COLLEGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMEE Année scolaire 2006 / 2007

2ère Séquence / Novembre. 2006

Tle C	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES (02)	Durée : 4H

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair .

Exercice 1 (3,5 points)

Les questions 1°) , 2°) et 3°) sont indépendantes.

1. p et q désignent deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$
   a) Démontrer que p est impair. 0,5 pt
   b) Démontrer que q est pair. 0,5 pt

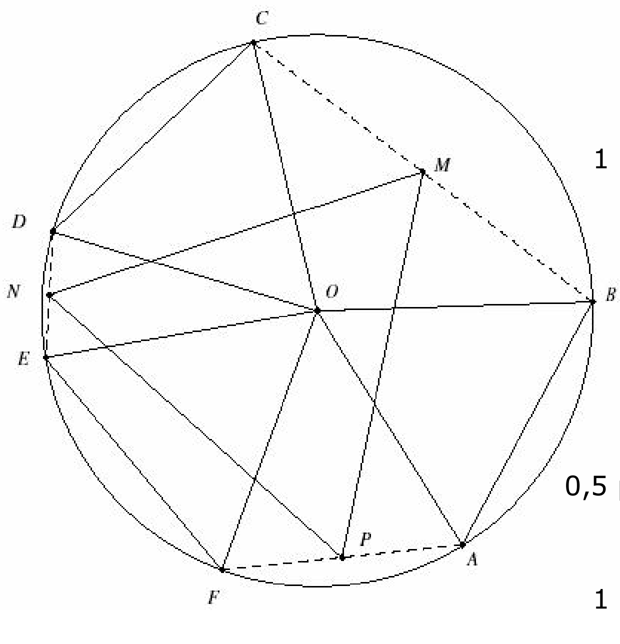
2. Soit un entier naturel M s'écrivant $\overline{abccba}$ dans le système décimal.
   a) Montrer que M est un multiple de 11 0,5 pt
   b) Déterminer a et c tels que $\begin{cases} M \equiv 0\ [5] \\ M \equiv 0\ [7] \end{cases}$ 0,75 pt
   En déduire que M est un multiple de 35 0,25 pt
   Déterminer b pour que M soit un multiple de 3. 1 pt

Exercice 2 (4 points)

PREMIERE PARTIE

On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes de j : 1 pt
   (a) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $j^3 = 1$
   (c) $1 + j + j^2 = 0$ (d) $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$.
2. Dans un repère orthonormal direct du plan, on considère les points M, N, P d'affixes respectives m, n, p.
   a) Montrer que, si le triangle MNP est équilatéral direct, alors $m - n = -j^2(p - n)$. 0,5 pt
   b) Etablir la propriété suivante :
   Le triangle MNP est équilatéral direct si, et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$. 1 pt



DEUXIEME PARTIE

On considère un cercle du plan de centre O et des points A, B, C, D, E, F de ce cercle tels que les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ aient la même mesure $\frac{\pi}{3}$.

Soit M, N, P les milieux respectifs des cordes $[BC]$, $[DE]$, $[FA]$.
Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct. 1,5 pt

Exercice 3 (3 points)

Une unité de longueur a été choisie. Soit ABC un tringle équilatéral de côté 3,

B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1. Démontrez que D est barycentre du système : $\{$ (A;3) , (B;-2) , (C;3) $\}$ 0,5 pt

   Déduisez-en que D appartient à la médiatrice de [AC] 0,25 pt

2. Démontrez que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$ 0,25 pt

3. Calculez DA^2 et DB^2 0,75 pt

4. Déterminez l'ensemble (E) de points M tels que : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$ 0,75 pt

   Vérifiez que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E). Tracez (E) 0,5 pt

Exercice 4 (3,5 points)

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

(E): $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

1. Soit z une solution de (E) :

Montrer que $|1+iz| = |1-iz|$ **0,5 pt**

En déduire que z est réel **0,5 pt**

2. a) Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$ **0,5 pt**

b) Soit z un réel, on pose z = $\tan\theta$, avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que (E) équivaut à une équation d'inconnue θ , et la résoudre. **1 pt**

c) Déterminer les solutions z_1 , z_2 , z_3 de (E) **1 pt**

Exercice 4 (6 points)

Partie A.

Soi la fonction $\varphi : x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

1. Démontrer que $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\varphi(\tan t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2}$ 0,5 pt

2. En déduire le signe de $\varphi(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}$ 0,5 pt

> On rappelle que la fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection (de référence) de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$

Partie B.

Soit f la fonction $x \mapsto -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan

3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ 0,25 pt + 0,5 pt
   b) Calculer f'(x) 0,5 pt
   c) Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f 0,75 pt
   b) Etudier les branches infinies de ($\mathscr{C}$) et préciser la position relative de (C) par rapport à ses asymptotes. 1,5 pt
4. Construire ($\mathscr{C}$) 0,75 pt
5. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on précisera 0,5 pt
   b) Construire la courbe ($\mathscr{C}$') de f^{-1} (On expliquera la construction) 0,5 pt