Prépas Bac

MINESEC - OBC

SESSION 2007

Epreuve de Mathématiques

EXAMEN : Baccalauréat C/E
Durée : 4 heures
Coefficient : 5 (C) / 4 (E)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat

Exercice 1 : 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- Le plan (P) d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$:
- La droite (D) passant par le point A(1 ; 2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;
- La symétrie orthogonale s par rapport au plan (P).

1. Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires. **0,5pt**

2. a) On note M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace et M′(x′ ; y′ ; z′) son image par s.
Ecrire x′, y′ et z′ en fonction de x, y et z. **1pt**

b) On note A′ = s(A), déterminer les coordonnées de A′ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. **0,5pt**

c) En déduire les coordonnées du point H, intersection de (P) et (D). **0,5pt**

d) Retrouver les coordonnées de H par une autre méthode. **0,5pt**

3. a) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble (S) des points de l'espace tels que :
$\frac{MA}{MH} = \sqrt{5}$. **0,5pt**

b) Reconnaître (S) et déterminer ses éléments caractéristiques. **0,75pt**

c) Préciser l'intersection de (S) et de (P). **0,75pt**

Exercice 2 : 5 points

Pour tout n de $\mathbb{N}$ et x de $\mathbb{R}$, on note f_n la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^x}$.

On définit la suite (u_n) par son terme général $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. a) Démontrer que la suite (u_n) est définie et à termes positifs. **1pt**

b) Calculer u_1 et $u_0 + u_1$. En déduire la valeur exacte de u_0. **1pt**

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $u_n + u_{n+1}$ en fonction de n. **0,5pt**

2. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante. **0,5pt**

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, et pour tout x de l'intervalle [0 ; 1],
$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}e^{nx}$. **0,75pt**

c) En déduire un encadrement d u_n. **0,5pt**

3. Déduire de la question 2. b) la limite de u_n puis celle de $\frac{u_n}{e^n}$. **0,75pt**

Problème : 10 points

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On note :

(Γ) l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $5z\bar{z}+(z+\bar{z}+1)^2-1=0$;

f la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre O.

g l'application de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans lui-même qui à tout nombre complexe z, affixe d'un point M, associe le nombre g(z), affixe d f(M). (Γ') est l'image de (Γ) par f.

1. Démontrer que (Γ) est une ellipse et

préciser ses foyers et ses directrices et son excentricité. **1,5pt**

2. a) Donner l'expression de g(z) en fonction de z. **0,75pt**

b) Donner la nature exacte de (Γ') dont on donnera l'excentricité. **1pt**

Partie B

On note :

- h la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$;
- ℓ la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $\ell(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$;

(C) la courbe représentative de ℓ dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer les limites de h à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**

b) Calculer la dérivée de h et en déduire le tableau de variation de h. **1pt**

2. a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution λ dans l'intervalle $I =]1 ; 2[$. **0,5pt**

b) Préciser le signe de h(x) dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. **0,5pt**

3. a) Déterminer les limites de ℓ à droite de 0 et en $+\infty$. **0,5pt**

b) En déduire les asymptotes de (C). **0,5pt**

c) Calculer la dérivée de ℓ et démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $l'(x)$ a le même signe que $(2x + 1)h(x)$. **0,75pt**

4. Dresser le tableau de variation de ℓ dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. **0,5pt**

5. a) Démontrer que $\ell(\lambda) = \frac{2}{\lambda(2\lambda+1)}$. **0,5pt**

b) On note A le point de rencontre de (C) avec l'axe des abscisses ;
écrire une équation cartésienne de la droite (D), tangente à (C) en A. **0,5pt**

c) Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe (C). Unité sur les axes : 1,5cm. **1pt**