Mathematik: Analyse und Ansätze
Grundstufe
2. Klausur

Freitag, 7. Mai 2021 (Vormittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

1 Stunde 30 Minuten

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Abschnitt A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Abschnitt B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[80 Punkte]**.

2221 – 7130

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

In einem Café hängt die Wartezeit zwischen der Bestellung und dem Erhalt einer Tasse Kaffee von der Anzahl der Kunden ab, die ihren Kaffee bereits vorher bestellt haben und noch darauf warten.

Die Stammkundin Sarah hat das Café an fünf aufeinander folgenden Tagen besucht. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl x der Kunden, die am jeweiligen Tag bereits vor Sarah bestellt hatten und noch auf ihren Kaffee warteten, sowie Sarahs Wartezeit y in Minuten.

Anzahl der Kunden (x)	3	9	11	10	5
Sarahs Wartezeit (y)	6	10	12	11	6

Die Beziehung zwischen x und y kann modelliert werden durch die Regressionsgerade von y auf x mit der Gleichung $y = ax + b$.

(a) (i) Finden Sie die Werte von a und b.

(ii) Notieren Sie den Wert des Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten r. [3]

(b) Interpretieren Sie in diesem Kontext den in Teil (a)(i) ermittelten Wert von a. [1]

An einem anderen Tag besucht Sarah erneut das Café und bestellt einen Kaffee. Sieben Kunden haben vor ihr einen Kaffee bestellt und warten noch darauf.

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (a)(i) und schätzen Sie damit Sarahs Wartezeit, bis sie ihren Kaffee erhält. [2]

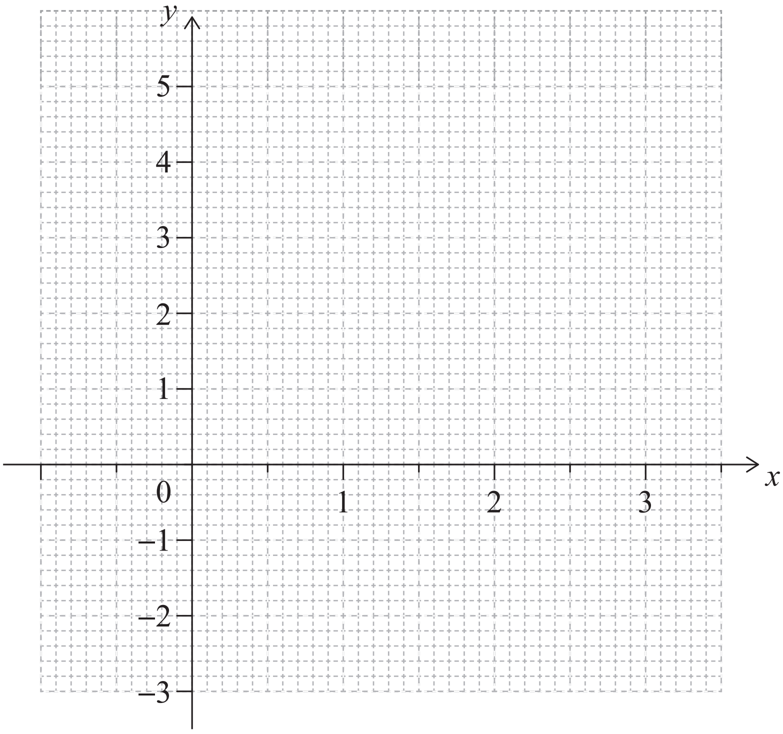
Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Sei $f(x) = 3x - 4^{0,15x^2}$ für $0 \le x \le 3$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im nachstehenden Koordinatensystem. [3]



(b) Finden Sie den Wert von x, für den gilt: $f'(x) = 0$. [2]

3. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine arithmetische Folge hat den ersten Term 60 und eine gemeinsame Differenz von $-2{,}5$.

(a) Der k-te Term der Folge sei Null. Finden Sie den Wert von k. [2]

Sei S_n die Summe der ersten n Folgenterme.

(b) Finden Sie den Maximalwert von S_n. [3]

4. [Maximale Punktzahl: 8]

An einer Schule üben 70% der Schülerinnen und Schüler eine Sportart aus, und 20% der Schülerinnen und Schüler spielen in der Theater-AG mit. 18% der Schülerinnen und Schüler üben keine dieser beiden Tätigkeiten aus.

