

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

**Mathématiques : analyse et approches**  
**Niveau supérieur**  
**Épreuve 3**

Mardi 11 mai 2021 (matin)

1 heure

---

**Instructions destinées aux candidats**

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 31]

**Cette question vous demande d'explorer le comportement et certaines caractéristiques principales de la fonction  $f_n(x) = x^n(a - x)^n$ , où  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $n \in \mathbb{Z}^+$ .**

Dans les parties (a) et (b), considérez **seulement** le cas où  $a = 2$ .

Considérez  $f_1(x) = x(2 - x)$ .

- (a) Esquissez la représentation graphique de  $y = f_1(x)$ , en indiquant les valeurs de tout point d'intersection avec les axes et les coordonnées de tout maximum ou minimum relatif. [3]

Considérez  $f_n(x) = x^n(2 - x)^n$ , où  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n > 1$ .

- (b) Utilisez votre calculatrice à écran graphique pour explorer la représentation graphique de  $y = f_n(x)$  pour
- les valeurs impaires  $n = 3$  et  $n = 5$ ;
  - les valeurs paires  $n = 2$  et  $n = 4$ .

À partir de là, recopiez et complétez le tableau suivant. [6]

	Nombre de maximums relatifs	Nombre de minimums relatifs	Nombre de points d'inflexion de pente nulle
$n = 3$ et $n = 5$			
$n = 2$ et $n = 4$			

Considérez maintenant  $f_n(x) = x^n(a - x)^n$ , où  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n > 1$ .

- (c) Montrez que  $f'_n(x) = nx^{n-1}(a - 2x)(a - x)^{n-1}$ . [5]
- (d) Indiquez les trois solutions de l'équation  $f'_n(x) = 0$ . [2]
- (e) Montrez que le point  $\left(\frac{a}{2}; f_n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$  sur la représentation graphique de  $y = f_n(x)$  est toujours au-dessus de l'axe horizontal. [3]

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 1)**

(f) À partir de là, ou par toute autre méthode, montrez que  $f'_n\left(\frac{a}{4}\right) > 0$ , pour  $n \in \mathbb{Z}^+$ . [2]

(g) En utilisant le résultat de la partie (f) et en considérant le signe de  $f'_n(-1)$ , montrez que le point  $(0; 0)$  sur la représentation graphique de  $y = f_n(x)$  est

(i) un minimum relatif pour les valeurs paires de  $n$ , où  $n > 1$  et  $a \in \mathbb{R}^+$ ; [3]

(ii) un point d'inflexion de pente nulle pour les valeurs impaires de  $n$ , où  $n > 1$  et  $a \in \mathbb{R}^+$ . [2]

Considérez la représentation graphique de  $y = x^n(a - x)^n - k$ , où  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $k \in \mathbb{R}$ .

(h) Indiquez les conditions sur  $n$  et  $k$  pour que l'équation  $x^n(a - x)^n = k$  admette quatre solutions pour  $x$ . [5]

2. [Note maximale : 24]

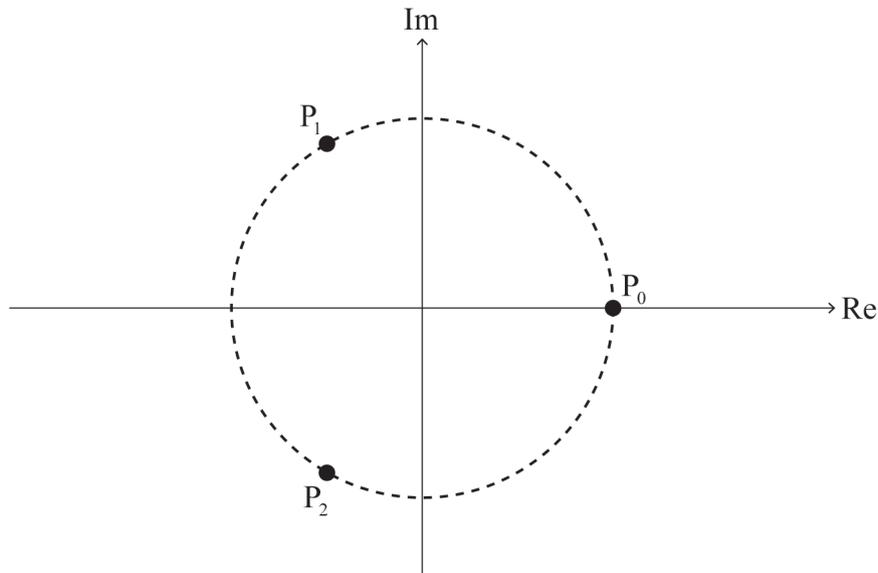
**Cette question vous demande d'explorer et de prouver une propriété géométrique faisant intervenir les racines de l'équation  $z^n = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$  pour des entiers  $n$ , où  $n \geq 2$ .**

Les racines de l'équation  $z^n = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , sont  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ , où  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Chaque racine peut être représentée respectivement par un point  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  sur un diagramme d'Argand.

Par exemple, les racines de l'équation  $z^2 = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , sont  $1$  et  $\omega$ . Sur un diagramme d'Argand, la racine  $1$  peut être représentée par un point  $P_0$  et la racine  $\omega$  peut être représentée par un point  $P_1$ .

Considérez le cas où  $n = 3$ .

Les racines de l'équation  $z^3 = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , sont  $1, \omega$  et  $\omega^2$ . Sur le diagramme d'Argand suivant, les points  $P_0, P_1$  et  $P_2$  se situent sur un cercle de rayon 1 unité dont le centre est  $O(0; 0)$ .

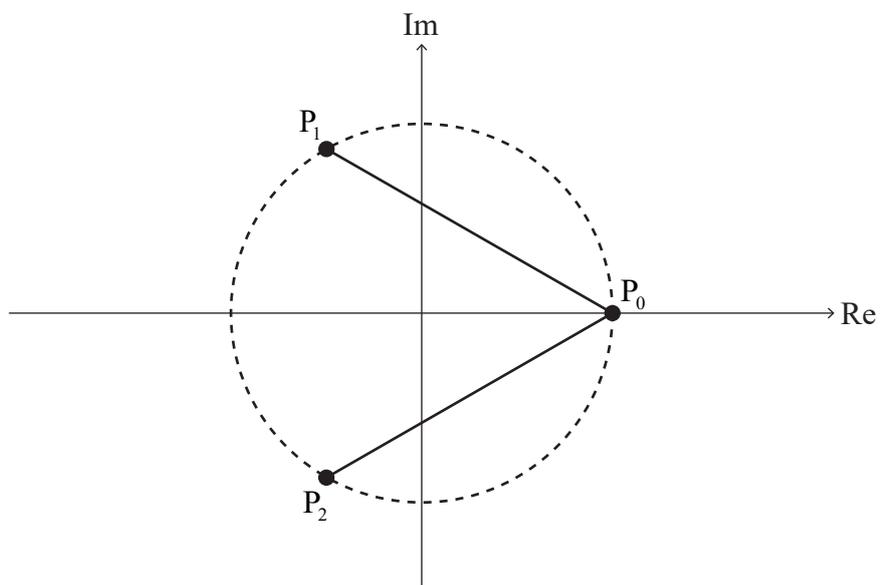


- (a) (i) Montrez que  $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1$ . [2]
- (ii) À partir de là, déduisez que  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ . [2]

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 2)**

Les segments de droite  $[P_0P_1]$  et  $[P_0P_2]$  sont ajoutés au diagramme d'Argand de la partie (a) et sont montrés sur le diagramme d'Argand suivant.



$P_0P_1$  est la longueur de  $[P_0P_1]$  et  $P_0P_2$  est la longueur de  $[P_0P_2]$ .

(b) Montrez que  $P_0P_1 \times P_0P_2 = 3$ . [3]

Considérez le cas où  $n = 4$ .

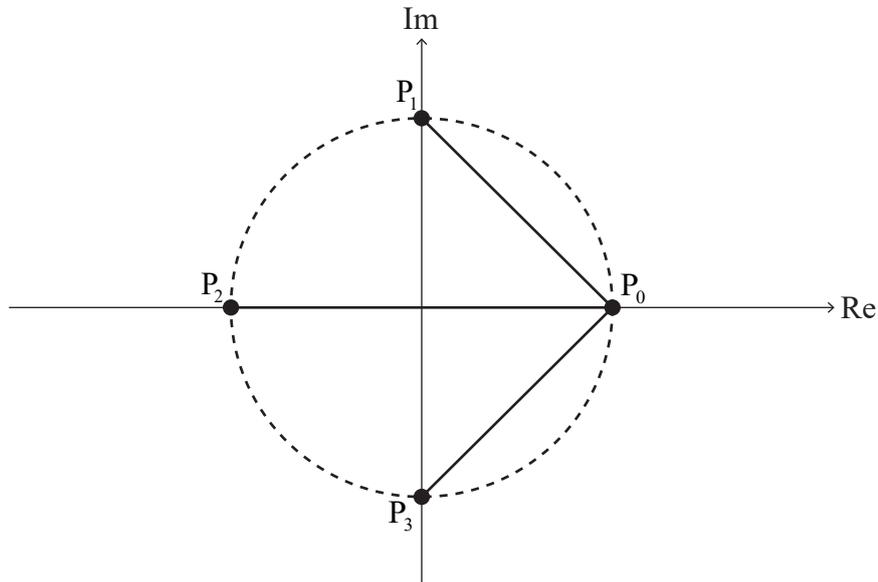
Les racines de l'équation  $z^4 = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , sont  $1, \omega, \omega^2$  et  $\omega^3$ .

(c) En factorisant  $z^4 - 1$ , ou par toute autre méthode, déduisez que  $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$ . [2]

**(Suite de la question à la page suivante)**

**(Suite de la question 2)**

Sur le diagramme d'Argand suivant, les points  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  se situent sur un cercle de rayon 1 unité dont le centre est  $O(0; 0)$ .  $[P_0P_1]$ ,  $[P_0P_2]$  et  $[P_0P_3]$  sont des segments de droite.



(d) Montrez que  $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 = 4$ . [4]

Pour le cas où  $n = 5$ , l'équation  $z^5 = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , possède les racines  $1, \omega, \omega^2, \omega^3$  et  $\omega^4$ .

Il peut être démontré que  $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 \times P_0P_4 = 5$ .

Considérez maintenant le cas général pour des valeurs entières de  $n$ , où  $n \geq 2$ .

Les racines de l'équation  $z^n = 1$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , sont  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ .

Sur un diagramme d'Argand, ces racines peuvent être représentées respectivement par les points  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , où  $[P_0P_1], [P_0P_2], \dots, [P_0P_{n-1}]$  sont des segments de droite. Les racines se situent sur un cercle de rayon 1 unité dont le centre est  $O(0; 0)$ .

(e) Suggérez une valeur pour  $P_0P_1 \times P_0P_2 \times \dots \times P_0P_{n-1}$ . [1]

$P_0P_1$  peut être exprimé comme  $|1 - \omega|$ .

(f) (i) Écrivez des expressions pour  $P_0P_2$  et  $P_0P_3$  en fonction de  $\omega$ . [2]

(ii) À partir de là, écrivez une expression pour  $P_0P_{n-1}$  en fonction de  $n$  et  $\omega$ . [1]

Considérez  $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$ , où  $z \in \mathbb{C}$ .

(g) (i) Exprimez  $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$  comme un produit de facteurs linéaires sur l'ensemble  $\mathbb{C}$ . [3]

(ii) À partir de là, en utilisant les résultats de la partie (g)(i) et de la partie (f), ou par toute autre méthode, prouvez votre résultat suggéré à la partie (e). [4]

**Références :**