Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H
-------	---------------------------------	------------

EXERCICE 1 : 2,5 Points

- Soit x un réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
- Pour tout entier non nul n , on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$ où $n!$ désigne factoriel n .
 - Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.
 - En déduire que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.
 - Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 : 2,5 Points

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par :
 $G(x) = (x + 2)e^{-x}$; (Γ) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$; Unité sur les axes : 2 cm.

- Etudier la fonction g .
 - Tracer (Γ) .
- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (Γ) , la droite d'équation $y = x + 2$, Les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

EXERCICE 3 : 5 Points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

- s est l'application du plan qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$$

Montrer que s est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.

- On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = -2x + 1$.
 - Déterminer les coordonnées du foyer de (P) et une équation de la directrice (D) .
 - Ecrire l'équation de la tangente au A de coordonnées $(0, 1)$.
 - tracer (P) .
 - Donner l'équation de la parabole (P') image de (P) par s .
- Soit M un point de (P) , H le projeté orthogonal de M sur (D) , I le milieu du segment $[OH]$, B le point d'affixe 1 et C le point d'affixe 2.
 - Montrer $(\vec{MI}, \vec{MH}) = (\vec{HO}, \vec{HB}) (\pi)$.
 - En déduire que $(\vec{MO}, \vec{MH}) = (\vec{HO}, \vec{HC}) (2\pi)$.
- On choisit $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $(\vec{MO}, \vec{MH}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On désigne par z et h les affixes respectives de M et H .
 - Montrer que $\frac{z - h}{z} = \frac{h - 2}{h} = e^{i\theta}$
 - En déduire que $z = \frac{2}{(1 - e^{i\theta})^2}$

EXERCICE 4 : 4 Points

Dans le plan orienté, on considère un cercle (C) de Ω ; A, B et O trois points de (C) tels que $(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{4}$; I est le point diamétralement opposé à B sur (C).

1. s est la similitude directe de centre I qui transforme A en B.
 - a. Déterminer l'angle de s.
 - b. Donner la nature du triangle IAB et préciser le rapport de la similitude s.
2. On appelle G le point défini par la relation $\overline{GA} = -\frac{1}{2}\overline{GB}$. La droite (IG) recoupe (C) en K. On appelle s' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
 - a. Déterminer l'angle de la similitude de s'.
 - b. Montrer que $\overline{KA.KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2} KA \times KB$.
 - c. H désigne le projeté orthogonal de A sur la droite (BK). Exprimer $\overline{KH}$ en fonction de $\overline{KB}$.
 - d. En déduire que $\overline{KA.KB} = -\frac{1}{2} KB^2$.
 - e. Déterminer le rapport de la similitude s'.

EXERCICE 5 : 6 Points

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O,I,J).

1. Etudier les variations de f_1 et f_2 (préciser les limites aux bornes et les asymptotes).
2. Préciser les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$. Puis tracer les deux courbes.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int f_n(x)dx$.
 - a. On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$ et en déduire I_1
 - b. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n + 1)I_n$.
 - c. Calculer I_2 puis l'aire du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq I_n \leq 1$.
 - c. En déduire la limite en $+\infty$ de $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.