COLLEGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMEE — Année scolaire 2006 / 2007

4ème Séquence / Mars 2007

Tle C	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair .

Exercice 1 (5 points)

On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1$.
où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que (x_0, y_0) est une solution de (E).
   a) Démontrer que x_0 et y_0 sont premiers entre eux. 0,25 pt
   b) Prouver que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité. 0,5 pt
   c) Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$. 0,5 pt
2. Calculer $1 + 5y^2$ pour $1 \leq y \leq 4$. 0,25 pt
   En déduire un couple (x_0, y_0) solution de (E). 0,25 pt
3. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que : $\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$. 1 pt
   b) Donner a_1 et b_1. 0,25 pt
   Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . 0,25 pt
   c) À l'aide d'une récurrence sur n, $n \geq 1$, montrer que les couples (a_n, b_n), sont solutions de (E). 1 pt
   (il s'en suit donc que les nombres a_n et b_n sont premiers entre eux)
   d) En calculant $\dfrac{1}{9 + 4\sqrt{5}}$ et $\dfrac{1}{a_n + b_n\sqrt{5}}$, montrer que $\left(9 - 4\sqrt{5}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{5}$.
   En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n. 0,75 pt

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère trois cercles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 de même rayon et de centres respectifs M, N et P. Ces trois cercles sont concourants en un point K et se coupent deux à deux en A , B et C tels que :

- Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et K
- Γ_2 et Γ_3 se coupent en B et K
- Γ_1 et Γ_3 se coupent en C et K

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. 1 pt
2. On pose $r_1 = S_{(KB)} \circ S_{(KA)}$; $r_2 = S_{(KP)} \circ S_{(KC)}$; $f = S_{(KB)} \circ S_{(KA)} \circ S_{(KC)}$.
   a) Déterminer <u>la nature</u> de chacune des transformations r_1 et r_2 . 0,5 pt
   b) Déterminer $r_1(M)$ et $r_2(M)$; que peut on en déduire ? 0,75 pt
   c) En déduire que f est une réflexion dont on donnera l'axe. 0,5 pt
3. a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}}) = (\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KP}})$ $[\pi]$ et écrire (sans le démontrer) deux relations semblables. 0,75 pt
   b) Vérifier que $(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{BC}}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$. 0,5 pt
   c) En déduire que K est l'orthocentre du triangle ABC. 0,5 pt
4. Soient Γ_4 et Γ_5 les deux cercles circonscrits respectivement aux tringles ABC et MNP.
   Montrer que les cinq cercles Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 et Γ_5 sont de même rayon. 0,5 pt

Problème (10 points)

I.

1. Soit h la fonction définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par : $h(x) = x - \ln x$
   a) Etudier les variations de h — 1 pt
   b) En déduire que pour tout x de $]0\ ,\ +\infty[$, on a : $h(x) \geq 1$ — 0,25 pt
2. Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$
   a) Montrer que f est continue sur $[0\ ,\ +\infty[$ — 0,5 pt
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0 — 0,75 pt

II.

Soit F la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

1. a) Montrer que f est dérivable sur $[0\ ,\ +\infty[$ — 0,5 pt
   b) Montrer que pour tout x de $]0\ ,\ +\infty[$, on a : $F'(x) = \dfrac{\ln 2 - \ln x}{h(2x) \times h(x)}$ et que $F'(0) = 0$ — 1 pt
2. Montrer que pour tout x de $]0\ ,\ +\infty[$, on a : $\int_x^{2x} \dfrac{1}{t}dt = \ln 2$ — 0,25 pt
3. Montrer que pour tout x de $[1\ ,\ +\infty[$, on a : $0 \leq F(x) - \ln 2 \leq \dfrac{\ln 2x}{x - \ln x}$ — 0,5 pt
   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ — 0,25 pt
4. a) Montrer que : $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq \ln 2$ — 0,25 pt
   b) Montrer alors qu'il existe un réel α de $\left[\dfrac{1}{2}\ ,\ 1\right]$ tel que $F(\alpha) = \ln 2$ — 0,25 pt
5. a) Dresser le tableau de variation de F — 0,5 pt
   b) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on donne $F(1) \approx 0{,}9$, $F(2) \approx 1{,}1$) — 0,5 pt

III.

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul

1. Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{t}{t - \ln t}dt$
   a) Montrer que pour tout t de $]0\ ,\ +\infty[$, $\dfrac{t}{t - \ln t} \leq t$ — 0,5 pt
   b) Montrer que la suite (V_n) est croissante — 0,5 pt
   c) En déduire que la suite (V_n) est convergente et que $0 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} V_n \leq \dfrac{1}{2}$ — 0,75 pt
2. Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \int_1^n \dfrac{t}{t - \ln t}dt$
   a) Montrer que pour tout t de $[1\ ,\ +\infty[$, $\dfrac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t$ — 0,5 pt
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $W_n \leq n \ln(n)$ — 0,5 pt
   b) Calculer $\int_1^n \left(1 + \dfrac{\ln t}{t}\right)dt$ puis montrer que — 0,75 pt
   pour tout entier naturel tel que $n \geq 5$, $n \leq W_n \leq n \ln(n)$ — 0,5 pt
   c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} W_n$ — 0,5 pt