ORGANISME INTERETATIQUE

UNIVERSITE DE YAOUNDE II

IFORD

INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'AVRIL 2010

28 – 29 AVRIL 2010

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours type A)

Durée : 4 heures

Documents non autorisés
Utilisation des calculatrices autorisée

BAREME INDICATIF

Exercice 1 : 2,5 points
Exercice 2 : 2,5 points
Exercice 3 : 2,0 points
Exercice 4 : 3,0 points
Exercice 5 : 2,5 points
Exercice 6 : 3,0 points
Exercice 7 : 2,0 points
Exercice 8 : 2,5 points

Exercice 1

Soient $f(x)$ et $g(x)$, deux fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{2ax}{2+ax} \quad \text{et} \quad g(x)=1-\exp(-a\,x-0{,}008\,a^3\,x^2)\ ; \quad \text{où } 0<x<1 \text{ et } a\geq 1.$$

Montrer que $f(x)$ et $g(x)$ sont comparables (on cherchera à déterminer $\ln(1-f(x))$ et $\ln(1-g(x))$ et si nécessaire on utilisera le développement en série de Mac-Laurin de la fonction logarithme népérien jusqu'à l'ordre 3).

Exercice 2

On définit une suite récurrente (u_n), $n \in \mathbb{N}$, par la donnée de u_1 et de la condition quel que soit $n \geq 1$:

$$u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3} \text{ et on pose } v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}.$$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Calculer v_n en fonction de u_1 et de n.
3. Etudier la suite u_n pour $u_1=3$, $u_1=-1$, et $u_1=4$.

Exercice 3

L'évolution de la part des frais de santé par rapport au budget des ménages d'un pays donne lieu au tableau suivant :

Année	1959	1970	1975	1978
Pourcentage	7,1	9,8	11,8	12,6

1. Représenter graphiquement ce tableau dans un repère orthogonal.
2. Par la méthode des moindre carrés, déterminer l'équation d'ajustement de y (pourcentage) par x (année).
3. Déterminer le cœfficient de corrélation ? Que peut-on conclure ?
4. En 1985, les experts prévoient pour les frais de santé 14,6 % par rapport au budget des ménages. Justifier cette prévision ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$f:\begin{cases} R \to R \\ x \to f(x)=x+3+\frac{1}{2}\sqrt{6x^2+24x} \end{cases}$$

1. Etudier le comportement de la fonction f lorsque la variable devient infinement grande et montrer que la courbe représentative (C) de cette fonction admet deux asymptotes dont on déterminera les équations ?

2. Etudier les variations de la fonction f. Est-elle dérivable dans un ensemble de définition ? Calculer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to 4-} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4}$$

3. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f, le plan euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point dont on calculera l'abscisse. ?

Exercice 5

Soit φ l'endomorphisme du plan vectoriel euclidien P, définie par sa matrice M dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. φ est-il un automorphisme du plan vectoriel ? Est-il involutif ?
2. Etant donné un nombre réel λ, on pose :

$$(E_\lambda) = \left\{ \vec{u} \ ; \ \vec{u} \in P \ ; \ \varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \right\}$$

3. Montrer qu'il existe deux valeurs réelles de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{\vec{O}_P\}$. (Ces valeurs seront notées λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 > 0$).
4. Démontrer que $E_{\lambda 1}$ et $E_{\lambda 2}$ sont deux droites vectorielles orthogonales.

Exercice 6

1. Résoudre l'équation : $8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0$.
2. On considère l'équation $8e^{4z} + 8e^{3z} - e^z - 1 = 0$. En déduire en utilisant les résultats de la question 1, que cette équation a une seule solution réelle. Quelle est cette solution ?
3. Démontrer que si x et y sont des réels positifs avec $x \geq y$ alors on a les inégalités suivantes : a) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et b) $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x}\sqrt{y}$.
4. Combien y a-t- il de nombre entiers inférieur à 10p et dont la somme des chiffres est égal à 3 ?

Exercice 7

En Démographie, on entend par taux brut de natalité pour une année et un pays donnés, le rapport entre le nombre de naissances enregistrées cette année et l'effectif de la population totale. Cet indicateur calculé pour un pays en 1937, 1960 et 1970 a respectivement été estimé à : 20,1 ‰, 26,8 ‰ et 17,5 ‰.

1. Estimer au mieux, par interpolation ou par extrapolation, les taux bruts de natalité de cette population en 1947, 1965 et 1985.
2. Si l'on admet qu'en 1981 le taux de natalité était de 15,3 %, quelle(s) estimation(s) cette donnée permet-elle de réajuster ?
3. Effectuer ce(s) réajustement(s).