Corrigé Mathématiques 2004-1-D

Exercice 1 (5 points)

1° a) *Forme exponentielle du complexe a* :

On a : $a=\sqrt{3}-i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. **(0,25 point)**

b) *Vérification d'une égalité puis nature du triangle OAB* :

On a bien : $\frac{a}{a-b}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-i(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})}=-i$.

Il s'ensuit que : $\begin{cases} \left|\frac{a}{a-b}\right|=|-i|=1 \\ \arg(\frac{a}{a-b})=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$, soit $\begin{cases} OA=AB \\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$. Le triangle OAB est donc rectangle et isocèle en A. **(0,25+0,50=0,75 point)**

c) *Construction géométrique des points A et B* :

Le point A est le point du quatrième quadrant du cercle de centre O et de rayon 2 qui a pour ordonnée le réel -1 puisque $|a|=2$ et $\mathrm{Im}(a)=-1$.

Le point B est l'image du point O par le quart de tour direct de centre A puisque :

$\begin{cases} AB=AO \\ (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$. **(0,25+0,25=0,5 point)**

2° a) *Caractéristique de la similitude S* :

De la configuration du triangle OAB on tire que : $\begin{cases} OB=\sqrt{2}\,OA \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{4} \end{cases}$; On peut donc conclure que la similitude S a pour centre O pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$. **(0,5 point)**

b) *Ecriture complexe de S* :

On a immédiatement pour tout point M d'affixe z d'image M' d'affixe z' par S :

$$z'=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}z=(1-i)z.$$

Ainsi S a pour écriture complexe : $z'=(1-i)z$. **(0,25 point)**

c) *Image du point B par S* :

L'image C du point B par S a pour affixe le complexe :

$c=(1-i)(\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1))=\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-1=-2-2i\sqrt{3}$. **(0,25 point)**

3° a) *Soit à vérifier que A est le milieu de [GB], puis calcul de l'affixe de G* :

Comme le point G est le barycentre du système : $\{(A;2);(B;-1)\}$, alors on a :

$2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Ainsi le point A est bien le milieu de $[GB]$.

Le barycentre G du système : $\{(A;2);(B;-1)\}$ a pour affixe le complexe

$g=2a-b=2(\sqrt{3}-i)-\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}-2i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}+i=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$.

Ainsi l'affixe du point G est $g=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$. **(0,25+0,25=0,5point)**

b) <u>*Calcul de φ (G) et vérification de l'égalité :*</u> $\varphi(M)=MG^2-8$:

On a : $\varphi(G)=2GA^2-GB^2=2AB^2-4AB^2=-2AB^2=-2OA^2=-8$;
car puisque A est milieu de $[GB]$, on a : $AG=AB$ et $GB=2AB$.
Ainsi $\varphi(G)=-8$.

De plus pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ on a : $\varphi(M)=2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2$.

On a donc : $\varphi(M)=2(MG^2+GA^2)-(MG^2+GB^2)+2\overrightarrow{MG}.(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})$.

soit : $\varphi(M)=MG^2+\varphi(G)=MG^2-8$; car G étant barycentre, $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
(0,25+0,5=0,75 point)

c) <u>*Détermination et construction de*</u> Γ_A.
On a les équivalences successives suivantes :

$$M\in\Gamma_A \Leftrightarrow \varphi(M)=-4 \Leftrightarrow MG^2-8=-4 \Leftrightarrow MG^2=4 \Leftrightarrow GM=2.$$

