

MATHEMATIQUES – CORRIGE
SESSION 2006 – SERIE D

S, 27

Exercice 1 (5,5 points)

1°) a)	1°) b)	2°) a)	2°) b)	2°) c)	Total
0,25	1,25	1	1	2	5,5

1°) a) Calcul de : $(3-2i)^2 = 5-12i$ 0,25

b) Résolution de $z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$

discriminant réduit est $5 - 12i = (3 - 2i)^2$ les solutions sont :

$$z_1 = 5 - 2i; \quad z_2 = -1 + 2i$$

1
0,25

Représentation des points A, B, C, D, F et G

2°) a) Nature et éléments caractéristiques de S_1

Ecriture complexe donné est $z' = (1-i)z - 2 - i$

$(1-i) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ l'afixe du point invariant est $Z_0 = -1 + 2i = a$

S_1 est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

0,75

Affixe du point D ; on sait que $S_1(D) = C$ donc $d = 1 + 4i$.

0,25

Représentation de D.

b) détermination de l'écriture complexe de S_2

$$z' = az + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1-i) \text{ et B est point fixe d'où :}$$

0,75

$$z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2}(7+3i)$$

Affixe du point G : on sait que $S_2(C) = G$ donc $g = 6 + i$

0,25

Placement de G.

c) **Ecriture complexe de $S_2 \circ S_1$** : $z \xrightarrow{S_1} z_1 \xrightarrow{S_2} z_2$;

$$z_2 = \frac{1}{2}(1-i)z_1 + \frac{1}{2}(7+3i) \text{ avec } z_1 = (1-i)z - 2 - i \text{ d'où } z_2 = -iz + 2 + 2i \text{ cqfd}$$

0,5

Affixe de F milieu de [AB] $f = 2$

0,25

Image de D par $S_2 \circ S_1$: $S_2 \circ S_1(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(C) = G$

0,25

$S_2 \circ S_1$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point F.

0,75

FGD est un triangle rectangle isocèle car $FD = FG$ et $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FG}) = -\frac{\pi}{2}$

0,25

Exercice 2 (4,5 points)

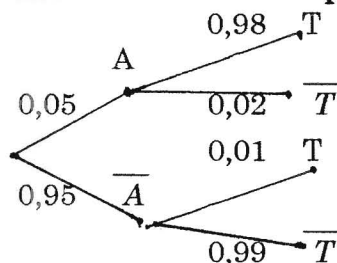
Soit les événements A : " L'individu est atteint par le virus du sida "

T : " le test est positif "

Traduction des données :

$$P(A) = 0,05; \quad P(\overline{A}) = 0,95; \quad P(T/A) = 0,98; \quad P(\overline{T}/\overline{A}) = 0,99.$$

1°) a) **Illustration de la situation par un arbre pondéré**



0,5

1°) b) La probabilité d'avoir un test positif :

$$P(T) = P(T \cap A) + P(T \cap \bar{A}) = P(A) P(T/A) + P(\bar{A}) P(T/\bar{A}) = 0,0585$$

1°) c) La probabilité d'être atteint si le test est positif :

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A) \cdot P(T/A)}{P(T)} = 0,8376$$

2°) a) La probabilité d'être atteint si le test est positif avec $P(A) = x$

$$P(\bar{A}) = 1 - x;$$

$$P(T) = P(A) P(T/A) + P(\bar{A}) P(T/\bar{A}) = x \times 98 \times 10^{-2} + (1 - x) \times 10^{-2} = (97x + 1)10^{-2}.$$

$$P(A \cap T) = x \times 98 \times 10^{-2}.$$

$$\text{D'où : } P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{x \times 98 \times 10^{-2}}{(97x + 1) \times 10^{-2}} = \frac{98x}{97x + 1} = p(x)$$

2°) b) Variation de la fonction $p(x)$

$$p(x) = \frac{98x}{97x + 1}; \quad p'(x) = \frac{98}{(97x + 1)^2}$$

x	0	1
signe de p'		+
p	0	1

Représentation

Problème (10 points)

Partie A (3 points)

$$\text{Soit (E) : } y' + y = \frac{1}{1 + e^x}.$$

1°) g est solution de (E)

$$x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) \text{ alors : } g'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^x) + e^{-x} \frac{e^x}{1 + e^x} = -g(x) + \frac{1}{1 + e^x}$$

$$\text{donc : } g'(x) + g(x) = \frac{1}{1 + e^x} \text{ alors } g \text{ est solution de (E).}$$

2°) On pose $f = g + h$ f solution de (E) ssi h solution de (E')

$$(f \text{ est solution de (E)}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) + h'(x) + g(x) + h(x) = \frac{1}{1 + e^x} \text{ or } g \text{ est solution de (E)}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow h \text{ est de (E') : } y' + y = 0.$$

3°) Résolution de (E'), solution générale de (E)

les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-x}$

donc la solution générale de (E) est : $y = e^{-x} [k + \ln(1 + e^x)]$ avec $k \in \mathbb{R}$.

4°) a) Décomposition de $1/(1 + e^x)$.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \frac{1}{1 + e^x} = \frac{ae^x}{1 + e^x} + b \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

4°) b) U primitive de u

$$u(x) = \frac{1}{1 + e^x} = -\frac{e^x}{1 + e^x} + 1 \text{ alors une primitive sur } \mathbb{R} \text{ est } U(x) = -\ln(1 + e^x) + x.$$

4°c) Une primitive G de g

puisque $g(x) = u(x) - g'(x)$ donc $G(x) = U(x) - g(x) = x - (e^{-x} + 1)\ln(1 + e^x)$.

