BAC BLANC DEPARTEMENTAL **Série D – Coef. : *4***

SESSION MARS 2021 **Durée : *4 h***

MATHEMATIQUES

Série D

Cette épreuve comporte quatre pages numérotés 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Le candidat utilisera une feuille de papier millimétré
La calculatrice scientifique est autorisée
La table trigonométrique est autorisée

EXERCICE 1 *(2 points)*

Pour chacune des informations ci-dessous, indiquer son numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N	Affirmations	A	B	C
1	Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ alors	(C_f) admet une demi-tangente horizontale	(C_f) admet une asymptote en $+\infty$	(C_f) admet une demi-tangente verticale
2	$\lvert -1-4i\rvert$ est égale à	$\sqrt{5}$	$\sqrt{17}$	$-\sqrt{17}$
3	Soit z un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors	$\lvert z\rvert^2=-y^2$	$\lvert z\rvert^2=y^2$	$\lvert z\rvert^2=z^2$
4	Soit x et y deux élement de $[0;+\infty[$. On a $x^n=y$ est équivaut à	$x=\sqrt[\frac{1}{n}]{y}$	$x=\sqrt[n]{y}$	$x=y^{-\frac{1}{n}}$

EXERCICE 2 *(2 points)*

Ecrire le numéro de chaque affirmation suivie de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse.

	Enoncé
1	$\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$
2	X étant une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$ et $E(X)$ étant noté m : On appelle écart-type de X le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ tel que $\sigma(X)=\sqrt{x_1^2p_1+x_2^2p_2+\cdots+x_n^2p_n-m^2}$
3	Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. D'après le théorème des accroissements finis sur $[a;b]$, $\lvert\sin b-\sin a\rvert\leq\lvert b-a\rvert$
4	Les primitives de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2x^4}$ sur $]-\infty;0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^3}+c$ $(c\in\mathbb{R})$.

EXERCICE 3 *(4 points)*

Dans tout cet exercice on donnera la valeur exacte de chaque résultat.
Grace à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de sortir pour le saisir :

- S'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas ;
- S'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux de l'une de ces bornes :

- Lorsqu'un camion passe, il n'est correctement détecté que deux fois sur trois ;
- Lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint d'en sortir pour saisir son ticket une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage 60% des véhicules sont des camions. On considère les évènements suivants :

- C : « Le véhicule qui se présente est un camion »
- H : « Le ticket sort en haut »
- B : « Le ticket sort en bas ».

1- a) Donne les probabilités : $P(C)$; $P_C(H)$ et $P_{\overline{C}}(H)$.
   b) Construis un arbre probabiliste présentant la situation
   c) Calcule la probabilité que le ticket sort en haut.

2- Démontre que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de sortir de son véhicule pour saisir le ticket vaut 0,7.

3- Trois véhicules se présentent l'un après l'autre à cette borne de péage défectueuse. On modélise cette situation comme un tirage avec remise.
   Calcule la probabilité qu'au moins l'un des conducteurs soit contraint de descendre de son véhicule pour saisir son ticket.

EXERCICE 4 *(3 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

1- On considere l'équation : $(E)\quad z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$
   a) Justifie que le nombre réel 2 est une solution de l'équation (E).
   b) Détermine deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :$(z-2)(z^2 + az + b) = 0$
   c) Résous (E)

2- On note (Γ) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2$$

   Soit x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z du point M.
   Montrer que M appartient à (Γ) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

3- Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives

$$a = 2 \quad ; \quad b = -3 - i\sqrt{5}\ ; \quad c = -3 + i\sqrt{5}$$

   Justifie que les points A, B et C appartiennent à (Γ)

EXERCICE 5 *(4 points)*

Soit f une fonction définie $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ *. On désigne par* (C_f) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) et* (C_h) *celle de la fonction h définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $h(x) = \frac{1}{x}$ *(Unité graphique : 2cm).*

1- a) Calcule la limite de $f(x)$ en $+\infty$ et à droite en 0.

b) Déduis que (C_f) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

2- a) Justifie que $\forall\, x \in\,]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$

b) Etudie le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3- Pour tout $x \in\,]0;+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$ dont le tableau de variation est donné

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 1$	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 0$

a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2;+\infty[$.

b) Justifie que $\begin{cases} \forall\, x \in\,]0;1[\, \cup\,]\alpha;+\infty[, & g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\,]1;\alpha[, & g(x) > 0 \end{cases}$

4- a) Démontre que $\forall\, x \in\,]0;+\infty[,\ f(x) - h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

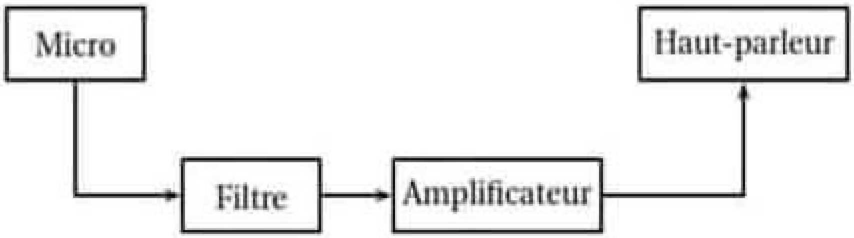
b) Justifie que (C_f) et (C_h) se coupent en deux points puis en déduire la position relative de (C_f) par rapport à (C_h).

c) Construis les courbes (C_f) et (C_h) et les éventuelles asymptotes.

(On prendra $\alpha \approx 3{,}5$*)*

EXERCICE 5 ***(5 points)***

A l'approche des fêtes de Pâques, un responsable d'une structure de sonorisation, se rend en ville avec son fils pour acheter des microphones, des filtres, des amplificateurs et des haut-parleurs. Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres. Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).



Dans le magasin où rentre le responsable de sonorisation, on peut lire comme indicatif sur le filtre :

- Son grave de fréquence $f = 100$: $Z_R = 10$.
- Son aigu de fréquence $f = 1000\sqrt{3}$: $Z_R = 10$.

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide des deux nombres complexes Z_R et Z_C tel que $Z_C = -\frac{1000\sqrt{3}}{f}i$

Le gain du filtre est donné par le nombre complexe Z_G défini par : $Z_G = \frac{Z_C}{Z_R+Z_C}$

La valeur exacte du gain du filtre est déterminée par le module du nombre complexe Z_G.

Un filtre est en bon état lorsque le gain du filtre d'un son grave est supérieur à celui d'un son aigu.

Le responsable veut acheter un filtre de bonne qualité. Pour cela, il décide de tester le filtre mais malheureusement il y'a coupure de courant. Ce dernier te rencontre et sollicite ton aide.

Vérifie la qualité du filtre à l'aide de calcul afin de répondre à la préoccupation du monsieur.