Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2010
Série : $C-E$
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 5(C)/ 4(E)

L'épreuve comporte sur deux pages, trois exercices et un problème, tous obligatoires.

Exercice 1 (3.5 points)**.** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).(Unité d'axe : 1,5 cm). On considère l'équation d'inconnue z ;
(E) : $z^3-7iz^2-15z+25i=0$ définie dans $\mathbb{C}$.

1. (a) Montrer que l'équation (E) admet le nombre complexe $z_0=5i$ comme solution. [0,25pt]
   (b) Résoudre l'équation (E). [1pt]
2. On considère les points A,B et C d'affixes respectives $2+i$;$5i$;-2+i. La droite (D) d'équation $y=2$ rencontre la droite (AB) en K et la droite (OA) en L. Γ et Γ' sont les crcles circonscrits aux triangles OAB et ALK respectivement.Soit S la similitude plane directe qui transforme B en O et K en L; soit Ω le centre de S.
   (a) Montrer que Ω appartient à Γ et Γ' et qu'il est distinct de A. [1pt]
   (b) Donner l'écriture complexe de S et en déduire l'affixe de Ω. [1,25pt]

Exercice 2 (3 points)**.** $(O, \overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,)$ est un repère du plan. On appelle (E) la conique de foyer O de directrice (Δ),(Δ) : y=2 et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que (E) a pour équation $12X^2+9Y^2=16$ Par rapport à un répère que l'on précisera.Quelle est la nature de (E) ? [1pt]
2. Soit ϕ l'application qui à tout point M de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' tels que : $\begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.
   (a) Donner une équation cartésienne de l'image (E') de (E) par ϕ. [1pt]
   (b) Construire (E) et (E'). [1pt]

Exercice 3 (3.5 points)**.** Sur la figure ci-dessous, $CABD$ est un tétraèdre régulier(toutes les faces sont des triangles équilatéraux) ; G et H sont des points tels que : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et L le milieu du segment $[CD]$.

1. Montrer que les droites (GH)et (AB) sont sécantes en un point qu'on appellera I. [0,5pt]
   $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs unitaires ,respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$. On suppose que l'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\,)$ et que $AC=4$.
2. Déterminer les coordonnées des points G,H et I, dans le repère $(A, \overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\,)$. [1,25pt]
3. Soit E l'espace vectoriel associé à l'espace affine ci-dessus ;$(\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\,)$ est une base de E. f est l'endomorphisme de E tel que $f(\overrightarrow{i}\,)=\overrightarrow{j}$,$f(\overrightarrow{j}\,)=-2\overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{k}\,)=\overrightarrow{k}$.
   (a) Justifier que f n'est pas un isomorphis de E. [[0,25pt]]
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f ; on donnera une base pour chacun d'eux. [1,5pt]

Problème :(10.points)
Le problème comporte deux parties A et B.
Partie A(7points)
I. Soient les équations différentielles (E) : $y'+y=0$ et (E') : $y'+y=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-2$.

1. Montrer qu'il existe une fonction h définie par $h(x)=pe^{-\frac{x}{2}}+q$ solution de (E'),p et q étant des nombres réels que l'on déterminera . [0,5pt]

2. Montrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E). [0,5pt]
3. Résoudre (E), puis en déduire les solutions de (E'). [1pt]

II. Soit la fontion numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2$. (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ (unité sur les axes : 1cm).

1. Montrer que la fonction f vérifie l'équation (E')ci-dessus. 0,25pt
2. Etudier les variations de f,puis dresser son tableau de variation. [1,5pt]
3. (a) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f). [0,5pt]
   (b) Tracer la courbe (C_f). [1,25pt]
4. (a) Calculer le réel $A(\alpha) = \int_{\ln 4}^{\alpha} [-2 - f(x)]\,dx$ où α est un réel supérieur à $\ln 4$. [1pt]
   (b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$. Interpréter géométriquement le resultat obtenu. [0,5pt]

Partie B :(3points)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} + u_n = -\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} - 2$ (1)

1. Determiner une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par : $a_n = be - \frac{n}{2} + c$ telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1). (b et c étant des nombres réels). [1pt]
2. On poose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - a_n$.Montrer que la suite géométrique dont on déterminera le premier terme et raison . [0,75pt]
3. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. [0,5pt]
4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   Calculer S_n en fonction de n ;la suite (S_n) est-elle convergente ? [0,75pt]