ORGANISME INTERGOUVERNEMENTAL

IFORD

UNIVERSITE DE YAOUNDE II

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

Lauréat du Prix des Nations Unies pour la Population 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE MARS 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours type A)

Durée : 4 heures
Date : 28 mars 2012

Documents non autorisés
Calculatrices autorisées

Barème indicatif

Exercice 1 : 2,0 points
Exercice 2 : 3,0 points
Exercice 3 : 3,0 points
Exercice 4 : 2,5 points
Exercice 5 : 3,5 points
Exercice 6 : 2,0 points
Exercice 7 : 4,0 points

IFORD • ✉ BP 1556 – Yaoundé (CAMEROUN) • Email : iford@iford-cm.org • Web : www.iford-cm.org
él. : (+237) 22 22 24 71 / 22 23 29 47 / 22 03 44 12 / 22 22 35 79 • Fax : (+237) 22 22 67 93

Exercice 1.

En démographie le taux de mortalité entre les âges x et x+a (où a est l'amplitude de classe) et le quotient de mortalité pour une génération entre les anniversaires x et x + a sont respectivement définis par les relations ci-après :

$$ {}^{a}T_{x} = \frac{d(x,x+a)}{\frac{S_x + S_{x+a}}{2}} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad {}^{a}Q_{x} = \frac{d(x,x+a)}{S_x} \quad (2) $$

Où $d(x, x+a) = S_x - S_{x+a}$ représente les décès entre x et x +a et S_x les survivants à l'âge x.
Etablir :

1) D'une part une relation qui permet à partir des taux, d'estimer les quotients ?
2) D'autre part une relation qui permet à partir des quotients, d'estimer les taux ?

Exercice 2.

1) Quel est le développement limité de la fonction : $f(x) = (1+x)^n$.
2) Application numérique : on suppose que n = -1, indiquer les développements limités des fonctions f(x) et f(-x).
3) En déduire les développements limités des fonctions $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \ln(1-x)$.

Exercice 3.

On considère la fonction f définie dans R par :

$$ \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} \quad si \quad x \neq -1 \end{cases} $$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en -1.
2) Etudier les variations de la fonction f.
3) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère (O, i, J) orthonormé.

Exercice 4.

En remplaçant p successivement par 0, 1, 2, …, n dans l'identité :

$$ (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1. $$

En additionnant membre à membre les égalités obtenues, calculer en fonction de n :

1) La somme des carrés des n premiers nombres naturels.
2) La somme des cubes des n premiers nombres naturels.

3) Application : on considère la suite u_n définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence : $\forall n \in N, \quad u_{n+1} = u_n + 3n^3 - n^2 + 5$

Calculer u_{n+1} en fonction de n et de u_0.

Exercice 5.

1) Une relation du type $y = ab^{\sqrt{x}}$ existe entre les variables x et y. Déterminer les valeurs de a et de b telles que y = 289 quand x = 12 et y = 573 quand x = 27. Estimer la valeur de y pour x = 37.

2) Une relation du type $y = 1 + (bx)^a$ existe entre les variables x et y telle que, x = 1, y = 5 et, pour x = 3, y = 1,7. Estimer la valeur de y pour x = 2.

3) *Représenter dans un repère orthonormé les courbes des variations des deux fonctions f* et g définies par :

$$f(x) = 0,5 - x^2 \quad et \quad g(x) = x^2 - 2x - 1.$$

4) Calculer l'aire comprise entre les deux courbes.

1 -
1 + 2 - 1
4 - 4 - 1
9 - 2 × 3 - 1
4 + 4 - 1 = 7
9 - 6 - 1
-7 4,5
4/5 - 4,5
-(-0,1666 + 0,5
1,8334
-4,5

Exercice 6.

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice N de $M_3(R)$ telle que $A = 2I_3 + N$.

2) Calculer N^2 et N^3. Que conclure sur la matrice A.

Exercice 7.

On pose pour tout entier naturel $n \geq 0$: $P_n(x) = x^{2n+1} + x - 1$.

1) Montrer que P_n admet une unique solution réelle notée u_n.

2) Montrer que : $0 < u_n < 1$.

3) Comparer $P_{n+1}(u_{n+1}) \quad et \quad P_n(u_{n+1})$.

4) En déduire que la suite (u_n) est croissante et convergente.

5) On note λ sa limite, montrer que $\lambda = 1$.