

Tle C	INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES (Initiation à l'arithmétique)	Durée :
-------	---	---------

EXERCICE 1 : 2,5 Points

- Écrire la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 50
- Le nombre 1517 est-il premier ?
- Déterminer tous les entiers naturels a et b vérifiant l'égalité $a^2 = b^2 + 1517$

EXERCICE 2 : 5,5 Points

On pose pour tout entier naturel n , $S_n = 2^n + 5^n + 7^n$

- Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que S_n soit un nombre premier
- Reproduire et compléter le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de 2^k par 9						
Reste de la division de 5^k par 9						
Reste de la division de 7^k par 9						

- Déterminer le plus petit entier non nul k tel que S_k soit divisible par 9.
- Montrer que 9 divise $S_{n+6} - S_n$
- Soit r le reste de la division euclidienne de n par 6. Démontrer que $S_n \equiv S_1(9)$
- Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles S_n est multiple de 9.

EXERCICE 3 : 4 Points

On définit la suite (U_n) par $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 2U_n - 3$

- On pose $V_n = U_n - 3$. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n .
- Déterminer toutes les valeurs de n telles que $3^{U_n} - 1$ soit un multiple de 11

EXERCICE 4 : 3 Points

On se propose de résoudre l'équation (E) : $3x^2 - 7y^2 = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

- On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie $3x^2 - 7y^2 = 4$.
Démontrer que $y^2 \equiv 2(3)$
- Soit a un entier relatif, quelles sont les restes possibles de la division de a^2 par 3 ?
- Quel est l'ensemble solution de l'équation (E) ?

EXERCICE 5 : 5 Points

On admet que : si un nombre premier divise un produit de facteurs alors il divise l'un des facteurs du produit.

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits en base 10 sous la forme $abba$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un entier quelconque. Le but de l'exercice est de déterminer le **nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.**

- Quel est le nombre d'éléments de E ?
 - Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers
 - Démontrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
- Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisible par 2 ni par 5 ?
 - Montrer qu'un élément de (E) est divisible par 3 si et seulement si $a + b$ est divisible par 3
 - Montrer qu'un élément de (E) est divisible par 7 si et seulement si b est un multiple de 7
- Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.