MINESEC - OBC

SESSION 2009

Épreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat C/E
Durée : 4 heures
Coefficient : 5 (C) / 4 (E)

L'épreuve comporte trois exercices et un problème

EXERCICE 1. / 04 points (série E uniquement)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A(-4 ; 6 ; -1) ; B(1 ; 2 ; 2) ; C(-1 ; 4 ; 3).

1. a) Démontrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés — 0,5 pt
   b) Calculer l'aire du triangle ABC — 0,5 pt
2. Écrire un équation cartésienne du plan (ABC) — 1 pt
3. Soit I le milieu de [AC], et $D = S_I(B)$ où S_I désigne la symétrie de centre I.
   a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires — 1 pt
   b) Donner la nature du quadrilatère ABCD et puis calculer son aire. — 1 pt

EXERCICE 1 : / 04 Points (série C uniquement)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4, où p est un nombre premier plus grand que 2

1. Exprimer S en fonction de p. — 0,5 pt
2. Démontrer que : $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$. — 0,5 pt
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$, où n est un entier naturel.
   a) Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2) — 0,5 pt
   b) Exprimer n en fonction de p. — 0,5 pt
   c) Établir que p vérifie la relation : $3 + 2p - p^2 = 0$ (on utilisera le fait que $4S = 4n^2$) — 1 pt
   d) Déduire de c) p et puis n. — 0,5 pt

EXERCICE 2 : / 05 Points

Un dé cubique pipé est tel que :
Deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4 et une face est marquée 6.
La probabilité pi d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i

1. Calculer p_2, p_4, p_6. — 1,5 pt
2. On suppose dans la suite que $p_2 = \frac{1}{6}$; $p_4 = \frac{1}{3}$ et $p_6 = \frac{1}{2}$

   On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer et j le résultat du 2ème lancer
   On définit a variable aléatoire X qui au couple (i ; j) associe le nombre i – j

   a) Déterminer l'univers image de X. — 1 pt
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. — 1,5 pt

Problème : 12 points

Le problème comporte trois parties A , B et C obligatoires. La partie C est indépendantes .

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f. 0,75 pt
   b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente T_O en O. 0,75 pt
   c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (C_f). 0,5 pt

2. a) Montrer que f réalise une bijection de IR vers un intervalle I de IR que l'on précisera. 0,5 pt
   b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative.
   Montrer que pour tout x de I, $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 0,5 pt

3. Construire dans le même graphique les courbes (C_f) et (C_g).
   (on prendra 2cm comme unité sur les axes de coordonnées) 1,5 pt

4. Pour tout entier naturel *n* strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par :
   $U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]dx$
   a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel non nul,
   $U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$ 1 pt
   b) Calculer la limite de la suite U_n et interpréter graphiquement le résultat. 0,75 pt

Partie B

5. Soit *S* la symétrie orthogonale d'axe (Δ) : $y = x$ et *T* la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$. On pose : $\varphi = T \circ S$.
   a) Donner la nature de l'application φ. 0,5 pt
   b) Construire l'image par φ de la courbe (C_f). 0,75 pt

6. On considère :
   - les vecteurs : $\vec{e_1} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{e_2} = \vec{i} - \vec{j}$,
   - la droite (Δ') : x - y - 1 = 0,
   - et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ')

   a) Vérifier que le triplet $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ forme un repère orthogonal du plan. 0,25 pt
   b) Montrer que dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$,
   où $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires à $\vec{e_1}$ et à $\vec{e_2}$ que l'on précisera. 0,5 pt
   c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ').
   Montrer que $\vec{V_2} = 2\,\overrightarrow{HH'}$.
   En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$ où T_1 est une translation dont on donnera le vecteur. 1 pt
   d) Montrer que $\varphi = T_1 \circ S'$ 0,25 pt

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit (D) la droite d'équation x = 2. Les points M et F du plan (P) ont pour affixes respectives *z et 1 – i.*

1. Exprimer en fonction de *z,* la distance de M à la droite (D). 0,5 pt
2. On suppose $z + \overline{z} - 4 \neq 0$.

   Pour tout réel m strictement positif, (F_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (Γ_m) suivante : $|z-1+i| = m|\overline{z}+z-4| = 0$.

   a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m). 1 pt

   b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de (Γ_m) 1 pt