MINESEC - OBC

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXAMEN : BACCALAUREAT D
Durée : 4 H
Coefficient : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. Le candidat devra traiter chacun des exercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1. / 04 points

1. Dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. 0,5 pt

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$
   a. Représenter sur l'axe des abscisses du repère précèdent les termes : u_1, u_2, u_3. 0,75pt
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5 pt
   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < 2$. 0,25 pt
   d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,25 pt

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $vn = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$
   a. Montrer que (vn) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5 pt
   b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. 0,5 pt
   c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,25 pt

4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots + v_n$.
   Exprimer Sn en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 0,5 pt

EXERCICE 2. / 05 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations :

   (E_1) : $Z^2 + 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$ et (E_2) : $Z^2 - 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$. 1 pt

2. Pour tout nombre complexe Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 4Z^2 + 16$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : P(Z) = 0.
   a. Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a tel que :
      $P(Z) = (Z^2 + aZ + 4)(Z^2 - aZ + 4)$. 1 pt
   b. En déduire les solutions de l'équation (E). 0,5 pt

3. Soient A ; B ; C ; D ; E et F les points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; et $\sqrt{3} - i$ dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Montrer que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 . 0,75 pt
   b. Placer ces points dans le plan. 1 pt
   c. Montrer que ABCDEF est un hexagone régulier. 0,75 pt

PROBLÈME. / **11 points**

Partie A

Soit la fonction v définie sur]0 ; + ∞ [par : $v(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}$.

1. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\frac{\ln x}{x^2} \leq v(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ — 1 pt

2. Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}dx$ et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x}dx$. On remarquera que $\frac{\ln x}{x^2} = (\ln x) \times \frac{1}{x^2}$. — 2 pts

3. En déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} v(x)\,dx$. — 1 pt

Partie B

f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Unités sur les axes: 2 cm.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. — 1,5 pt
2. a. Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1} = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ — 0,5 pt

   b. Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives: $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (Cf) . — 1 pt

   c. Tracer les droites (D) ; (D') et la courbe (C_f) dans le même repère orthonormé. — 1 pt
3. a. Montrer que f admet sur ℝ une réciproque f^{-1} dont on donnera le tableau de variation. — 1 pt

   b. Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C_f). — 0,5 pt
4. Soit a un réel supérieur ou égal à 1. A(a) l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équation x = 1 et x = a.

   a. CalculerA(a) et préciserA(2) à 10^{-2} près. — 1 pt

   b. Calculer la limite de A(a) quand a tend vers +∞. — 0,5 pt