Eine Schülerin bzw. ein Schüler wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

(a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der/die ausgewählte Schüler(in) einen Sport ausübt und Theater spielt. [2]

(b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der/die ausgewählte Schüler(in) zwar Theater spielt, jedoch keinen Sport ausübt. [2]

An dieser Schule gibt es 48% Mädchen, und 25% der Mädchen spielen Theater.

Wieder wird eine Schülerin bzw. ein Schüler nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Sei G das Ereignis „ein Mädchen wurde ausgewählt" und T das Ereignis „der/die Ausgewählte spielt Theater".

(c) Finden Sie $\mathrm{P}(G \cap T)$. [2]

(d) Bestimmen Sie, ob die Ereignisse G und T unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort. [2]

5. [Maximale Punktzahl: 6]

Die Funktionen f und g sind definiert für $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = 6x^2 - 12x + 1$ bzw. $g(x) = -x + c$, mit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie den Wertebereich von f. [2]

(b) Sei $(g \circ f)(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge aller möglichen Werte für c. [4]

6. [Maximale Punktzahl: 7]

Alle lebenden Pflanzen enthalten ein Kohlenstoffisotop namens C-14. Wenn eine Pflanze stirbt, zerfällt das Isotop, so dass die in den Pflanzenresten vorhandene Menge an C-14 abnimmt. Die Zeit seit dem Absterben einer Pflanze kann bestimmt werden, indem die in den Überresten vorhandene Menge an C-14 gemessen wird.

Die Menge A an C-14-Atomen, die in einer Pflanze t Jahre nach ihrem Absterben noch vorhanden ist, kann modelliert werden durch $A = A_0 e^{-kt}$ mit $t \geq 0$ und positiven Konstanten A_0, k.

Zum Zeitpunkt des Absterbens enthalte eine Pflanze 100 Einheiten C-14.

(a) Zeigen Sie, dass $A_0 = 100$. [1]

Man weiß, dass die Zeit bis zum Zerfall der Hälfte der ursprünglichen Menge an C-14 etwa 5730 Jahre beträgt.

(b) Zeigen Sie, dass $k = \dfrac{\ln 2}{5730}$. [3]

(c) Finden Sie mit einer Genauigkeit von 10 Jahren die Zeitdauer nach dem Absterben der Pflanze, bis $25\,\%$ des C-14-Gehalts zerfallen sind. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

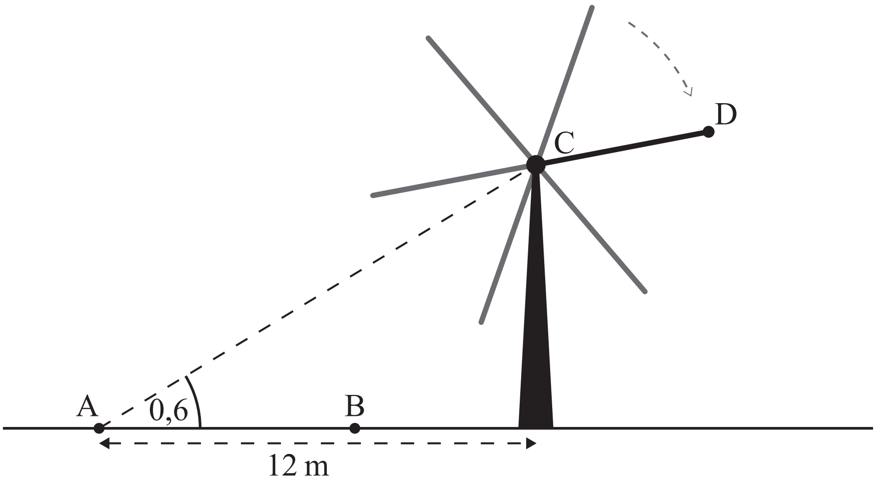
Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

7. [Maximale Punktzahl: 13]

Die sechs Rotorblätter einer Windmühle drehen sich um den Mittelpunkt C. Die Punkte A und B sowie der Fußpunkt der Windmühle befinden sich auf ebenem Boden, wie in der folgenden Abbildung dargestellt.



Von Punkt A aus betrachtet beträgt der Blickwinkel im Bogenmaß zum Punkt C $0{,}6$.

(a) Der Punkt A sei 12 Meter vom Fußpunkt der Windmühle entfernt. Finden Sie die Höhe des Punkts C über dem Boden. [2]

Ein Beobachter geht 7 Meter von Punkt A nach Punkt B.

(b) Finden Sie den Blickwinkel von Punkt B zu Punkt C. [2]

Der Beobachter geht weiter, bis er direkt unter Punkt C steht. Der Beobachter ist $1{,}80$ groß, und bei Drehung der Rotorblätter der Windmühle bewegt sich der Endpunkt jedes Rotorblatts $2{,}5$ Meter über seinem Kopf vorbei.

(c) Finden Sie die Länge der Rotorblätter der Windmühle. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 7)

Eines der Rotorblätter ist in einer anderen Farbe lackiert als die anderen. Das Ende dieses Rotorblatts sei mit Punkt D gekennzeichnet. Die Höhe h des Punkts D über dem Boden (in Metern) kann durch die Funktion $h(t) = p\cos\left(\frac{3\pi}{10}t\right) + q$ modelliert werden, mit t in Sekunden und $p, q \in \mathbb{R}$. Für $t = 0$ befindet sich Punkt D an seiner maximalen Höhe.

(d) Finden Sie die Werte von p und q. [4]

Steht der Beobachter eine Minute lang direkt unter Punkt C, bewegt sich Punkt D n Mal über seinen Kopf hinweg.

(e) Finden Sie den Wert von n. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

8. [Maximale Punktzahl: 15]

Die Flugzeiten T in Minuten zwischen zwei Städten können durch eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 75 Minuten und einer Standardabweichung von σ Minuten modelliert werden.

(a) Angenommen, 2% der Flugzeiten seien länger als 82 Minuten. Finden Sie hieraus den Wert von σ. [3]

(b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Flug länger als 80 Minuten dauern wird. [2]

(c) Angenommen, ein Flug zwischen den beiden Städten dauere länger als 80 Minuten. Finden Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass er weniger als 82 Minuten dauert. [4]

An einem bestimmten Tag sind 64 Flüge zwischen diesen beiden Städten geplant.

(d) Finden Sie die zu erwartende Anzahl an Flügen, die länger als 80 Minuten dauern werden. [3]

(e) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 6 der Flüge an diesem Tag länger als 80 Minuten dauern werden. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

9. [Maximale Punktzahl: 15]

Alle Antworten in dieser Aufgabe sind auf vier signifikante Stellen genau anzugeben.

Bei einer örtlichen Wochenlotterie kostet jedes Los 2 $.

In der ersten Woche der Lotterie gewinnt ein Spieler D $ für jedes Los, gemäß der in folgender Tabelle dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Beispielsweise beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler 10 $ gewinnt, $0{,}03$. Der Hauptgewinn in der ersten Woche der Lotterie beträgt 1000 $.

d	0	2	10	50	Hauptgewinn
$\mathrm{P}(D=d)$	$0{,}85$	c	$0{,}03$	$0{,}002$	$0{,}0001$

(a) Finden Sie den Wert von c. [2]

(b) Bestimmen Sie, ob diese Lotterie in der ersten Woche ein faires Spiel ist. Begründen Sie Ihre Antwort. [4]

Wenn in der ersten Woche niemand den Hauptgewinn erhält, bleiben die Wahrscheinlichkeiten gleich, aber der Wert des Hauptgewinns steigt in der zweiten Woche auf 2000 $ und verdoppelt sich weiterhin jede Woche, bis ihn jemand gewinnt. Alle anderen Gewinnbeträge bleiben gleich.

(c) Angenommen, der Hauptgewinn wird nicht ausgeschüttet und verdoppelt sich weiterhin. Schreiben Sie in Abhängigkeit von n einen Ausdruck für den Wert des Hauptgewinns in der n-ten Woche der Lotterie. [2]

Die w-te Woche ist die erste Woche, in welcher der Spieler voraussichtlich die Gewinnschwelle überschreitet. Ryan weiß, dass, wenn er in der w-ten Woche ein Lotterielos kauft, sein erwarteter Gewinn p $ beträgt.

(d) Finden Sie den Wert von p. [7]

Quellen:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.