Université de Yaoundé II

- Avril 2003 –

INSTITUT DE FORMATION
ET DE RECHERCHE DEMOGRAPHIQUES
(I.FO.R.D.)

CONCOURS DE RECRUTEMENT

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Concours A)

Durée : 4 heures

Documents non autorisés
Utilisation des calculatrices autorisée

BAREME INDICATIF :

Exercice 1 : 3 points
Exercice 2 : 2 points
Exercice 3 : 2 points
Exercice 4 : 2 points
Exercice 5 : 4 points
Exercice 6 : 2 points
Exercice 7 : 3 points
Exercice 8 : 2 points

Exercice 1 (3 points)

On considère la fonction $f : a \rightarrow f(a) = pe^{-pa}$, où a est un nombre réel représentant l'âge d'une population.

1) Calculer la fonction cumulée de f définie par $F : a \rightarrow F(a) = \int_0^a f(t)dt$
2) Etudier la linéarité des fonctions définies par F(a) et 1 – F(a).
3) Etudier les fonctions définies par F(a) et 1 – F(a).
4) Représenter dans un même graphique les variations des fonctions définies F(a) et 1 – F(a).
5) Calculer l'âge moyen $\bar{a}$ de cette population (valeur moyenne de a).

Exercice 2 (2 points)

Les résultats d'un recensement de la population ont permis de répartir la population totale du pays suivant la région de résidence au moment du recensement et la région d'origine (tableau 2.1).

Tableau 2.1. Répartition (%) de la population selon la région de résidence au recensement et la région d'origine.

Région de résidence au recensement	Région d'origine		
	A	B	C
A	80	20	10
B	10	70	20
C	10	10	70
Ensemble	100	100	100

Calculer de deux manières différentes la population de chaque région de résidence au moment du recensement sachant que la population par région d'origine se répartit ainsi qu'il suit :

Région A : 10.000 habitants
Région B : 25.000 habitants
Région C : 15.000 habitants

Exercice 3 (2 points)

1) Soient x un nombre réel inférieur à 1 et n un entier naturel. Montrer que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots\dots + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

2) Calculer la limite quand n tend vers + ∞ de $\frac{1}{1+x}$

Cette limite s'appelle le développement limité de 1/(1 + x).

3) Déduire de 1) et 2) un développement limité de $1/(1-x)$.
4) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$$

5) Déduire de 1), 2) et 3) un développement limité de $\frac{2}{(1+x)(1-x)}$

Exercice 4 (2 points)

On considère une population féminine avec une fécondabilité (probabilité pour une femme de concevoir au cours d'un cycle menstruel) constante. On désigne par p cette probabilité et par q le complément à 1 de cette probabilité. Soit N l'effectif des femmes de cette population au début du premier cycle menstruel.

On désigne par C_i le nombre de conceptions au cours d'un cycle menstruel i et N_i le nombre de femmes non encore fécondes au début du cycle menstruel i respectivement.

1) Calculer C_1, C_2 et C_3.
2) Calculer N_1, N_2 et N_3.
3) Montrer par récurrence que $C_n = Npq^{n-1}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 5 (4 points)

La population d'un pays nommé IFORDIA est estimée, à une date t_0, à $P_0 = 3{,}2$ millions d'habitants. Son taux d'accroissement annuel moyen r est de 3,5 %.

1) L'effectif de cette population à la date t, P_t est déterminé par la relation $P_t = P_0(1+rt)$. Calculer l'effectif de cette population aux date t = 5 ans, 10 ans, 20 ans et 30 ans.
2) Au bout de combien d'années l'effectif de la population de ce pays va-t-elle doubler ?
3) Reprendre les calculs des questions 1) et 2) sachant que l'effectif de la population de IFORDIA évolue selon les modèles suivants :
   a) $P_t = P_0(1+r)^t$
   b) $P_t = P_0e^{rt}$
4) Quelles conclusions tirer de ces différents résultats ?

Exercice 6 (2 points)

Discuter suivant les valeurs du paramètre m l'existence des racines de l'équation du second degré : $(3m-1)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$.

1) Pour quelle valeur de m cette équation est-elle réduite à une équation du premier degré ?
2) Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines distinctes ou confondues ?
3) Déterminer la valeur de m pour que 2 soit une racine de cette équation.

Exercice 7 (3 points)

Soit $\Re$ l'ensemble de nombres réels muni de l'addition et de la multiplication usuelle notée respectivement (+) et (.). Sur l'ensemble $\Re x \Re$ des couples de nombres réels, on définit la loi de composition interne, notée * définie de la manière suivante :

$$\forall\ (a,b) \text{ et } (a',b') \in \Re x \Re : (a,b)*(a',b') = (a.a', b+b')$$

1) Calcul $(-2/3,5/6)*(1/2,-1/9)$.
2) La loi de composition * est-elle commutative ? Associative ?
3) Tout élément de $\Re x \Re$ possède-t-il un élément symétrique ?
4) Montrer que dans l'ensemble $\Re^* x \Re$, la loi de composition * est associative, admet un élément neutre e, et tout élément de $\Re^* x \Re$ admet un élément symétrique par rapport à e, et enfin que la loi * est commutative.

N.B. : $\Re^* = \Re - \{0\}$

Exercice 8 (2 points)

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Soient A et B deux sous-ensemble de F. On désigne par $f^{-1}(A)$ l'image réciproque de A, c'est-à-dire le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(A) = \{x \in E \,/\, f(x) = y \in A\}$$

Établir les relations suivantes :

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2) Si $A \cap B = \varnothing$ alors $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$
3) $\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$
4) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$