Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

Dienstag, 11. Mai 2021 (Vormittag)

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

7 Seiten

2221 – 7128

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 31]

In dieser Frage sollen Sie das Verhalten und einige wesentliche Eigenschaften der Funktion $f_n(x) = x^n(a-x)^n$, mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{Z}^+$, untersuchen.

Betrachten Sie bitte in den Teilen (a) und (b) **nur** den Fall für $a = 2$.

Betrachten Sie $f_1(x) = x(2-x)$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von $y = f_1(x)$, und geben Sie dabei die Werte aller Schnittpunkte mit den Achsen sowie ggf. die Koordinaten aller lokalen Maxima und Minima an. [3]

Betrachten Sie nun $f_n(x) = x^n(2-x)^n$, mit $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe Ihres grafikfähigen Taschenrechners (GTR) den Graphen von $y = f_n(x)$ für die folgenden beiden Fälle:

- die ungeraden Werte $n = 3$ und $n = 5$;
- die geraden Werte $n = 2$ und $n = 4$.

Übertragen Sie unter Nutzung der Vorarbeit die folgende Tabelle in das Antwortheft und tragen Sie Ihre Ergebnisse ein. [6]

	Anzahl der lokalen Maxima (Hochpunkte)	**Anzahl der lokalen Minima (Tiefpunkte)**	**Anzahl der Wendepunkte mit Steigung Null**
$n = 3$ und $n = 5$			
$n = 2$ und $n = 4$			

Betrachten Sie nun $f_n(x) = x^n(a-x)^n$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $f_n'(x) = nx^{n-1}(a-2x)(a-x)^{n-1}$. [5]

(d) Geben Sie die drei Lösungen der Gleichung $f_n'(x) = 0$ an. [2]

(e) Zeigen Sie, dass der Punkt $\left(\dfrac{a}{2}, f_n\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$ auf dem Graphen von $y = f_n(x)$ stets oberhalb der horizontalen Achse liegt. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

(f) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode, dass $f_n'\left(\frac{a}{4}\right) > 0$, für $n \in \mathbb{Z}^+$. [2]

(g) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teil (f) und betrachten Sie das Vorzeichen von $f_n'(-1)$. Zeigen Sie damit, dass für den Punkt $(0, 0)$ auf dem Graphen von $y = f_n(x)$ Folgendes gilt:

(i) Er ist ein lokales Minimum für gerade Werte von n, mit $n > 1$ und $a \in \mathbb{R}^+$; [3]

(ii) Er ist ein Wendepunkt mit Steigung Null für ungerade Werte von n, mit $n > 1$ und $a \in \mathbb{R}^+$. [2]

Betrachten Sie den Graphen von $y = x^n(a - x)^n - k$, mit $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}$.

(h) Geben Sie die Bedingungen für n und k an, so dass die Gleichung $x^n(a - x)^n = k$ vier Lösungen für x besitzt. [5]

2. [Maximale Punktzahl: 24]

