

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : applications et interprétation

Niveau supérieur

Épreuve 3

Mardi 11 mai 2021 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez aux **deux** questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 24]

Juliette est une sociologue voulant mener une enquête afin de savoir si le revenu des médecins affecte leur bonheur. Cette question vous demande de revoir les méthodes et les conclusions de Juliette.

Juliette a obtenu une liste d'adresses électroniques de médecins qui travaillent dans sa ville. Elle les a contactés et leur a demandé de remplir un questionnaire anonyme. Les participants devaient indiquer leur revenu annuel et répondre à une série de questions. Les réponses ont été utilisées pour déterminer un *score de bonheur* sur 100. Sur les 415 médecins de la liste, 11 ont répondu.

- (a) (i) Décrivez **une** façon par laquelle Juliette pourrait améliorer la fiabilité de son enquête. [1]
- (ii) Décrivez **une** critique qui peut être faite sur la validité de l'enquête de Juliette. [1]

Les résultats de Juliette sont résumés dans le tableau suivant.

Réponse	Revenu annuel (\$)	Score de bonheur
A	65 000	60
B	63 000	52
C	40 000	31
D	125 000	81
E	100 000	48
F	245 000	61
G	48 000	42
H	39 000	40
I	85 000	57
J	92 000	53
K	123 456 789	56

- (b) Juliette classe la réponse K comme étant une valeur aberrante et la supprime des données. Suggérez **une** justification possible pour sa décision de la supprimer. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

(c) Pour les dix autres réponses du tableau, Juliette calcule le score de bonheur moyen comme étant de 52,5.

(i) Calculez le **revenu annuel** moyen pour ces réponses restantes. [2]

(ii) Déterminez la valeur de r , le coefficient de corrélation de Pearson, pour ces réponses restantes. [2]

Juliette décide de réaliser un test d'hypothèse sur le coefficient de corrélation pour rechercher si l'augmentation du revenu annuel est associée à un plus grand bonheur.

(d) (i) Indiquez pourquoi le test d'hypothèse devrait être unilatéral. [1]

(ii) Indiquez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour ce test. [2]

La valeur critique pour ce test, au niveau de signification de 5%, est 0,549. Juliette suppose que la population est normale à deux variables.

(iii) Déterminez s'il existe une preuve significative d'une corrélation positive entre le revenu annuel et le bonheur. Justifiez votre réponse. [2]

(Suite de la question à la page 5)

Page vierge

(Suite de la question 1)

- (e) Juliette veut créer un modèle pour prédire comment l'évolution du revenu annuel pourrait affecter les scores de bonheur. Pour ce faire, elle suppose que le revenu annuel en dollars, X , est la variable indépendante et que le score de bonheur, Y , est la variable dépendante.

Elle considère d'abord un modèle linéaire de la forme

$$Y = aX + b.$$

- (i) Utilisez les données de Juliette pour trouver la valeur de a et celle de b . [1]
- (ii) Interprétez, en faisant référence au revenu et au bonheur, ce que la valeur de a représente. [1]

Juliette considère ensuite un modèle quadratique de la forme

$$Y = cX^2 + dX + e.$$

- (iii) Trouvez la valeur de c , celle de d et celle de e . [1]
- (iv) Trouvez le coefficient de détermination pour chaque modèle considéré. [2]
- (v) À partir de là, comparez les deux modèles. [1]

Juliette décide d'utiliser le coefficient de détermination pour choisir entre ces deux modèles.

- (vi) Commentez la validité de sa décision. [1]

Après avoir présenté les résultats de son enquête, une collègue se demande si l'échantillon de Juliette est représentatif de tous les médecins de la ville.

Un rapport indique que le revenu annuel moyen des médecins de la ville est de 80 000 \$. Juliette décide de faire un test pour déterminer si son échantillon pourrait, de façon réaliste, avoir été prélevé dans une population dont la moyenne est de 80 000 \$.

- (f) (i) Indiquez le nom du test que Juliette devrait utiliser. [1]
- (ii) Indiquez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative pour ce test. [1]
- (iii) Réalisez le test, en utilisant un niveau de signification de 5%, et indiquez votre conclusion dans le contexte. [3]

2. [Note maximale : 31]

Alessia est une écologiste travaillant pour les autorités de pêche méditerranéennes. Elle voudrait savoir si la densité de la population de maquereaux risque de passer en dessous de 5000 maquereaux par km³, car il s'agit de la valeur minimale requise pour avoir une pêche durable. Elle croit que le principal facteur affectant la population de maquereaux est l'interaction des maquereaux avec les requins, leur principal prédateur.

Les densités des populations de maquereaux (M milliers par km³) et de requins (S par km³) dans la mer Méditerranée sont modélisées par les équations différentielles couplées :

$$\frac{dM}{dt} = \alpha M - \beta MS$$

$$\frac{dS}{dt} = \gamma MS - \delta S$$

où t est mesuré en années et α , β , γ et δ sont des paramètres.

Ce modèle suppose qu'aucun autre facteur n'affecte les densités des populations de maquereaux ou de requins.

Le terme αM modélise le taux de croissance de la population de maquereaux en l'absence de requins. Le terme βMS modélise le taux de mortalité de maquereaux dû au fait qu'ils sont mangés par des requins.

(a) Suggérez des interprétations similaires pour les termes suivants :

(i) γMS [1]

(ii) δS [1]

(b) Un point d'équilibre est un ensemble de valeurs de M et S , tel que $\frac{dM}{dt} = 0$ et $\frac{dS}{dt} = 0$.

Étant donné que les deux espèces sont présentes au point d'équilibre,

(i) montrez que, au point d'équilibre, la valeur de la densité de la population de maquereaux est $\frac{\delta}{\gamma}$; [3]

(ii) trouvez la valeur de la densité de la population de requins au point d'équilibre. [2]

(c) Le point d'équilibre trouvé dans la partie (b) donne les valeurs moyennes de M et de S au cours du temps.

Utilisez le modèle pour prédire comment les événements suivants affecteraient la valeur moyenne de M . Justifiez vos réponses.

(i) Des eaux usées toxiques sont ajoutées à la mer Méditerranée. Alessia affirme que cela réduit le taux de croissance de la population de requins et que la valeur de γ est donc divisée par deux. Aucun autre paramètre ne change. [2]

(ii) Le réchauffement climatique augmente la température de la mer Méditerranée. Alessia affirme que cela favorise le taux de croissance de la population de maquereaux et que la valeur de α est donc doublée. Aucun autre paramètre ne change. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

- (d) Pour estimer la valeur de α , Alessia considère une situation où il n'y a pas de requins et où la densité de la population de maquereaux initiale est M_0 .
- (i) Écrivez l'équation différentielle pour M qui modélise cette situation. [1]
- (ii) Montrez que l'expression pour la densité de la population de maquereaux après t années est $M = M_0 e^{\alpha t}$. [4]
- (iii) Alessia estime que la densité de la population de maquereaux augmente d'un facteur de trois tous les deux ans. Montrez que $\alpha = 0,549$ avec trois chiffres significatifs. [3]

Sur la base de nouvelles observations, on croit que

$$\alpha = 0,549,$$

$$\beta = 0,236,$$

$$\gamma = 0,244,$$

$$\delta = 1,39.$$

Alessia décide d'utiliser la méthode d'Euler pour estimer les futures densités des populations de maquereaux et de requins. Les densités des populations initiales sont estimées à $M_0 = 5,7$ et $S_0 = 2$. Elle utilise un pas de longueur égale à 0,1 année.

- (e) (i) Écrivez des expressions pour M_{n+1} et S_{n+1} en fonction de M_n et S_n . [3]
- (ii) Utilisez la méthode d'Euler pour trouver une estimation de la densité de la population de maquereaux après une année. [2]
- (f) Alessia utilisera son modèle pour estimer si la densité de la population de maquereaux est susceptible de passer en dessous de la valeur minimale requise pour avoir une pêche durable, 5000 par km^3 , au cours des neuf premières années.
- (i) Utilisez la méthode d'Euler pour esquisser la trajectoire du portrait de phase, pour $4 \leq M \leq 7$ et $1,5 \leq S \leq 3$, au cours des neuf premières années. [3]
- (ii) En utilisant votre portrait de phase, ou par toute autre méthode, déterminez si la densité de la population de maquereaux serait suffisante pour avoir une pêche durable au cours des neuf premières années. [2]
- (iii) Indiquez **deux** raisons pour lesquelles la conclusion d'Alessia, trouvée dans la partie (f)(ii), pourrait ne pas être valide. [2]

Références :