

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

**Matemáticas: aplicaciones e interpretación**  
**Nivel superior**  
**Prueba 3**

Martes 11 de mayo de 2021 (mañana)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 24]

**Juliet es una socióloga que quiere investigar si los ingresos influyen en la felicidad de los médicos. En esta pregunta se le pide que analice los métodos y las conclusiones de Juliet.**

Juliet consiguió una lista con las direcciones de correo electrónico de médicos que trabajan en su misma ciudad. Se puso en contacto con ellos y les pidió que respondieran a un cuestionario anónimo. A los participantes se les pidió que indicaran sus ingresos anuales y que contestaran a una serie de preguntas. Las respuestas se utilizaron para determinar un *índice de felicidad* sobre un máximo de 100 puntos. De los 415 médicos de la lista, contestaron 11.

- (a) (i) Describa **una** manera en la que Juliet podría mejorar la fiabilidad de esta investigación. [1]
- (ii) Describa **una** crítica que se pueda hacer sobre la validez de la investigación de Juliet. [1]

Los resultados que ha obtenido Juliet se resumen en la siguiente tabla.

Respuesta	Ingresos anuales (\$)	Índice de felicidad
A	65 000	60
B	63 000	52
C	40 000	31
D	125 000	81
E	100 000	48
F	245 000	61
G	48 000	42
H	39 000	40
I	85 000	57
J	92 000	53
K	123 456 789	56

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

- (b) Juliet considera que la respuesta K es un valor atípico y la elimina de los datos. Sugiera **un** posible argumento para justificar su decisión de eliminarla. [1]
- (c) Con las diez respuestas restantes de la tabla, Juliet calcula que el índice de felicidad medio es igual a 52,5.
- (i) Calcule los **ingresos anuales** medios para esas respuestas restantes. [2]
- (ii) Determine el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson ( $r$ ) para esas respuestas restantes. [2]

Juliet decide realizar un contraste de hipótesis sobre el coeficiente de correlación para investigar si unos mayores ingresos anuales se asocian con una mayor felicidad.

- (d) (i) Indique por qué ese contraste de hipótesis debería ser de una cola. [1]
- (ii) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para este contraste. [2]

El valor crítico para este contraste, a un nivel de significación del 5%, es 0,549. Juliet supone que la población sigue una distribución normal bidimensional.

- (iii) Determine si hay pruebas significativas de que exista una correlación positiva entre los ingresos anuales y la felicidad. Justifique su respuesta. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página 5)**

Página en blanco

**(Pregunta 1: continuación)**

- (e) Juliet quiere crear un modelo para predecir cómo puede afectar un cambio en los ingresos anuales al índice de felicidad. Para ello, supone que los ingresos anuales en dólares ( $X$ ) son la variable independiente y que el índice de felicidad ( $Y$ ) es la variable dependiente.

Primero se plantea utilizar un modelo lineal de la forma

$$Y = aX + b.$$

- (i) Utilice los datos de Juliet para hallar el valor de  $a$  y el de  $b$ . [1]
- (ii) Interprete qué representa el valor de  $a$ , haciendo referencia a los ingresos y a la felicidad. [1]

A continuación, Juliet se plantea utilizar un modelo cuadrático de la forma

$$Y = cX^2 + dX + e.$$

- (iii) Halle el valor de  $c$ , el de  $d$  y el de  $e$ . [1]
- (iv) Halle el coeficiente de determinación para cada uno de los dos modelos que se ha planteado utilizar. [2]
- (v) A partir de lo anterior, compare los dos modelos. [1]

Juliet decide utilizar el coeficiente de determinación para elegir entre esos dos modelos.

- (vi) Comente la validez de su decisión. [1]

Después de haber presentado los resultados de su investigación, un compañero de Juliet se pregunta si la muestra que ha utilizado es representativa de todos los médicos de la ciudad.

Un informe indica que los ingresos anuales medios de los médicos de esa ciudad son de 80 000 \$. Juliet decide realizar una prueba (contraste) para determinar si su muestra, siendo realistas, podría provenir de una población cuya media es 80 000 \$.