Partie B (2,25 points)

$$\varphi(x) = e^x g'(x)$$

1°) Autre expression de φ

on sait que : $g'(x) = -g(x) + \frac{1}{1+e^x} = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}$

d'où : $\varphi(x) = e^x g'(x) = e^x \left[-e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} \right] = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

2°) Limite de φ en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(1+e^x) \right] = 0 \quad \text{d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$$

3°) φ est strictement décroissante, signe de φ

$\varphi'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ la dérivée de φ est négative sur $\mathbb{R}$, donc φ est strictement décroissante. Pour

tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$, φ est négative sur $\mathbb{R}$.

4°) Signe de $g'(x)$ et sens de variation de g.

$\varphi(x) = e^x g'(x)$, φ et g' ont le même signe sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$

$g'(x)$ est négative sur $\mathbb{R}$ et g est strictement croissante.

Partie C (4,75 points)

1°) Limite de φ ne $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] = -\infty$

2°) $\varphi(x) - 1 + x = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln[e^x(1+e^{-x})] - 1 + x = \frac{e^x}{1+e^x} - 1 - \ln(1+e^{-x})$.

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - (-x+1)] = 0$

La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

3°) Tableau de variation (évident)

4°) Limites et variations de g

$$g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

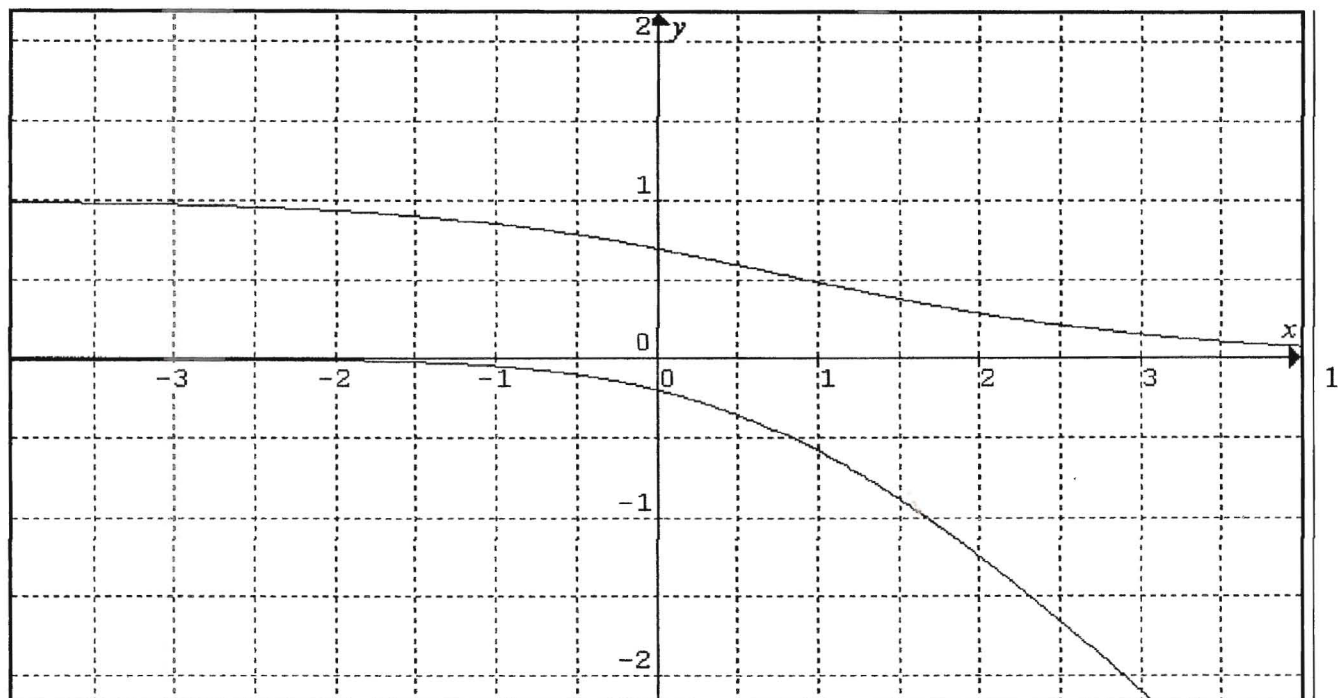
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

et $\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{e^x}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{\ln Y}{Y} \times \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1+X}{X} = 0 \times 1 = 0$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de g'		-
g	1	0

5°) construction de C et de Γ



6°) Calcul de l'intégrale $I(\alpha)$

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha g(x) dx = [G(x)]_0^\alpha = \left[x - (e^{-x} + 1) \ln(1 + e^x) \right]_0^\alpha = \alpha - (1 + e^{-\alpha}) \ln(1 + e^\alpha) + 2 \ln 2$$

$I(\alpha)$ est l'aire du domaine compris entre Γ , l'axe (Ox) , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = \alpha$.

7°) Limite de $I(\alpha)$

$$I(\alpha) = -g(\alpha) - \ln[e^\alpha(1 + e^{-\alpha})] + \alpha + 2 \ln 2$$

on trouve $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = 2 \ln 2$

Interprétation de ce résultat