

**Exercice 1 ( 5,5 points)**1°) a) Calculer  $(3 - 2i)^2$ .b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 4z - 1 + 12i = 0$$

2°) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = -1 + 2i$ ,  $b = 5 - 2i$  et  $c = 3 + 2i$ . Faire une figure.a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $S_1$  dans le plan complexe  $\mathcal{P}$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = (1 - i)z - 2 - i.$$

Déterminer  $d$  l'affixe du point  $D$  qui a pour image par  $S_1$  le point  $C$ . Placer le point  $D$ .b) Donner l'écriture complexe de la similitude directe  $S_2$  du plan  $\mathcal{P}$ , de centre le point  $B$ , d'angle de mesure  $-\frac{\pi}{4}$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . déterminer  $g$  l'affixe de  $G$  image du point  $C$  par  $S_2$ . Placer le point  $G$ .c) Montrer que  $S_2 \circ S_1$  a pour écriture complexe :  $z' = -iz + 2 + 2i$ . On désigne par  $F$  le milieu du segment  $[AB]$ . Déterminer  $f$  l'affixe du point  $F$ . Quelle est l'image du point  $D$  par  $S_2 \circ S_1$  ? Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $S_2 \circ S_1$ . En déduire la nature du triangle  $FGD$ .**Exercice 2 (4,5 points)**

Un test de dépistage du sida, qui peut être soit positif, soit négatif, donne les résultats suivants :

- Chez les individus atteints, 98% des tests sont positifs.
- Chez les individus sains, 99% des tests sont négatifs.

Pour un individu pris au hasard dans la population ciblée, on désigne par A et T les événements suivants :

- A : " l'individu est atteint par le virus ".
- T : " le test est positif ".

1°) On suppose que cette maladie touche 5% de la population ciblée.

- Illustrer la situation par un arbre pondéré.
- Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard ait un test positif ?
- Quelle est la probabilité pour qu'un individu dont le test est positif soit atteint par le virus ?

2°) On désigne par  $x$  la valeur décimale du pourcentage d'individus malades dans la population ciblée par le test.

- Montrer que la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit atteint par le virus est dans ce cas :  $p(x) = \frac{98x}{97x+1}$ .
- Etudier les variations de cette fonction sur son intervalle de définition  $[0 ; 1]$ . En donner une représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé où l'unité graphique est 5 cm.

### Problème (10 points)

**Partie A :** (Equation différentielle. Recherche de primitives). (3 points)

On considère l'équation différentielle :  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ . (E)

1°) Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ , est solution de (E).

2°) On pose :  $f = g + h$ . Montrer que  $f$  est une solution générale de (E), si et seulement si  $h$  est une solution de l'équation différentielle :  $y' + y = 0$  (E').

3°) Résoudre (E') puis en déduire les solutions générales de (E).

4°) a) Trouver les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x$  réel on ait :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{ae^x}{1+e^x} + b.$$

b) En déduire sur  $\mathbb{R}$  une primitive  $U$  de la fonction  $u$  telle que :  $u(x) = \frac{1}{1+e^x}$ .

c) En remarquant que  $g(x) = \frac{1}{1+e^x} - g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , trouver alors une primitive  $G$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B (Etude de  $g$  et d'une fonction auxiliaire  $\varphi$ )(2,25 points)**

On pose :  $\varphi(x) = e^x g'(x)$ .

1°) Vérifier que :  $\varphi(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$ .

2°) Calculer la limite de  $\varphi$  en  $-\infty$ .

3°) Etablir que  $\varphi$  est strictement décroissante puis en déduire son signe.

4°) Déterminer alors le signe de  $g'(x)$  ainsi que le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie C (Représentations de courbes et calcul d'intégrales) (4,75 points)**

Le plan étant muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm, on désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $\varphi$  et  $\Gamma$  celle de  $g$ .

1°) Etudier la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ .

2°) Calculer la limite de  $\varphi(x) - 1 + x$  en  $+\infty$ . Donner une interprétation graphique du résultat.

3°) Dresser le tableau de variation de la fonction  $\varphi$ .

4°) Etudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , dresser ensuite son tableau de variation.

5°) Tracer  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

6°) Soit  $\alpha$  un réel positif. Calculer l'intégrale :  $I(\alpha) = \int_0^\alpha g(x) dx$ . Que représente  $I(\alpha)$  ?

7°) Etudier la limite de  $I(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ , puis interpréter graphiquement ce résultat.