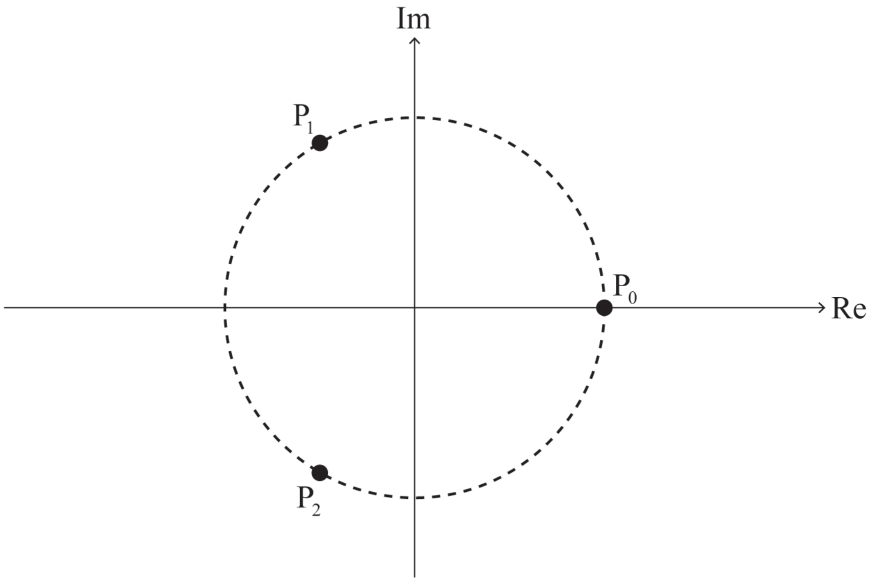
In dieser Aufgabe sollen Sie die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ für ganze Zahlen n mit $n \geq 2$ untersuchen und eine zugehörige geometrische Eigenschaft beweisen.

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ sind 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}, mit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Auf einem Argand-Diagramm kann jede Lösung durch jeweils einen Punkt $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ dargestellt werden.

Beispielsweise sind die Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ 1 und ω. Auf einem Argand-Diagramm kann die Lösung 1 durch einen Punkt P_0 und die Lösung ω durch einen Punkt P_1 dargestellt werden.

Betrachten Sie nun den Fall für $n = 3$.

Die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ sind 1, ω und ω^2. Auf dem folgenden Argand-Diagramm liegen die Punkte P_0, P_1 und P_2 auf einem Kreis mit Radius 1 und dem Mittelpunkt $\mathrm{O}(0, 0)$.



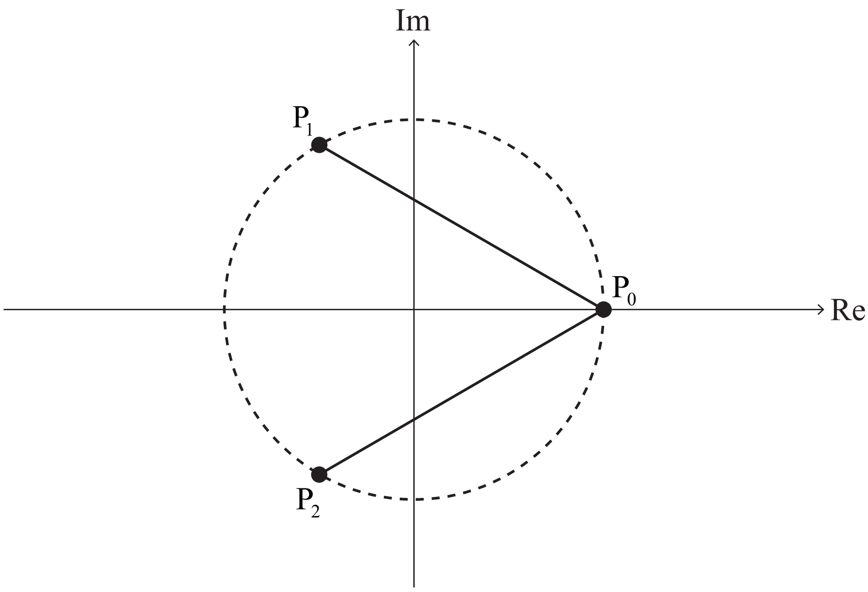
(a) (i) Zeigen Sie, dass $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1$. [2]

(ii) Deduzieren Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Die Strecken $[P_0P_1]$ und $[P_0P_2]$ werden in das Argand-Diagramm aus Teil (a) eingezeichnet, wie folgt im Argand-Diagramm dargestellt.



P_0P_1 ist die Länge von $[P_0P_1]$ und P_0P_2 ist die Länge von $[P_0P_2]$.

(b) Zeigen Sie, dass gilt: $P_0P_1 \times P_0P_2 = 3$. [3]

Betrachten Sie nun den Fall für $n = 4$.

