Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat 2011
Série : $C-E$
Epreuve : MATHEMATIQUES
Durée : 4h Coefficient : 5(C)/ 4(E)

L'épreuve comporte sur deux pages, trois exercices et un problème, tous obligatoires.

Exercice 1 (3points)**.** Pour tout entier naturel n, on considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x$.

1. En utilisant une intégration par parties montrer que $2I_n + nJ_n = 2$ et $nI_n - 2J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}$. [1.5pt]
2. Déduire de **1.** les expressions de I_n et J_n en fonction de n, pour tout entier naturel n. [1pt]
3. Les suites (I_n) et (J_n) sont elles convergentes ? [0.5pt]

Exercice 2 (3 points)**.** L'espace est muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). On donne les points $A(-1,2,1)$; $B(1,-6,-1)$; $C(2,2,2)$; $I(0,1,-1)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. [0.5pt]
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les points A, B et C. [0.5pt]
2. (a) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de I sur le plan (P). [0.75pt]
   (b) (S) est la sphère de centre I et de rayon 3 ; déterminer l'intersection du plan (P) et de la sphère (S). [1.25pt]

Exercice 3 (4 points)**.** Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6cm$. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; r_2 est la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$, r_2^{-1} est la transformation réciproque de r_2.
Si M est un point du plan, on note M_1 l'image du point M par r_1 et M_2 l'image du point M par r_2.

1. On pose $f = r_1 \circ r_2^{-1}$.
   (a) Montrer que f est une symétrie centrale et déterminer $f(M_2)$. [0.75pt]
   (b) En déduire que le milieu I du segment $[M_1M_2]$ est le centre de la symétrie f. [0.5pt]
2. On suppose que A et B ont pour affixes respectives -3 et $+3$; on note z, z_1 et z_2 les affixes respectives des points M, M_1 et M_2.
   (a) Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z. [1pt]
   (b) Montrer que si M est distinct de A et de B, on a : $\dfrac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{3}\frac{z-3}{z+3}$. [0.75pt]
   (c) En déduire que : $(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) \equiv (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$. [0.5pt]
   (d) Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés. [0.5pt]

Problème :(10.points)
On considère la famille de fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$ où λ est un réel non nul ; ln désigne le logarithme népérien, (C_λ) la courbe de f_λ et (D) la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Partie A : 4points. *Recherche des points d'intersection de* (C_λ) *et* (D)

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_λ. [0.5pt]
   On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.
2. On suppose $\lambda < 0$. Etudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations. En déduire le nombre de points d'intersection de (C_λ) et (D). [1pt]

3. (a) On suppose $\lambda > 0$. Etudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations. Etablir que la plus grande valeur prise par φ_λ quand x décrit l'ensemble de définition est $m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln\lambda$. [1pt]
   (b) Etudier les variations de m sur $]0;+\infty[$; en déduire le signe de $m(\lambda)$. [1pt]
   (c) Déterminer le nombre de points communs à (C_λ) et (D) lorsque λ est positif. [0.5pt]

Partie B : 2.75points. *Etude du cas particulier* $\lambda = 1$.

1. (a) Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithme népérien ; trouver une translation qui transforme (Γ) en (C_1). [0.5pt]
   (b) Représenter graphiquement (C_1) et la droite (D). *On prendra pour unité 3cm sur les axes.* [0.75pt]
2. On appelle P et Q les points d'intersection de (C_1) et (D) ; P est le point d'abscisse négative p et Q est le point d'abscisse positive q.
   Démontrer que $2 < q < 3$. [0.75pt]
3. L'unité d'aire étant le cm^2, calculer en fonction de p et q l'aire du domaine compris entre (C_1), (D) et les droites d'équations $x = p$, $x = q$. [1pt]
   On pourra utiliser une intégration par parties.

Partie C : 3points *Valeur approchée de* q.

On se propose de calculer une valeur approchée de q ; on définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Représenter à l'aide de la courbe (C_1) les termes u_1 et u_2 sur $(O, \vec{\imath})$. [0.5pt]
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par q. [0.75pt]
3. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$ pour tout entier naturel n. [0.75pt]
4. En déduire que pour tout entier naturel n : $q - u_n \leq \dfrac{q - u_0}{3^n}$, et que la suite (u_n) converge vers q. [0.75pt]
5. Déterminer une valeur approchée u_k de q à 10^{-2} près en utilisant la suite (u_n). [0.5pt]