Corrigé Serie D math 2005 8

Corrigé 1_D

**Exercice n°1 5 points**

1. a) *On demande de montrer que* $c = \frac{1}{18}$.

On a $|z_0|^2 = 4$, $|z_1|^2 = 8$, $|z_2|^2 = 2$ et $|z_3|^2 = 4$. Or les quatre réels $p_k$ définissent sur l'univers des quatre faces du dé une probabilité si on a

$\sum_{k=0}^{3} p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{3} c|z_k|^2 = 1 \Leftrightarrow 18c = 1$ D'où le résultat 0,5

b) *On demande les valeurs des* $p_k$.

On a $p_0 = \frac{2}{9}$, $p_1 = \frac{4}{9}$, $p_2 = \frac{1}{9}$ et $p_3 = \frac{2}{9}$ 1

2. a) *On demande les valeurs prises par X.*

Comme $z_0 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$ et $z_3 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$X$ prend donc dans l'ordre croissant les valeurs suivantes $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ 1

b) *loi de probabilité de X.*

$X$ a pour loi de probabilité la distribution suivante :

| $x_i$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

0,25

c) *Espérance mathématique de X.*

On a $E(X) = \frac{2\times 2\pi + 2\times \pi + 4\times 5\pi + 1\times 7\pi}{9} = \frac{11\pi}{3}$ 0,25

3. a) *On demande de vérifier que* $z_0$ *est racine de* $f(z)$

On trouve que $f(z_0) = 0$ 0,25

b) *Déduction demandée.*

Comme $z_0$ est une racine de $f(z)$, le polynôme est factorisable par $z - z_0$ et on trouve par exemple par division euclidienne $f(z) = (z+2i)[z^2 + (1+3i)z - 4]$ d'où $\alpha = 1+3i$ et $\beta = -4$ 0,5

c) *Résolution de* $f(z) = 0$.

On trouve $z + 2i = 0$ (1) ou $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$ (2)

(1) donne $z = -2i$ et pour résoudre (2) on calcule le discriminant $\Delta = 8 + 6i$ dont il faut déterminer une racine carrée $\delta = a + ib$ en résolvant l'équation $\delta^2 = \Delta$ qui se ramène au système

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \end{cases}$ avec $a^2 + b^2 = 10$ on trouve donc $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab = 3 \end{cases}$ on pourra prendre $\delta = 3 + i$

et obtenir les deux solutions de (2) comme $\frac{-1-3i+3+i}{2} = 1 - i$ et $\frac{-1-3i-3-i}{2} = -2-2i$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est $\{-2i,\ 1-i,\ -2-2i\}$ 0,75

4 *On demande le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui transforme (A, C) en (B, D).*

Il s'agit donc de trouver le module et un argument du quotient complexe $\dfrac{(4-(1+3\sqrt{3})i)-(1-i)}{(-2-2i)+2i} = \dfrac{-3+3i\sqrt{3}}{2} = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . Ainsi le rapport cherché est 3 et

l'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ . 0,5

**Exercice n°2 5 points**

1. *Figure* 0,75
2. *Coordonnées de* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 0,75
3. Les points $A$, $B$ et $C$ ne peuvent être alignés car $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ 0,5
4. * *Equation du plan* $(ABC)$ :

   Pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, $M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

   ce qui donne $2x - y + z = 5$ 0,5

   * *Aire du triangle ABC :*

   Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $cm^2$ du triangle $ABC$. On a : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{6}$ 0,5
5. *Soit à résoudre le système proposé*

   $\begin{cases} -x+3y-2z=7 \\ 5x-2y-z=-8 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=17 \\ 7x-3y=-3 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x=48 \\ 3x+y=17 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=8 \\ z=7 \end{cases}$ . Ainsi le système 1,5

   admet un unique triplet solution
6. *Intersection des trois plans.*

   Elle est constituée d'un seul point, le point $D(3,8,7)$ 0,5

## Problème 10 points

### Partie A

1. *Ensemble de définition de f.*

   La fonction $f$ est définie pour $\dfrac{x}{x+1} > 0$ , *tableau de signe* d'où le résultat annoncé. 0,5
2. *limites aux bornes de* $D_f$ .

   Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et que $\lim\limits_{1} \ln = 0$ alors on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x-1| = +\infty$ 0,25 0,25

On a $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} -1} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$ or $\lim\limits_{x \to -1} |x-1| = 2$ donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$ . 0,25

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{0} \ln = -\infty$ or $\lim\limits_{x \to 0} |x-1| = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ . 0,25

3. *Continuité de f en* 1.

   On a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2\ln 2 = f(1)$ ; $f$ est bien continue en 1. 0 ;5

   *Dérivabilité de f en* 1.

   On a pur tout réel $h$ non nul $f(1+h) = |h| - 2\ln\left(\dfrac{1+h}{2+h}\right) = |h| + 2\ln(2+h) - 2\ln(1+h)$

On a donc $f(1+h) - f(1) = |h| + 2(\ln(2+h) - \ln 2) - 2\ln(1+h)$ et par conséquent

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{|h|}{h} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} - 2\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ , donc $\lim\limits_{h \xrightarrow[>]{} 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$ et 1

$\lim\limits_{h \xrightarrow[<]{} 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2$ . On peut conclure que $f$ n'est pas dérivable en 1 mais l'est à droite et à gauche en ce point, avec $f'_g(1) = -2$ et $f'_d(1) = 0$ .

4. *Variations de f.*

Sur $D_f \setminus \{1\}$ la fonction $f$ est dérivable et on a pour $x$ appartenant à $]-\infty,-1[\cup]0,1[$

$f'(x) = -1 - \dfrac{2}{x(x+1)}$ par ailleurs sur $]1,+\infty[$, on a $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x(x+1)}$

Il est aisé de constater que sur $]-\infty,-1[\cup]0,1[$ on a $f'(x) < 0$ et que sur $]1,+\infty[$ on a 0,75

$f'(x) > 0$ puisque dans ce dernier cas $f'(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x(x+1)} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$.

<u>Tableau de variation</u>

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $f$ | $+\infty \searrow -\infty$ | | $+\infty \searrow$ | $2\ln 2$ | $\nearrow +\infty$ |

0,25

5. *Equation $f(x) = 0$.*

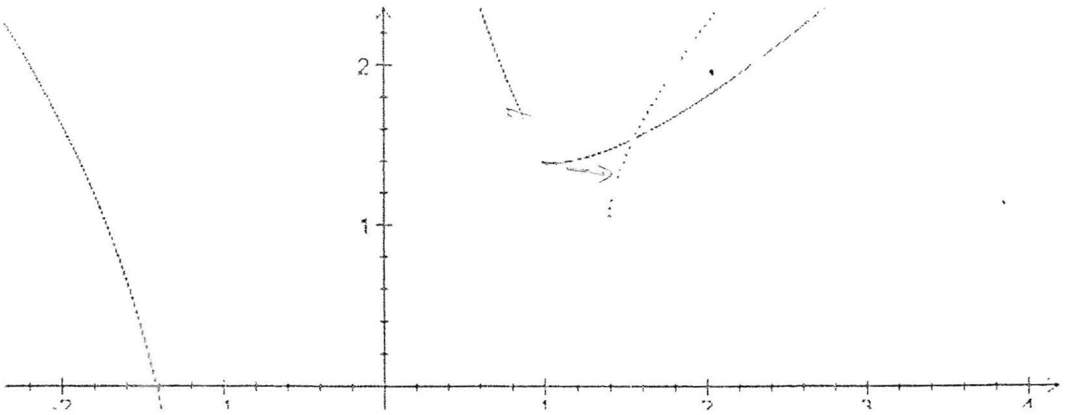
Avec un minimum strictement positif sur $]0,+\infty[$ l'équation y est impossible. La restriction de $f$ à $]-\infty,-1[$ est continue et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de cet interv sur IR. Tout réel donc et 0 en particulier est image par $f$ d'un unique réel de $]-\infty,-1[$. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution $x_0$ et comme $f(-2) = 3 - 2\ln 2 > 0$, on doit avoir $-2 < x_0 < -1$ 0,5

6. *Asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$ en $\pm\infty$.*

On a obtenu précédemment que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$ ce qui veut dire que 0,5

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - |x-1|\right) = 0$, résultat qui traduit que les droites d'équations $y = 1-x$ et $y = x-1$ sont respectivement asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

7. *Représentation graphique.*



1

8. *Une bijection.*

La restriction $g$ de $f$ à $[1,+\infty[$ est continue strictement croissante ; elle réalise donc une bijectio intervalle sur son image $[2\ln 2,+\infty[$ 0,25

9 *Complément graphique.*

Voir le graphique 0,25

10. *Intersection de $(\mathscr{C}_f)$* et $(\Gamma)$

Soit $A$ un point s'il existe d'abscisse $a$ de $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite d'équation $y = x$. On aura $a = f(a$ 0,25

s'ensuit que $g(a) = f^{-1}(a) = f^{-1} \circ f(a) = a$ ce qui signifie que le point $A$ appartient aussi à $(\Gamma)$. Il reste à prouver l'existence de $A$ et à déterminer ses coordonnées. Or $f(x)=x \Leftrightarrow x-1-2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=x$ 0,5

sur l'intervalle $[1,+\infty[$ soit à $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ d'où $x=\frac{1}{\sqrt{e}-1}$. Le point $A$ existe bel et bien et a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{e}-1},\frac{1}{\sqrt{e}-1}\right)$.

**Partie B**

1. En unité d'aire on a $\mathcal{A}(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^1-2\int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$. Le calcul par intégration par parties de $\int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ donne $[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)]_\alpha^1$ en effet avec par exemple $u'(x)=1$ on peut prendre $u(x)=x+1$ et $v(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ on a $v'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$. On a donc $\int_\alpha^1 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx=(x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\int_\alpha^1(1+\frac{1}{x}-1)\,dx$ qui après simplification donne bien $[x\ln x-(x+1)\ln(x+1)]_\alpha^1$. On trouve donc $\mathcal{A}(\alpha)=\frac{1}{2}+4\ln 2-\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2+2\alpha\ln\alpha-2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$. 1
2. En unité d'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ a pour limite $\frac{1}{2}+4\ln 2$ en 0 à droite 0,25

**Partie C**

1. La suite étant la restriction à $\mathbb{N}^*$ d'une fonction strictement croissante sur $[1,+\infty[$ est aussi strictement croissante. 0,25
2. Comme la fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ alors la suite a pour limite $+\infty$. 0,25
3. On a $S_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1-2\ln\left(\frac{k}{k+1}\right))=\sum_{k=1}^{n}k-n-2\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

   $S_n=\frac{n(n+1)}{2}-n-2\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{n(n-1)}{2}-2\ln\frac{1}{n+1}=\frac{n(n-1)}{2}+2\ln(n+1)$. 1

   On trouve donc que $S_n$ a pour limite $+\infty$.