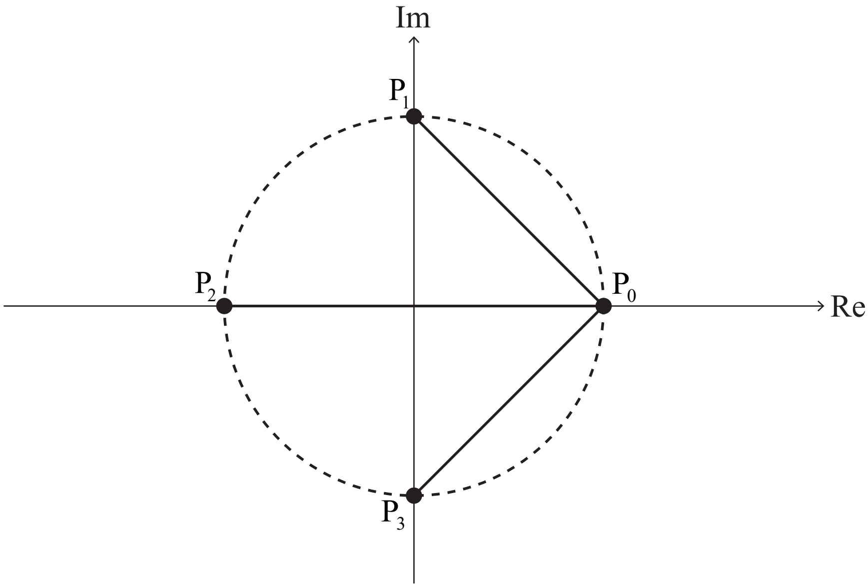
Die Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ sind 1, ω, ω^2 und ω^3.

(c) Deduzieren Sie durch Faktorisierung von $z^4 - 1$ oder auf andere Weise, dass gilt: $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Auf dem folgenden Argand-Diagramm liegen die Punkte P_0, P_1, P_2 und P_3 auf einem Kreis mit Radius 1 und dem Mittelpunkt $O(0, 0)$. $[P_0P_1]$, $[P_0P_2]$ und $[P_0P_3]$ sind Strecken.



(d) Zeigen Sie, dass gilt: $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 = 4$. [4]

Für den Fall $n = 5$ hat die Gleichung $z^5 = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen 1, ω, ω^2, ω^3 und ω^4.

Man kann zeigen, dass $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 \times P_0P_4 = 5$.

Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall für ganzzahlige Werte von n, mit $n \geq 2$.

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ sind 1, ω, ω^2, ..., ω^{n-1}. Auf einem Argand-Diagramm können diese Lösungen durch die Punkte P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1} dargestellt werden, und $[P_0P_1]$, $[P_0P_2]$, ..., $[P_0P_{n-1}]$ sind Strecken. Die Lösungen liegen auf einem Kreis mit Radius 1 und dem Mittelpunkt $O(0, 0)$.

(e) Schlagen Sie einen Wert für $P_0P_1 \times P_0P_2 \times ... \times P_0P_{n-1}$ vor. [1]

P_0P_1 kann als $|1 - \omega|$ ausgedrückt werden.

(f) (i) Notieren Sie Ausdrücke für P_0P_2 und P_0P_3 abhängig von ω. [2]

(ii) Notieren Sie unter Nutzung der Vorarbeit einen Ausdruck für P_0P_{n-1} abhängig von n und ω. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Betrachten Sie $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$ mit $z \in \mathbb{C}$.

(g) (i) Drücken Sie $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$ als Produkt von Linearfaktoren über der Menge $\mathbb{C}$ aus. [3]

(ii) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Teil (g)(i) und Teil (f) und beweisen Sie unter Nutzung der Vorarbeit oder mittels einer anderen Methode Ihren Ergebnisvorschlag zu Teil (e). [4]

Quellen: