Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 1

Jeudi 6 mai 2021 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2221 – 7116

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

Considérez deux entiers positifs consécutifs, n et $n+1$.

Montrez que la différence de leurs carrés est égale à la somme de ces deux entiers.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Note maximale : 7]

Résolvez l'équation $2\cos^2 x + 5\sin x = 4$, $0 \le x \le 2\pi$.

3. [Note maximale : 5]

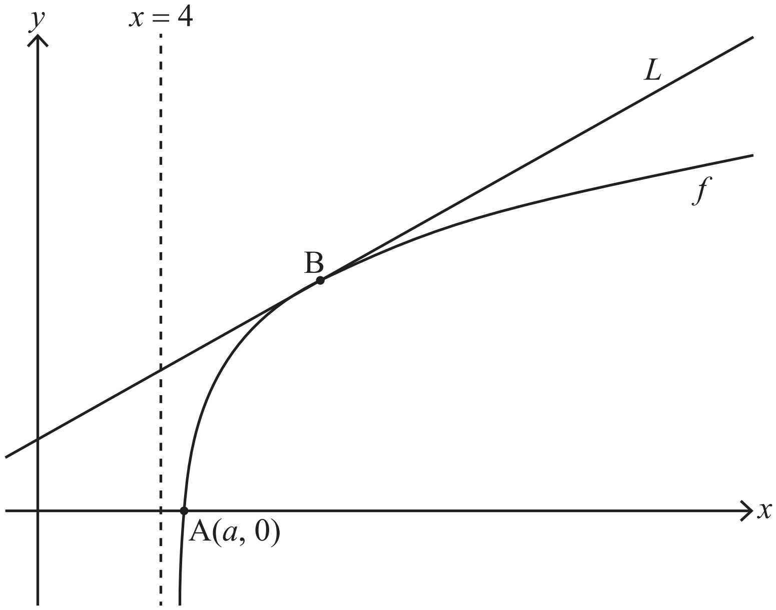
Dans le développement de $(x+k)^7$, où $k \in \mathbb{R}$, le coefficient du terme en x^5 est 63.

Trouvez les valeurs possibles de k.

4. [Note maximale : 9]

Considérez la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 16)$ pour $x > 4$.

Le diagramme suivant montre une partie de la représentation graphique de f qui coupe l'axe des abscisses au point A, dont les coordonnées sont $(a\ ;\ 0)$. La droite L est la tangente à la représentation graphique de f au point B.



(a) Trouvez la valeur exacte a. [3]

(b) Étant donné que la pente de L est $\frac{1}{3}$, trouvez l'abscisse de B. [6]

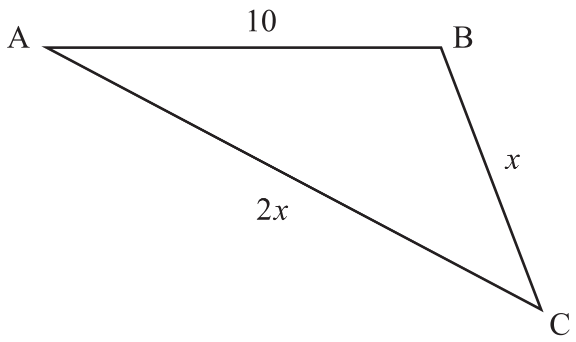
5. [Note maximale : 4]

Étant donné deux vecteurs non nuls quelconques, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, montrez que $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.

6. [Note maximale : 7]

Le diagramme suivant montre le triangle ABC, avec $\mathrm{AB} = 10$, $\mathrm{BC} = x$ et $\mathrm{AC} = 2x$.

le diagramme n'est pas à l'échelle



Étant donné que $\cos \hat{\mathrm{C}} = \frac{3}{4}$, trouvez l'aire du triangle.

Donnez votre réponse sous la forme $\frac{p\sqrt{q}}{2}$, où $p, q \in \mathbb{Z}^{+}$.

7. [Note maximale : 5]

L'équation cubique $x^3 - kx^2 + 3k = 0$, où $k > 0$, possède les racines α, β et $\alpha + \beta$.

Étant donné que $\alpha\beta = -\frac{k^2}{4}$, trouvez la valeur de k.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Note maximale : 8]

Les droites l_1 et l_2 ont les équations vectorielles suivantes, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$l_1 : \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$l_2 : \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrez que l_1 et l_2 n'ont pas de point d'intersection. [3]

(b) Trouvez la distance minimale entre l_1 et l_2. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Note maximale : 7]

En utilisant la substitution $u = \sin x$, trouvez $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \sin x - 2} \mathrm{d}x$.

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

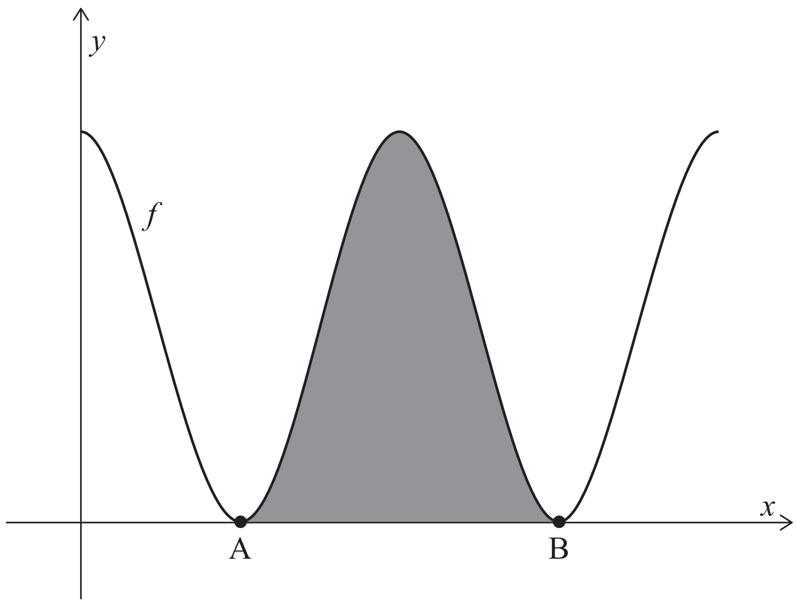
Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 15]

Considérez la fonction f définie par $f(x) = 6 + 6\cos x$, pour $0 \le x \le 4\pi$.

Le diagramme suivant montre la représentation graphique de $y = f(x)$.



La représentation graphique de f touche l'axe des abscisses aux points A et B, tel que montré dans le diagramme. La région grisée est délimitée par la représentation graphique de $y = f(x)$ et par l'axe des abscisses, entre les points A et B.

(a) Trouvez les abscisses de A et B. [3]

(b) Montrez que l'aire de la région grisée est 12π. [5]

(Suite de la question à la page suivante)

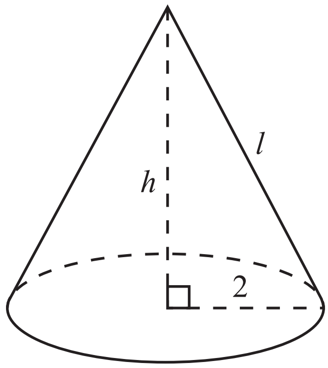
N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 10)

L'aire de la surface totale du cône droit dans le diagramme suivant est 12π, ce qui est égal à l'aire de la région grisée dans le diagramme précédent.

Le rayon de la base du cône est 2, sa hauteur est h, et son apothème (sa hauteur oblique) est l.

le diagramme n'est pas à l'échelle



(c) Trouvez la valeur de l. [3]

(d) À partir de là, trouvez le volume du cône. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 20]

L’accélération, $a\,\text{ms}^{-2}$, d’une particule se déplaçant sur une droite horizontale au temps t secondes, $t \geq 0$, est donnée par $a = -(1+v)$, où $v\,\text{ms}^{-1}$ est la vitesse algébrique de la particule et $v > -1$.

Lorsque $t = 0$, la particule se trouve sur une origine fixe O et sa vitesse algébrique initiale est $v_0\,\text{ms}^{-1}$.

(a) En résolvant une équation différentielle appropriée, montrez que la vitesse algébrique de la particule au temps t est donnée par $v(t) = (1+v_0)\text{e}^{-t} - 1$. [6]

(b) Initialement en O, la particule se déplace dans la direction positive jusqu’à ce qu’elle atteigne son déplacement maximal à partir de O. La particule revient ensuite à O.

Soit s mètres le déplacement de la particule à partir de O et $s_{\max}$ son déplacement maximal à partir de O.

(i) Montrez que le temps T pris par la particule pour atteindre $s_{\max}$ satisfait l’équation $\text{e}^{T} = 1 + v_0$.

(ii) En résolvant une équation différentielle appropriée et en utilisant le résultat de la partie (b) (i), trouvez une expression pour $s_{\max}$ en fonction de v_0. [7]

Soit $v(T-k)$ la vitesse algébrique de la particule k secondes avant qu’elle atteigne $s_{\max}$, où

$$v(T-k) = (1+v_0)\text{e}^{-(T-k)} - 1\,.$$

(c) En utilisant le résultat de la partie (b) (i), montrez que $v(T-k) = \text{e}^{k} - 1$. [2]

De façon similaire, soit $v(T+k)$ la vitesse algébrique de la particule k secondes après avoir atteint $s_{\max}$.

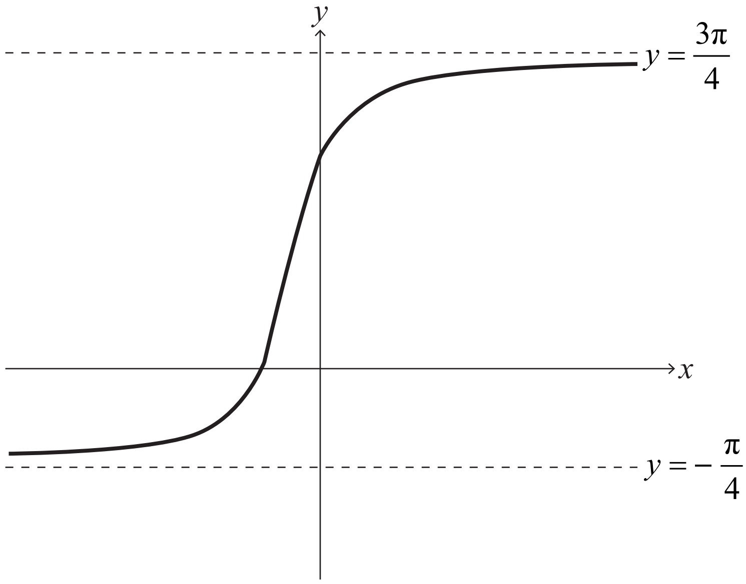
(d) Déduisez une expression similaire pour $v(T+k)$ en fonction de k. [2]

(e) À partir de là, montrez que $v(T-k) + v(T+k) \geq 0$. [3]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 19]

Le diagramme suivant montre la représentation graphique de $y = \arctan(2x+1) + \frac{\pi}{4}$ pour $x \in \mathbb{R}$, ayant comme asymptotes $y = -\frac{\pi}{4}$ et $y = \frac{3\pi}{4}$.



(a) Décrivez une suite de transformations qui transforment la représentation graphique de $y = \arctan x$ en la représentation graphique de $y = \arctan(2x+1) + \frac{\pi}{4}$ pour $x \in \mathbb{R}$. [3]

(b) Montrez que $\arctan p + \arctan q \equiv \arctan\left(\frac{p+q}{1-pq}\right)$, où p, $q > 0$ et $pq < 1$. [4]

(c) Vérifiez que $\arctan(2x+1) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{\pi}{4}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. [3]

(d) En utilisant la récurrence et le résultat de la partie (b), prouvez que $\sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2r^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$ pour $n \in \mathbb{Z}^+$. [9]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.