Niveau : T^{le} D

OG 1 : ANALYSER LA NATURE DU MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE.

TITRE : **OSCILATEURS MECANIQUES LIBRES**

Durée : **6 H**

Objectif spécifique :

OS 5 : Déterminer les caractéristiques du mouvement d'un oscillateur mécanique non amorti.

Moyens :

Vocabulaire spécifique :

Documentation : Livre de Physique AREX Terminale C et D, Euringié Terminale D. Guide pédagogique et Programme

Amorce :

Plan du cours :

I) Caractéristiques générales d'un oscillateur mécanique
- 1° Définition d'un oscillateur mécanique
- 2° Période et fréquence des oscillations

II) Etude d'un pendule élastique horizontal
- 1° Equation différentielle du mouvement
- 2° Equation horaire du mouvement
- 3° Pulsation, période et fréquence propres de l'oscillateur

III) Etude énergétique
- 1° Energie potentielle d'un pendule élastique horizontal
- 2° Energie mécanique

Activités questions	Activités réponses		Observations

OSCILLATEURS MECANIQUES LIBRES

I) Caractéristiques générales d'un oscillateur mécanique

1° Définition d'un oscillateur mécanique

Un oscillateur mécanique est un système matériel qui, écarté de sa position d'équilibre, est animé d'un mouvement périodique (**oscillations**) autour de celle-ci.

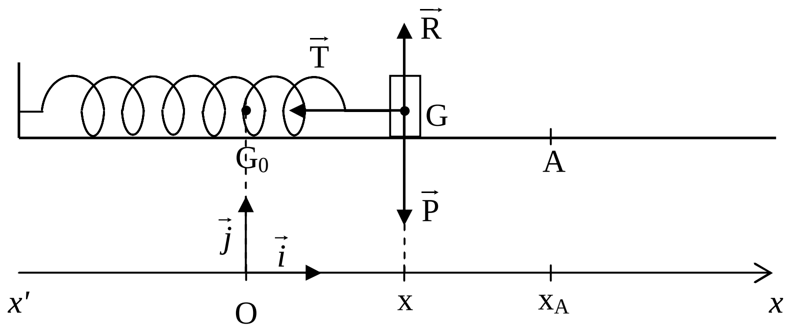
2° Période et fréquence des oscillations

La période **T** est la **durée d'une oscillation complète**. Elle s'exprime en **seconde** (**s**).

La fréquence **N** correspond au **nombre de périodes par seconde** : $N = \frac{1}{T}$. La fréquence s'exprime en **hertz** (**Hz**).

II) Etude d'un pendule élastique horizontal

Soit un solide (S) de masse m, accroché à l'extrémité libre d'un ressort et pouvant coulisser, **sans frottements**, le long d'un plan horizontal. A l'équilibre le centre d'inertie G du solide se trouve en G_0 d'abscisse x = 0. On écarte (S) de sa position G_0 jusqu'en $A(x_A)$ et on le lâche sans vitesse initiale. Le solide (S) effectue des oscillations **non amorties** autour de la position G_0.



1° **Equation différentielle du mouvement**

Système : le solide (S).
Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen.
Repère d'espace : repère d'axes $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ du solide, la réaction $\vec{R}$ du support, la tension $\vec{T}$ du ressort.
Appliquons le T.C.I. :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\overrightarrow{a_G} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m.\overrightarrow{a_G}$$

Projection sur $(O, \vec{i})$: $-kx = m.\ddot{x}$ car $T_x = -kx\,\vec{i}$, $a_{G_x} = \ddot{x}\,\vec{i}$ $(P_x = R_x = 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

C'est l'**équation différentielle** du mouvement de l'oscillateur

2° **Equation horaire du mouvement**

La solution de l'équation différentielle du mouvement est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$ x est appelé élongation à l'instant t.

X_M (m) est l'amplitude du mouvement ou élongation maximale, φ (rad) la phase à l'origine des dates et $(\omega_0 t + \varphi)$ la phase à l'instant t.

X_M et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.

Remarque : La position (élongation) à l'instant t de l'oscillateur est une fonction sinusoïdale : l'oscillateur est dit **harmonique**.

3° **Pulsation, période et fréquence propres de l'oscillateur**

L'équation différentielle du mouvement est : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (1)

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow V = \dot{x} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0 x$$

$$\Rightarrow \quad a = \ddot{x} = -X_m\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad -X_m\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m}X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \qquad \text{soit :} \quad -\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underset{(\mathbf{rad.s^{-1}})}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\overset{(\mathbf{N.m^{-1}})}{k}}{\underset{(\mathbf{kg})}{m}}}}$$

$\boldsymbol{\omega_0}$ ne dépend pas des conditions initiales du mouvement ; on l'appelle **pulsation propre** de l'oscillateur.

- La période propre $\mathbf{T_0}$ est donnée par l'expression : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
- La fréquence propre $\mathbf{N_0}$ est : $N_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

III) Etude énergétique

1° Energie potentielle d'un pendule élastique horizontal

L'énergie potentielle d'un pendule élastique horizontal, écarté de sa position d'équilibre d'une longueur x est : $E_{Pe} = \dfrac{1}{2}kx^2$.

2° Energie mécanique

L'énergie mécanique totale du pendule élastique horizontal à un instant t quelconque est :

$$E_m = E_C + E_{Pe} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

On a : $x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $V = \dot{x} = -X_m\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow \quad E_m = \frac{1}{2}m[-X_m\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{car} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

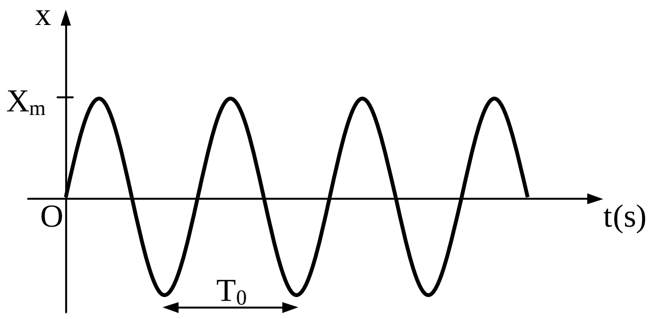
$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$$

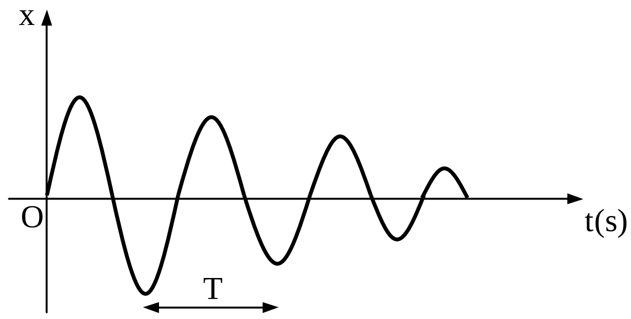
Donc : $$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 \qquad (1)$$

L'énergie mécanique totale d'un oscillateur **non amorti reste constante**.

Remarques :

- En remplaçant k par $m\omega_0^2$ dans (1) on obtient : $E_m = \frac{1}{2}mV_m^2$ avec $V_m^2 = \omega_0^2 X_m^2$.
- Dans le cas d'existence de frottements, l'oscillateur libre **non entretenu** est dit **amorti**. L'amplitude X_m décroît progressivement et le mouvement devient alors pseudopériodique. L'énergie mécanique diminue.





∗ Oscillations libres
∗ Régime périodique (période T_0)

∗ Oscillations amorties
∗ Régime pseudo-périodique (pseudo-période T)