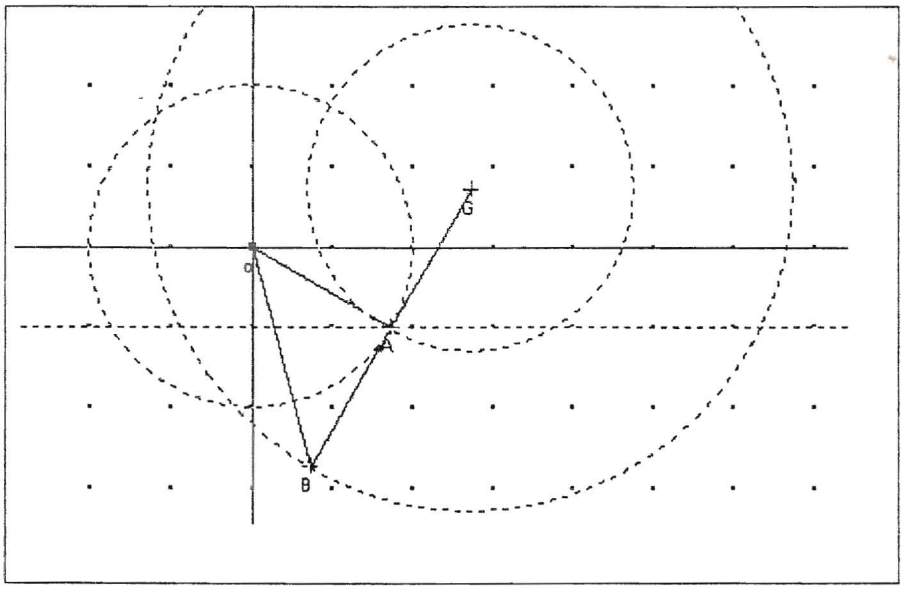
Ainsi Γ_A est le cercle de centre G et de rayon 2. (Un tel cercle passe par le point A).
(Voir figure) **(0,5+0,25=0,75 point)**

d) <u>*Détermination et construction de*</u> Γ_B.
On a les équivalences successives suivantes :

$$M\in\Gamma_B \Leftrightarrow \varphi(M)=8 \Leftrightarrow MG^2-8=8 \Leftrightarrow MG^2=16 \Leftrightarrow GM=4.$$

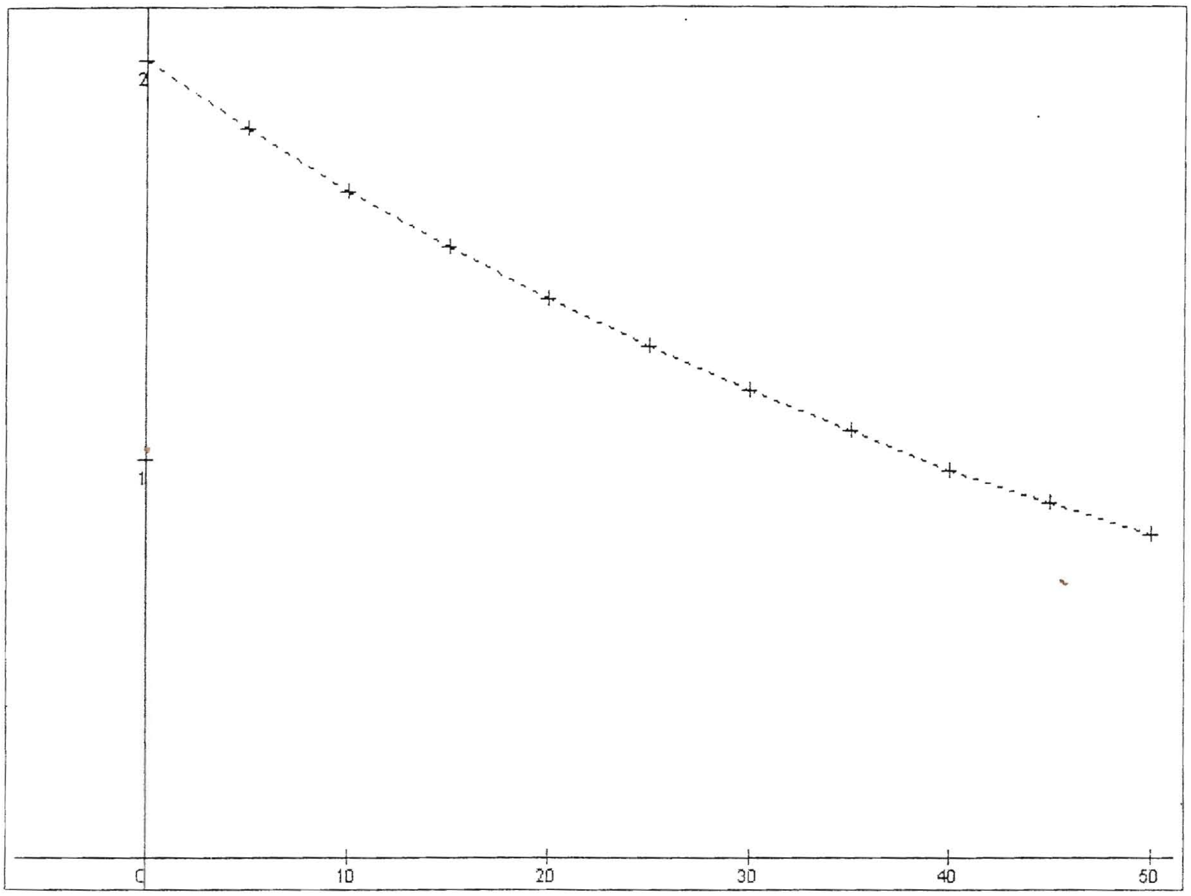
Ainsi Γ_B est le cercle de centre G et de rayon 4. (Un tel cercle passe par le point B).
(Voir figure) **(0,5+0,25=0,75 point)**

Figure



Exercice 2 **(4 points)**

1° *Nuage de points* :



(0,5 point)

2° *Justification d'ajustement* :

La calculatrice donne pour coefficient de corrélation linéaire $r = -0{,}9929474948$ entre x et y, un ajustement affine est donc bien envisageable entre x et y. **(0,25 point)**

3° *Tableau de la nouvelle série double* :

x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
z_i	0,69315	0,60432	0,51282	0,42527	0,33647	0,24686	0,157	0,06766	-0,03046	-0,11653	-0,21072

(0,5 point)

4° *Calcul du coefficient de corrélation linéaire entre x et z.* :

On a $\sum x = 275 \Rightarrow \overline{X} = \dfrac{275}{11} = 25$.

De même $\sum z = 2{,}68584 \Rightarrow \overline{Z} = 0{,}244167272$.

De même : $\sum z^2 = 1{,}55178728 \Rightarrow V(Z) = \overline{Z^2} - \overline{Z}^2 = \dfrac{1{,}55178728}{11} - (0{,}244167272)^2$

$\Rightarrow \quad \sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = 0{,}2854013202$.

En outre on a : $\sum xz = 17{,}5096 \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Z) = \overline{XZ} - \overline{X}\,\overline{Z}$. Ainsi

$\operatorname{cov}(X,Z) = \dfrac{17.5096}{11} - 25 \times 0{,}244167272 = -4{,}512399982$.

Le coefficient de corrélation linéaire est le réel

$r = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sigma_X \times \sigma_Z} = \dfrac{-4{,}512399982}{15{,}8113883 \times 0{,}2854013202} = -0{,}99995765$.

Conséquence :

Comme $|r| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on peut conclure qu'il y a une forte corrélation linéaire entre x et z , et qu'un ajustement affine est parfaitement envisageable entre x et z. **(1+0,25=1,25 points)**

5° *Equation de la droite de régression de z en x* :

La droite de régression de z en x a pour équation réduite :

$$y = a(x - \overline{X}) + \overline{Z} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{V(X)} = \frac{-4{,}512399982}{250} = -0{,}018049.$$

On trouve donc $z = -0{,}018x + 0{,}695$. **(0,5 point)**

6° *Expression de y en fonction de x* :

Comme $z = \ln y$, alors on a $y = e^z = e^{-0{,}018x+0{,}695} = e^{0{,}495}\, e^{-0{,}018x} = 2e^{-0{,}018x}$. **(0,5 point)**

7° *Des estimations* :

a) Pour $x = 8$ on a : $y = 1{,}73$ **(0,25 point)**

b) Pour avoir $y < 1{,}1$, on doit avoir $2e^{-0{,}018x} < 1{,}1 \Leftrightarrow e^{-0{,}018x} < 0{,}55$

$$\Leftrightarrow -0{,}018x < \ln 0{,}55 \Leftrightarrow x > -\frac{\ln 0{,}55}{0{,}018} \approx 33{,}21.$$

Ainsi au bout de la 34ème minute, le taux de glycémie du patient est revenu à la normale. **(0,25 point)**

Problème (11 points)

Partie A : (3 points)

1° *On veut vérifier que u est solution de (E)* :

La fonction u est dérivable sur IR et $u'(x) = (4x - 2x^2)e^{-x}$; la fonction u' est aussi dérivable sur IR et $u''(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x}$; et on a pour tout réel x,

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = (2x^2 - 8x + 4)e^{-x} + 2(4x - 2x^2)e^{-x} + 2x^2e^{-x} = 4e^{-x}.$$

