Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

<u>Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.</u>

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$:

$$|f'(t)| \leq M$$

2. Que vaut : $\displaystyle\lim_{k \to +\infty,\, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t)\, e^{i\,k\,t}\, dt$?
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty,\, k \in \mathbb{N}} \int_a^b f(t)\, e^{i\,k\,t}\, dt = 0$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}\, dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,n\,t)}{t}\, dt$$

1. (a) *i.* Déterminer :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}$$

ii. Déterminer :

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}$$

iii. Etudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

(b) Que vaut I_1 ?

(c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité

$$\sin((2\,n+2)\,t) - \sin(2\,n\,t)$$

en fonction de $\cos((2\,n+1)\,t)$ et $\sin t$.

(d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

2. Etudier la convergence des intégrales J_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

3. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Que vaut : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \{J_n - I_n\}$? On pensera à utiliser le préambule.

5. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente (on pourra effectuer une intégration par parties).

   (b) Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

   (on pourra utiliser un changement de variables)

   (c) Que vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \quad ?$$

Partie II

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$\int_\pi^{n\,\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\,\pi} - \frac{1}{\pi} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

   (b) Etudier la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$, puis de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\, dt\right)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, et conclure sur la convergence de :

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Dans ce qui suit, a désigne un réel strictement positif.

2. (a) Montrer que la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n\, a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)\,!}$$

   est absolument convergente.

(b) Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{lllll} \psi & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ & & t & \mapsto & \psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est développable en série entière, de rayon de convergence infini.

(c) Montrer que :

$$\int_0^a \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)\,(2\,n+1)\,!}$$

Dans ce qui suit, la partie réelle d'un nombre complexe z sera notée $\mathcal{R}e\,(z)$.

3. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle complexe, en précisant : le rayon de convergence, et le domaine de convergence.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul N :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, a^n}{n\,!}\, \mathcal{R}e\, \left(e^{-i\,n\,t}\right)\, dt \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n\,!}$$

(c) Exprimer, pour tout réel t de l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, à l'aide de la somme d'une série :

$$e^{-a\,e^{-i\,t}}$$

(d) Calculer, pour $p = 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\, \left(e^{-i\,p\,t}\right)\, dt$$

puis, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\, \left(e^{-i\,n\,t}\right)\, dt$$

(On pensera à distinguer les cas, en fonction de la parité de n)

(e) En déduire l'expression de la partie réelle de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\,e^{-i\,t}}\, dt$ en fonction de la somme d'une série.

(f) On pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\,\cos t}\, dt$.

i. Etudier la continuité de l'application F sur $[0, +\infty[$.

ii. Déterminer le sens de variation de la fonction qui, à tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, associe : $e^{-a\,\cos t}$.

iii. Montrer que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\,\cos t}\,dt \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

iv. En déduire la valeur de :

$$\lim_{a\to+\infty} F(a)$$

(g) Déterminer, pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $e^{-a\,e^{-i\,t}}$.

(h) Montrer que :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(e^{-a\,e^{-i\,t}}\right)\,dt \right| \leq F(a)$$

et en déduire :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(e^{-a\,e^{-i\,t}}\right)\,dt$$

(i) Retrouver, à l'aide des résultats précédents, la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Ce problème met en œuvre des techniques d'analyse classique permettant de calculer, par plusieurs méthodes, l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$*, qui intervient, notamment, dans l'étude des phénomènes ondulatoires.*

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1120 – D'après documents fournis