REPUBLIQUE GABONAISE

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

1–Mathématiques–2005

Série : D

Durée : 4 heures

Cœf. . 4

Exercice 1 (5 points)

Sur les quatre faces d'un dé pipé tétraédrique sont inscrits les nombres complexes suivants
$z_0 = -2i$, $z_1 = -2-2i$, $z_2 = 1-i$ et $z_3 = -1+i\sqrt{3}$.

On lance une fois ce dé.

La probabilité p_k pour que la face marquée z_k soit cachée est $p_k = c|z_k|^2$, pour $k \in \{0,1,2,3\}$ et $c \in \mathbb{R}$.

1- a) Montrer que $c = \dfrac{1}{18}$.

b) Déterminer p_k pour $k \in \{0,1,2,3\}$

2- On désigne par X la variable aléatoire qui, au complexe inscrit sur la face cachée associe son unique argument appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

a) Determiner les valeurs prises par X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique de X.

3- On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $f(z) = z^3 + (1+5i)z^2 + 2(-5+i)z - 8i$.

a) Vérifier que z_0 est une racine de $f(z)$.

b) En déduire deux nombres complexes α et β tels que $f(z) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 2: (5 points)

Dans un repère orthonormé direct (O, I, J, K) de l'espace E, on considère les points $A\,(1, 0, 3)$, $B\,(2, -1, 0)$ et $C\,(0, -1, 4)$.

1- Representer les points A, B et C (Unité graphique 1 cm)

2- Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

3- Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier votre réponse.

4- Déterminer une equation du plan (ABC) et calculer l'aire du triangle ABC.

5- On donne les équations de deux plans P_1 $-x+3y-2z=7$ et P_2 : $5x-2y-z=-8$.

a) Résoudre le système $\begin{cases} -x+3y-2z=7 \\ 5x-2y-z=-8 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$

b) En déduire l'intersection des plans P_1 , P_2 et (ABC).

B

Problème : (10 points)

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = |x-1| - 2\ln(\frac{x}{x+1})$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ I,\ J)$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.

Partie A

1. Montrer que f est définie sur $D_f =]-\infty\ ;-1[\cup]0\ ;+\infty[$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
4. Etudier les variations de f
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée x_0 appartenant à l'intervalle $]-2\ ,-1[$
6. Démontrer que les droites d'équations $y = x-1$ et $y = 1-x$ sont asymptotes à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
7. Construire $(\mathscr{C}_f)$ On tracera en particulier les demi-tangentes à droite et à gauche du point d'abscisse 1 de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
8. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[1\ ,+\infty[$ est une bijection de $[1\ ,+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
9. Tracer dans le repère (O ; I, J) la représentation graphique (Γ) de la bijection réciproque g^{-1} de g
10. Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ et (Γ) se coupent en un point A de la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées de A.

Partie B

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ,1[$.

1. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

   (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 à droite

Partie C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $u_n = n-1-2\ln(\frac{n}{n-1}) = f(n)$.

1. Montrer que (u_n) est une suite monotone
2. Quelle est sa limite ?
3. Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$

   a. Démontrer que $S_n = \frac{n(n-1)}{2} + 2\ln(n+1)$.

   b. Quelle est la limite de (S_n) ?