REPUBLIQUE GABONAISE **2004 - 1 - MATHEMATIQUES**

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

Série : **D**
Durée : **4 heures**
Coef. : **4**

Exercice 1 : **(5 points)**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives : $a=\sqrt{3}-i$ et $b=\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}+1)$.

1° a) Donner la forme exponentielle du complexe a.

b) Vérifier que : $\frac{a}{a-b}=-i$. En déduire la nature du triangle OAB.

c) Construire avec précision le point A, puis le point B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

2° a) Déterminer les caractéristiques de la similitude plane directe S de centre O qui transforme A en B.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) Déterminer l'image C de B par S.

3° On désigne par G, le barycentre des points A et B respectivement affectés des coefficients 2 et -1, et par φ l'application du plan complexe $(\mathscr{P})$ dans IR qui à tout point M de $(\mathscr{P})$ associe le nombre réel $\varphi(M)=2MA^2-MB^2$.

a) Vérifier que le point A est le milieu de $[GB]$. Calculer l'affixe g du point G.

b) Calculer $\varphi(G)$ puis vérifier que pour tout point M du plan $(\mathscr{P})$, $\varphi(M)=MG^2-8$.

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_A des points M du plan tels que : $\varphi(M)=-4$.

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_B des points M du plan tels que : $\varphi(M)=8$.

Exercice 2 : **(4 points)**

Le taux de glycémie doit rester stable dans le sang. Cet équilibre est assuré par un processus géré par le cerveau qui envoie des messages pour corriger ce taux dès qu'il décèle un changement. Des examens menés sur un patient dans un laboratoire ont permis de dresser le tableau ci-dessous qui indique la durée x_i de l'observation en minutes et le taux de glycémie y_i du patient exprimé en *g/l*.

x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	2	1,83	1,67	1,53	1,40	1,28	1,17	1,07	0,97	0,89	0,81

1° Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal où l'unité graphique est 0,5 *cm* sur l'axe des abscisses et 5 *cm* sur l'axe des ordonnées.

2° Justifier à l'aide de votre calculatrice qu'un ajustement affine est envisageable. (*Pour cette question, le détail des calculs n'est pas demandé*).

3° Comme pour la santé on préfère allier rigueur et précision, on envisage un ajustement plus fin. On pose $z_i = \ln y_i$. Reproduire et compléter le tableau de la nouvelle série double $(x_i\,;\,z_i)$ ainsi obtenue. On y donnera les arrondis des z_i à 10^{-5} près.

4° Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. En déduire qu'un ajustement affine est convenable entre x et z.

5° Donner une équation de la droite de régression de z en x.

6° Vérifier alors que l'on peut écrire y sous la forme $y=Ce^{ax}$, où C est un arrondi entier et a l'arrondi à 10^{-3} près d'un nombre décimal. Tracer sur le nuage de points obtenu au 1°, la courbe de la fonction qui à tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,50]$, associe y.

7° a) Déterminer le taux de glycémie pour $x = 8$.

b) On suppose que le taux de glycémie est normal lorsqu'il est inférieur à $1,1$. Au bout de combien de minutes le taux de glycémie du patient est-il redevenu normal ?

Problème : (11 points)

Partie A : (3 points)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \; y'' + 2y' + y = 4e^{-x}.$$

1° On désigne par u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^2 e^{-x}$. Vérifier que u est une solution de l'équation différentielle (E).

2° On pose pour tout réel x, $f(x) = g(x) + u(x)$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : \; y'' + 2y' + y = 0.$$

3° a) Résoudre l'équation différentielle (E').

b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la fonction f solution de (E), telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$.

Partie B : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$.

1° a) Etudier le sens de variations de la fonction f.

b) Etudier les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation la fonction f, puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ où l'unité graphique est 1 *cm*.

2° En remarquant que f est solution de (E), montrer qu'il existe une primitive F de f telle que pour tout réel x on ait : $f'(x) + 2f(x) + F(x) = -4e^{-x}$.

En déduire $F(x)$.

3° a) Soit α un réel strictement supérieur à 2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=2$ et $x=\alpha$

b) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha)$ a une limite réelle en - ∞ ; puis en donner une interprétation graphique.

Partie C : **(3 points)**

Dans cette partie on considère les solutions f_m de l'équation différentielle (E) définie par : $f_m(x)=(2x^2-3x+m)e^{-x}$, où le paramètre réel m est donné par le résultat du lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1° Calculer la fonction dérivée de la fonction f_m puis vérifier que f_m est strictement décroissante si et seulement si $m \geq \frac{25}{8}$.

2° En déduire que la probabilité que la fonction soit strictement décroissante à chaque lancer du dé est $p=\frac{1}{2}$.

3° On lance trois fois de suite le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fonctions f_m strictement décroissantes.