Ainsi u est bien une solution de (E) **(0,5 point)**

2° *Vérification d'une équivalence* :

- Supposer que la fonction $f = g + u$ est solution de (E) implique que f est deux fois dérivable sur IR et par suite g également, et que pour tout réel x on a : $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4e^{-x}$; et comme u est solution de (E), alors $(f-u)'' + 2(f-u)' + (f-u)$ est la fonction nulle ce qui implique que la fonction que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 2y' + y = 0$

- Réciproquement, supposer que la fonction $g = f - u$ est solution de (E') implique que g est deux fois dérivable sur IR et par suite f également, et que pour tout réel x on a : $(f-u)''(x)+2(f-u)'(x)+(f-u)(x)=0$, ce qui implique que pour tout réel x on a : $f''(x)+2f'(x)+f(x)=g''(x)+2g'(x)+g(x)=4e^{-x}$, et que f est solution de l'équation différentielle (E) **(0,25+0,25=0,5 point)**

3° a) *On veut résoudre (E')* :
(E') est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Elle a pour équation caractéristique : $r^2+2r+1=0$, qui admet une racine double $r_0=-1$.

(E') a donc pour solutions générales les fonctions définies sur IR par : $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels arbitraires. **(0,5 point)**

b) *On veut déduire les solutions de (E)* :
Selon la question 2 qui précède les solutions générales de (E) s'obtiennent comme somme des solutions générales de (E') et de la solution particulière u.
Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :
$x \mapsto (2x^2+ax+b)e^{-x}$, où a et b sont deux réels arbitraires. **0,5 point)**

c) *On veut déterminer une solution sous conditions initiales* :
Avec $f(x)=(2x^2+ax+b)e^{-x}$ on a $f'(x)=(-2x^2+(4-a)x+a-b)e^{-x}$; les fonctions f solutions de (E) telle que l'on ait : $f(0)=0$ et $f'(0)=-3$, sont définies par les réels a et b solutions du système : $\begin{cases} b=0 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-3 \end{cases}$. Ainsi la fonctions f cherchée est définie sur IR par $f(x)=(2x^2-3x)e^{-x}$ **(0,5 point)**

Partie B. (5 points)

1° a) *On veut étudier le sens de variations de la fonction f* :
La fonction f est dérivable sur IR et $f'(x)=(-2x^2+7x-3)e^{-x}$; comme sur IR on a : $e^{-x} > 0$ alors la dérivée a le même signe que : $-2x^2+7x-3$; trinôme du second degré ayant pour racines $\frac{1}{2}$ et 3. On peut donc dire que la dérivée est négative sur les intervalles $\left]-\infty \,;\, \frac{1}{2}\right]$ et $[3\,;\,+\infty[$, et positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,3\right]$. Par suite la fonction est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,3\right]$ et de nouveau strictement décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$. **(0,5+0,5+0,25=1,25 points)**

b) *On veut étudier les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$* :

- On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-3x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

- On sait que pour tout réel non nul x, et pour tout entier naturel non nul on a : $x^n e^{-x} = \dfrac{x^n}{e^x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^n}}$; et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; on a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

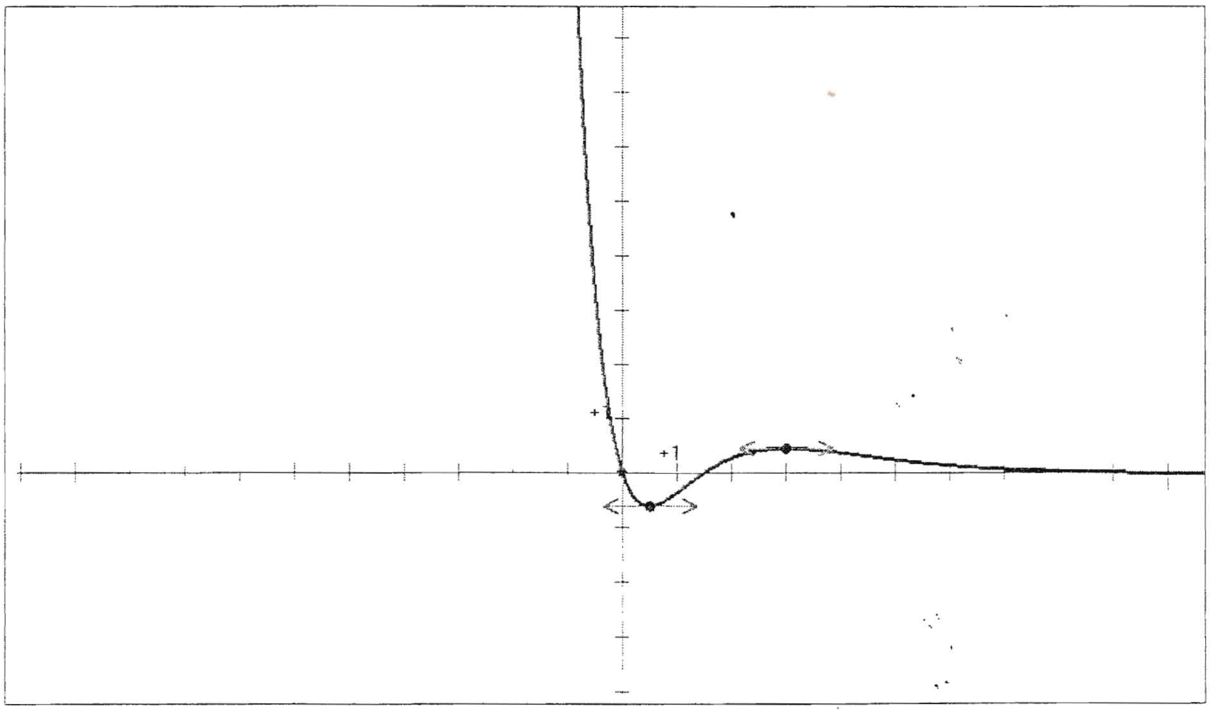
  et comme $f(x) = 2x^2 e^{-x} - 3x e^{-x}$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **(0,25+0,25=0,5 point)**

c) <u>*Tableau de variation la fonction f*</u> :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0,5)$	↗	$f(3)$	↘	0

(0,25 point)

c) *Courbe :* **(0,75 point)**



2° <u>*Existence et calcul de primitive*</u> :

Comme f est une solution de l'équation différentielle (E), f est continue car dérivable et admet donc des primitives sur IR et on a pour tout réel x, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4e^{-x}$. En passant aux primitives on a bien une primitive F telle que : $f'(x)+2f(x)+F(x)=-4e^{-x}$, toute autre primitive de f différant de F par une constante. De plus $F(x)=-(2x^2+x+1)e^{-x}$

(0,5+0,5=1 point)

3° a) *Un calcul d'aire :*

En cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan donné est $\int_2^{\alpha} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_2^{\alpha}=F(\alpha)-F(2)$

$\mathcal{A}(\alpha)=11e^{-2}-(2\alpha^2+\alpha+1)e^{-\alpha}$ **(0,5 point)**

b) *Limite d'aire et interprétation*

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=11e^{-2}$ en cm^2.

Le domaine plan illimité contenu dans le demi-plan de bord, la droite d'équation $x=2$, ne passant pas par l'origine, et qui est compris entre l'axe des abscisses et la courbe, a une aire finie égale à $11e^{-2}$ en cm^2 **(0,5+0,25=0,75 point)**

Partie C (3 points)

1° *Calcul de dérivée et monotonie d'une famille de fonction :*

La fonction f_m est dérivable sur IR et $f_m'(x)=(-2x^2+7x-3-m)e^{-x}$. Comme $e^{-x}>0$, la dérivée a le même signe que le trinôme $-2x^2+7x-3-m$; la fonction est donc strictement monotone lorsque le trinôme reste négatif sur IR, ce qui a lieu lorsque son discriminant est négatif. On doit donc avoir $49-4(-2)(-3-m)\le 0 \iff 25-8m\le 0 \iff m\ge\frac{25}{8}$.

(0,5+0,5=1 point)

2° *Probabilité d'avoir une fonction strictement décroissante :*

Pour avoir une fonction strictement décroissante il faut que m prenne les valeurs 4, 5 ou 6.

La probabilité cherchée est donc $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ **(1 point)**

3° *Probabilité d'obtenir exactement deux fonctions strictement monotones en lançant trois fois de suite le dé :*

On est en présence d'un schéma de Bernoulli et la probabilité demandée est :

$$C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$ **(1 point)**