- (f) (i) Indique el nombre de la prueba que debería utilizar Juliet. [1]
- (ii) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para esta prueba. [1]
- (iii) Realice la prueba, utilizando un nivel de significación del 5%, e indique cuál es su conclusión en el contexto de la pregunta. [3]

2. [Puntuación máxima: 31]

**Alessia es una ecologista que trabaja para las autoridades pesqueras del Mediterráneo. Le interesa averiguar si es probable que la densidad de población de caballas caiga por debajo de 5000 caballas por km<sup>3</sup>, puesto que este es el valor mínimo necesario para que la pesca sea sostenible. Ella cree que el factor que más afecta a la población de caballas es la interacción de las caballas con los tiburones, que son su principal depredador.**

La densidad de población de caballas ( $M$  millares por km<sup>3</sup>, del inglés *mackerel*) y la de tiburones ( $S$  por km<sup>3</sup>, del inglés *shark*) en el mar Mediterráneo se pueden modelizar mediante las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= \alpha M - \beta MS \\ \frac{dS}{dt} &= \gamma MS - \delta S\end{aligned}$$

donde  $t$  se mide en años y  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son parámetros.

Este modelo supone que no hay ningún otro factor que afecte a las densidades de población de caballas y de tiburones.

El término  $\alpha M$  modeliza la tasa de crecimiento de la población de caballas en ausencia de tiburones. El término  $\beta MS$  modeliza la tasa de mortalidad de las caballas debida a que los tiburones se las comen.

(a) Sugiera una interpretación similar para cada uno de los siguientes términos:

(i)  $\gamma MS$  [1]

(ii)  $\delta S$  [1]

(b) Un punto de equilibrio es un conjunto de valores de  $M$  y  $S$  tal que  $\frac{dM}{dt} = 0$  y  $\frac{dS}{dt} = 0$ .

Sabiendo que las dos especies están presentes en el punto de equilibrio:

(i) Muestre que, en el punto de equilibrio, el valor de la densidad de población de caballas es  $\frac{\delta}{\gamma}$ . [3]

(ii) Halle el valor de la densidad de población de tiburones en el punto de equilibrio. [2]

(c) El punto de equilibrio que halló en el apartado (b) da los valores promedio de  $M$  y de  $S$  a lo largo del tiempo.

Utilice el modelo para predecir cómo afectarían los siguientes acontecimientos al valor promedio de  $M$ . Justifique sus respuestas.

(i) Se vierten aguas residuales tóxicas al mar Mediterráneo. Alessia afirma que esto hace que disminuya la tasa de crecimiento de la población de tiburones y que, por consiguiente, el valor de  $\gamma$  se reduce a la mitad. No cambia ningún otro parámetro. [2]

(ii) El calentamiento global hace que aumente la temperatura del mar Mediterráneo. Alessia afirma que esto hace que aumente la tasa de crecimiento de la población de caballas y que, por consiguiente, el valor de  $\alpha$  se duplica. No cambia ningún otro parámetro. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

- (d) Para estimar el valor de  $\alpha$ , Alessia considera una situación en la que no hay ningún tiburón y la densidad de población de caballas inicial es  $M_0$ .
- (i) Escriba una ecuación diferencial para  $M$  que modelice esta situación. [1]
  - (ii) Muestre que la expresión que da la densidad de población de caballas al cabo de  $t$  años es  $M = M_0 e^{\alpha t}$ . [4]
  - (iii) Alessia estima que la densidad de población de caballas se multiplica por tres cada dos años. Muestre que  $\alpha = 0,549$  redondeando a tres cifras significativas. [3]

A partir de observaciones adicionales, se cree que

$$\alpha = 0,549,$$

$$\beta = 0,236,$$

$$\gamma = 0,244,$$

$$\delta = 1,39.$$

Alessia decide utilizar el método de Euler para estimar las futuras densidades de población de caballas ( $M$ ) y de tiburones ( $S$ ). Se estima que las densidades de población iniciales son  $M_0 = 5,7$  y  $S_0 = 2$ . Alessia utiliza un paso de 0,1 años.

- (e) (i) Escriba expresiones para  $M_{n+1}$  y  $S_{n+1}$  en función de  $M_n$  y  $S_n$ . [3]
- (ii) Utilice el método de Euler para hallar una estimación de la densidad de población de caballas al cabo de un año. [2]
- (f) Alessia va a utilizar su modelo para estimar si es probable que, durante los nueve primeros años, la densidad de población de caballas caiga por debajo del valor mínimo que se necesita para que la pesca sea sostenible (5000 por  $\text{km}^3$ ).
  - (i) Utilice el método de Euler para dibujar aproximadamente la trayectoria del retrato de fase, para  $4 \leq M \leq 7$  y  $1,5 \leq S \leq 3$ , durante esos nueve primeros años. [3]
  - (ii) Utilizando su retrato de fase, o de cualquier otro modo, determine si la densidad de población de caballas sería suficiente para permitir la pesca sostenible durante esos nueve primeros años. [2]
  - (iii) Indique **dos** motivos por los cuales la conclusión de Alessia, hallada en el subapartado (f)(ii), podría no ser válida. [2]

Fuentes: