Lycée Classique ABIDJAN Mardi, 16 Novembre 2021	DEVOIR MATHEMATIQUES –Tle C	Année Scolaire : 2021 2022 DUREE : 2h

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation, suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction f définie par $f(x) = \cos(\cos x)$ a pour dérivée la fonction f ' définie par $f'(x) = -\sin x \sin(\cos x)$
2	Le reste de la division euclidienne par 7 de 5^{2021} est 3
3	Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ alors la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
4	$3x \equiv 0\ [6]$ si seulement si $x \equiv 0[6]$

EXERCICE 2 (4 points)

Pour chacun des énoncés suivants, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

	Enoncés		Réponses proposées
1	l'écriture en base 16 du nombre 47823 est	A	$BACA^{16}$
		B	$BACC^{16}$
		C	$BACD^{16}$
		D	$BACF^{16}$
2	La courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{3}x^4 - 2x + 5$ a un point d'inflexion au point d'abscisse	A	0
		B	2
		C	-2
		D	1/2
3	Soit f la bijection de [illegible] dans]-∞ ; [illegible]] définie par $f(x) = -x^2 + 2x$. f^{-1} sa bijection réciproque. on a $(f^{-1})'(0) =$	A	-3
		B	$-\frac{1}{3}$
		C	3
		D	$\frac{1}{3}$
4	l'équation $3x + 2 \equiv 4[5]$ a pour ensemble de solutions	A	$\{5k + 1 ; k \in \mathbb{Z}\}$
		B	$\{5k + 2 ; k \in \mathbb{Z}\}$
		C	$\{5k + 3 ; k \in \mathbb{Z}\}$
		D	$\{5k + 4 ; k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 3 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité graphique est 2 cm).

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.

On note (C) la courbe représentative de h.

1. Justifie que : $\forall x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $\forall x \in [-1 ; 1]$, $h(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$
2. Démontre que (C) admet aux points d'abscisses −1 et 1 des demi-tangentes verticales.
3. Démontre que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.

4.a) Calcule la limite de h en $+\infty$.

b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Justifie que (C) est au-dessous de (D) sur $]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$.

5.a) On admet que h est dérivable sur les intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$; et pour $|x| > 1$, $|x| > \sqrt{x^2 - 1}$.

Etudie les variations de h sur les intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$.

b) On admet que h est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Justifie que h est croissante sur l'intervalle $[-1 ; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1]$

c) Dresse le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$

6. Trace (D) et (C).

EXERCICE 4 (3 points)

1. Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17 :

a) En utilisant les congruences

b) En utilisant un raisonnement par récurrence

2. Soit a un entier naturel. Le reste de la division euclidienne de a par 50 est r et le reste de la division de a par 10 est r'. On sait de plus que r est inférieur ou égal à r'.

a) Montre que $r - r'$ est un multiple de 10.

b) Donne un encadrement de $r - r'$. Déduis que $r = r'$.

EXERCICE 5 (5 points)

Un artisan fabrique des sacs à mains. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle en centaines de francs est modélisée par la fonction B définie par :

$B(x) = x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 450x + 150$ où x représente le nombre de sacs fabriqués et vendus.

Il aimerait connaitre l'intervalle de sa marge bénéficiaire pour un nombre de sacs fabriqués compris entre 5 et 17.

En te basant sur tes connaissances mathématiques et à l'aide d'un raisonnement cohérent aide l'artisan à répondre à sa préoccupation.