ²	(5)/(3)
1	222	0,56250	225	-3	9	0,04
2	50	0,13125	52,5	-2,5	6,25	0,12
3	28	0,05625				
4	78	0,18750	75	3	9	0,12
5	20	0,04375				
6	2	0,01875	7,5	-5,5	30,25	4,03
Total	400	1,00000	400			

Afin de vous aider à conclure le test, il vous est proposé de comparer la valeur totale obtenue en colonne 6 avec la valeur 5,99. Si la valeur trouvée est supérieure à 5,99 il faut en conclure qu'il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation.

② Sur les 400 interventions du S.A.V., 150 sont classés comme mineures parce qu'ayant entraîné un temps de réparation n'excédant pas une heure. Pour les autres, qualifiées de majeures, 35 d'entre elles ont pu être effectuées sur place et 215 ont été réparées en atelier. On ne s'intéressera, ici, qu'aux interventions majeures. Le nombre de jours qui séparent la date d'arrivée du technicien de celle du retour possible de l'appareil (la livraison pouvant être différée à la demande du client pour raison de convenance personnelle) est donné dans le tableau 3 et sera appelé « durée d'une réparation majeure ».

Tableau 3

Distribution des durées d'une réparation majeure

I		1	2	3	4	5	6	7	8	Total
x_i	Durée (en jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	
n_i	Nombre de réfrigérateurs	35	70	66	44	22	10	2	1	250

Il vous est demandé de calculer la moyenne et la variance de la durée d'une réparation majeure. Pour ce faire, on vous donne les définitions suivantes :

- Moyenne $\bar{X} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i x_i}{n}$ où $n = \sum_{i=1}^r n_i$ (r étant le nombre de valeurs différentes de x)

- Variance $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2$

③ Pour suivre l'évolution de la demande, le S.A.V. calcule, à la fin de chaque trimestre, le nombre total d'interventions, au cours des douze mois qui viennent de s'écouler (ce qui permet d'éliminer l'incidence de la saisonnalité).

A partir des informations du tableau 4, il vous est demandé de fournir une prévision pour l'année civile 1997 en justifiant votre démarche.

Tableau 4

Nombre d'interventions des douze derniers mois
(données fin de trimestre)

	19 94				19 95				1996
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1
Nombre d'interventions	13200	13500	13700	14000	13900	13800	14200	14100	14300

PROBLEME n° 2

A l'aide des tableaux fournis en annexe, rédiger une note de synthèse sur les salaires des agents de l'Etat français en 1996.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Le champ est constitué des agents des ministères civils de l'Etat, titulaires et non titulaires, en poste en métropole. Sont inclus les enseignants des établissements privés sous contrat, tandis que sont exclus les salariés des établissements publics ainsi que la Poste et France Télécom devenus exploitants publics depuis le 1er janvier 1991.

Les fichiers de paie de la Fonction Publique d'Etat constituent les sources principales d'information. Les résultats ont été établis à partir d'une exploitation au 1/12ème des fichiers de paie 1995 et 1996. Les effectifs inscrits dans le tableau 3, sont issus du fichier complet.

❶ Les notions de salaire et de traitement

Le traitement indiciaire brut s'obtient en multipliant l'indice nouveau majoré par la valeur du point. C'est le traitement avant tout complément et retenue. Pour la plupart des titulaires, c'est sur ce traitement que sont calculées les cotisations sociales autres que la contribution de solidarité alors que les non titulaires cotisent sur l'ensemble de leur salaire brut.

Le salaire brut ou la rémunération brute s'obtient en ajoutant au traitement indiciaire brut l'indemnité de résidence (0 à 3 % du traitement brut), le supplément familial de traitement éventuel, les primes et les indemnités mais en excluant les éventuels avantages en nature. Les primes et indemnités contiennent la « nouvelle bonification indiciaire » mais elles ne comprennent pas l'indemnité logement des instituteurs qui est versée lorsqu'ils ne sont pas logés par la commune : les salaires brut et net excluent aussi cette indemnité. Ils sont tous considérés comme recevant un avantage en nature, non comptabilisé ici. Les indemnités incluent aussi les rémunérations d'activités annexes indépendantes de l'emploi principal et, dans le cas des non titulaires, l'éventuelle indemnisation du chômage.

Le salaire net ou la rémunération nette de prélèvements s'obtient en retranchant du salaire brut les cotisations sociales « salariés » ainsi que la contribution sociale généralisée (CSG) et la contribution au remboursement de la dette sociale (CRDS).

Le salaire moyen par tête correspond à celui d'un agent à temps plein. On convertit en effet les effectifs en « années-travail » au prorata de leur présence. Ainsi, un agent ayant travaillé durant 6 mois à temps complet et perçu 50 000 F compte pour 0,5 année-travail rémunérée à 100 000 F par an. Si ce même agent avait été à mi-temps, il aurait compté pour 0,25 année-travail rémunérée à 200 000 F par an.

Pour l'ensemble des non titulaires, le salaire moyen, converti en équivalent plein temps, peut être surévalué du fait de la méthode de prise en compte de la période de versement des indemnités versées au titre du chômage une partie de l'année.

🕒 Evolution à structure constante et effet de structure

L'évolution du salaire moyen entre les années n-1 et n est égale au produit d'une évolution à corps, grade et échelon constants et d'un effet de structure.

L'évolution de salaire à structure constante est calculée en figeant la structure des effectifs par corps, grade et échelon au niveau atteint l'année n-1. Elle retrace la moyenne des évolutions de salaires propres à chaque « poste de travail ».

L'évolution moyenne diffère selon la population sur laquelle elle est calculée : soit l'ensemble des agents, soit les personnels présents deux années de suite.

L'effet de structure ou GVT (glissement vieillissement-technicité) « solde » mesure l'effet des modifications de la répartition de la population entre les différents postes de travail (en cas de strict renouvellement de la population à l'intérieur de chaque poste de travail, cet effet est nul). Il résulte de l'effet de carrière ou GVT « positif » et de l'effet des départs des embauches ou « entrée-sorties » généralement négatif.

L'effet de carrière ou GVT « positif » mesure la contribution à l'évolution du salaire moyen des avancements et promotions des « personnes en place ». Comme le salaire à structure constante s'obtient en figeant la structure des effectifs par corps, grade et échelon, l'effet de carrière inclut l'impact des mesures statutaires. On peut le calculer globalement ou par catégorie d'agents sur la population des personnes en place appartenant à la catégorie l'année n-1, qu'ils aient ou non changé de catégorie l'année n.