MINESEC - OBC

SESSION 2008

Épreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat C/E
Durée : 4 heures
Coefficient : 5 (C) / 4 (E)

EXERCICE 1. / 04 points (série C uniquement)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 12 x -5 y = 3. 1,5 pt
2. On considère la suite de nombres complexes Z_n définie par :

$$\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z_n \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On désigne par M_n est le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. 1,5 pt

b. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels M_n appartient à la demi-droite [O x). 1 pt

EXERCICE 2 : / 04 Points (série E uniquement)

On considère deux suites numériques u et v définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n^2}\right); \quad v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$$

1. Montrer que la suite v converge vers $\frac{1}{2}$ 0,75 pt
2. Soient les fonctions numériques f, g et h définies par :

   $f(x) = x - \sin x$; $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$ et $h(x) = -x + \frac{x^3}{2} + \sin x$.

   Montrer que pour tout x positif, $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$. 1,5 pt
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$ 0,75 pt
4. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$ et calculer la limite de la suite u. 1 pt

EXERCICE 3 : / 05 Points (pour tous les candidats)

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient les points A (3 ;-2 ; 2) ; B (6 ; 1 ; 5) ; C (6 ;-2 ; -1) ; D (0 ; 4 ; -1).

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont trois points non alignés. (0,5+0,25) pt
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A. 0,25 pt

   b. Ecrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonal à la droite (AC), passant par A. 0,5 pt

   c. Vérifier que le plan (P_2) d'équation x+ y +z - 3 = 0 est orthogonal à la droite (AB) et passe par A. 0,5 pt
3. Donner l'expression analytique de la projection orthogonale p sur le plan P_2. 0,25 pt
4. a. Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$. 0,5pt

b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble L = (S) $\cap$ (P_2). 0,75 pt

5. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC). 1 pt

b. On rappelle que le volume du tétraèdre ABCD est V = $\frac{1}{3}$ aire (ABC) x AD.
Déterminer alors la valeur de V. 0,5 pt

Problème : 11 points (pour tous les candidats).

Le problème comporte trois parties A , B et C indépendantes .

Partie A

On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est p_1 = 0,4 ; celle de tirer 1 de V est P_2 = 0,5 et enfin celle de tirer 1 de W est P_3 = 0,7.
On tire une boule de U, une boule de V et une autre de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules.
Soit (Q) le plan d'équation : ax + by + cz + 6 = 0, et soit (E) la conique d'équation :
$\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c \frac{y^2}{b^2}$
Calculer la probabilité pour que :

a. (Q) soit parallèle au plan (P) : x + 2y + z - 4 = 0. 0,5 pt

b. (Q) contienne le point M (0,- 2, - 1). 0,5 pt

c. (E) soit une ellipse. 0,5 pt

d. (E) soit une hyperbole équilatère. 0,5 pt

Partie B

On considère la fonction f définie de $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$

1. Étudier et dresser sur $[-\pi, \pi]$ le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. 1 pt

2. Démontrer que $\forall\, t \in [-\pi, \pi]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$ 0,5 pt

3. En déduire que si x est un réel non nul de $[-\pi, \pi]$, alors $\ln 3 - 2x^2 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt \leq \ln 3$
où ln désigne le logarithme népérien.
Vous distinguerez obligatoirement les cas « x positif» et « x négatif» 0,5 pt

4. a. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. 0,5 pt
b. Peut-on prolonger par continuité f en 0 ? justifier la réponse. 0,5 pt

5. Montrer que f est dérivable sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ puis calculer le nombre dérivé de f en $\frac{\pi}{6}$ 0,5 pt

On pose h la fonction définie de]0,+∞[vers IR par : $h(x) = \frac{\cos t}{t}$

6. La fonction h est-elle deux fois dérivable sur]0 ,+∞[? 0,25 pt

7. Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $x\,h''(x) + 2h'(x) + x\,h(x) = 0$ pour tout x de]0 , +∞[0,5 pt

Partie B

Le plan étant direct, on considère un carré direct ABCD. E étant le milieu de [CD], F et G sont des points tels que DEFG est aussi un carré direct.

1. aire une figure. 0,5 pt
2. Soit s la similitude de centre D qui transforme A en B. Donner le rapport et l'angle de s. 0,5 pt
3. Déterminer s(E). 0,25 pt
4. Soit F le cercle circonscrit à ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF)
   a. Calculer mes $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$. En déduire que I e F. (0,5+0,5) pt
   b. Montrer que les droites (IB) et (DI) sont orthogonales. 0,25 pt
5. On suppose le plan rapporté au repère orthonormé $(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AD}}{AD})$ et AB = 3.
   a. Donner l'écriture complexe de s. 0,75 pt
   b. On pose $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\overrightarrow{j} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$

      Montrer $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base et donner la matrice de l'application linéaire associée à s dans cette base. 1 pt