

Tle C

DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES (01)

Durée : 3 Heures

Instructions :

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.

La rédaction est importante. Soyez propre et clair. (Cette dernière rubrique est noté sur 1 pt = bonus)

Exercice 1 (4 points) / ≅ 30 min

Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 1,5 pt
2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$
 - a) Justifier que pour tout $x \in D_f$, $g(x) = 2 \frac{\sin f(x)}{f(x)}$ 0,5 pt
 - b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 0,5 pt
 - c) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \sin(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})]$ 1,5 pt

Exercice 2 (4 points) / ≅ 30 min

Soit f la fcton définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

1. Calculer $f(-1)$; $f(-\frac{1}{2})$; $f(0)$; $f(1)$ 1 pt
2. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions distinctes, comprises entre -1 et 1 1 pt
3. Posons $x = \cos \alpha$
 - a) Exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos \alpha$ 0,5 pt
 - b) Déterminer les solutions de l'équation $f(x)=0$ 1,5 pt

Exercice 3 (4 points) / ≅ 30 min

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' ont le même centre de gravité.

On considère le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ et soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectifs des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. 1 pt
2. a) Montrer que $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b . 1 pt
 - b) Calculer $p' + q' + r'$ en fonction de a, b et c 0,5 pt

puis en déduire que les triangles ABC et P'Q'R' ont le même centre de gravité G d'affixe g . 0,5 pt
3. Exprimer chacun des complexes p, q et r en fonction de a, b et c 0,5 pt

puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G. 0,5 pt

Exercice 4 (8 points) / \cong 60 min

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}$ 0,5 pt

En déduire le tableau de variation de f sur \mathbb{R}^* (on fera apparaître le calcul des limites) 1 pt

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Calculer U_1 et U_2 .

On donnera les résultats sous forme de fraction puis sous forme décimale arrondis à 10^{-5} près 1 pt

b) Démontrer par récurrence que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} < U_n \leq \frac{3}{2}$ 1 pt

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} < U_n$ 1 pt

Il résulte des questions précédentes que la suite (U_n) est décroissante et minorée.
Nous établirons plus tard que de telles suites sont convergente et de limite l solution de l'équation $f(x) = x$

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et en déduire la limite l de la suite (U_n) 1 pt

4. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{2})$ 1 pt

b) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - \sqrt{2})$ 1 pt

c) En déduire de nouveau la limite de la suite (U_n) 0,5 pt

" La vie est un long fleuve tranquille " a dit quelqu'un .

Tranquille, tu parles !!!
Un torrent furieux, oui!

