e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \, | \, \rangle$.

Soit $\mathscr{C} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \lambda \geqslant 0$

(3) $\exists B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

2. Soient J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha + 1)\, I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.

2.1. Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.

2.2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n - 1$.

3. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A.

3.1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{B} = (u_1, ..., u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.

3.2. Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i$.

Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Démontrer que : $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (i \neq j \Longrightarrow a_{ij} < 0)$.

a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.2.**

4.1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille $(z_1, ..., z_{n-1})$ est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\, z_i = 0$.

4.1.1. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i = 0$.

4.1.2. En utilisant le produit scalaire $\displaystyle\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i \, , \, z_n \right\rangle$, conclure.

4.2. Prouver enfin que : $\mathrm{rg}(A) \geqslant n - 1$.

Exercice 2.

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r-k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

7. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est : $b_{ij} = \mathbb{P}([(X,Y) = (i,j)])$.

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\mathbf{tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathscr{M}_n$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n$.

$\mathscr{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n$, $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n$ et $\mathscr{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n$.

Question de cours : Donner sans démonstration les dimensions des espaces vectoriels $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathscr{M}_2$ constitué de matrices diagonalisables.

2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ contenu dans $\mathscr{D}_2$.

3. $\mathscr{D}_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$? Justifier.

On pourra utiliser des arguments de dimension.

4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$.

5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2 \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2 \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

5.1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathscr{M}_2$ et F un fermé de $\mathscr{M}_2$.

5.2. Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathscr{D}_2 \subset F$

5.3. $\mathscr{D}_2$ est-il un fermé de $\mathscr{M}_2$? un ouvert de $\mathscr{M}_2$? Justifier.

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

1. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ définies par :

- $a_{11} = a_{12} = 1, a_{22} = -1$ et $a_{ij} = 0$ sinon
- $b_{11} = -1, b_{12} = b_{22} = 1$ et $b_{ij} = 0$ sinon

1.1. Vérifier que A et B sont diagonalisables.

1.2. $\mathscr{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$? Justifier.

2. Soit $N \in \mathscr{M}_n$, antisymétrique.

Démontrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de N est inclus dans $\{0\}$.

(*On pourra calculer le produit matriciel* ${}^tXNX$ *pour un vecteur* X *de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

3. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ contenu dans $\mathscr{D}_n$. Déterminer $S \cap \mathscr{A}_n$.

En déduire la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel S. On donnera un exemple d'un sous-espace réalisant cette condition.

4. Soit une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On note f_P l'application linéaire qui à une matrice M de $\mathscr{M}_n$ associe la matrice $P^{-1}MP$.

4.1. Vérifier que f_P est un automorphisme de $\mathscr{M}_n$ et expliciter f_P^{-1}.

En déduire la dimension de $\mathscr{S}_P = f_P(\mathscr{S}_n)$.

4.2. Prouver que l'on a : $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$

4.3. Démontrer enfin que : $\mathscr{D}_n = \displaystyle\bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P$

5. On note $\left\{E_{ij},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right\}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n$ où E_{ij} est la matrice de $\mathscr{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

5.1. Donner sans démonstration une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathscr{S}_n$.

5.2. Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $i < j$, on pose $T_{ij} = 4E_{ji} + E_{ij}$.

Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1, ..., 1, 2, 1, ..., 1)$ où le 2 est à la j-ième position.

Décomposer la matrice $P^{-1}T_{ij}P$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_n$. On pourra utiliser l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à T_{ij}.

Justifier alors que la matrice T_{ij} est diagonalisable.

5.3. Soit $\mathscr{T} = \text{Vect}(T_{ij},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j)$. Prouver que $\mathscr{M}_n = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n$.

En déduire une base de $\mathscr{M}_n$ constituée de matrices toutes diagonalisables.

5.4. Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$.

EXERCICE 4.

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Ecrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.

Par exemple, si `L=[0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3. Ecrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur

`M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0,M]\!]$, `T`$[i]$ est le nombre d'occurences dans la liste `L` de l'entier i.

Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4.

4.1. Soit `L` une liste d'entiers naturels. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

4.2. On veut que `n` soit indépendant de `M`.

Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit A une liste d'entiers. On définit alors la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la liste A par récurrence comme suit

- $L_0 = A$.
- Si L_n est construite, alors :
  - on détermine $T_n = \texttt{nb\_oc}(L_n)$.
  - on détermine $I_n = \texttt{ind}(T_n)$.
  - si $I_n = [i_1, ...i_r]$, alors $L_{n+1} = [T[i_r], i_r, \ldots, T[i_1], i_1]$

Par exemple, si $A = [4,4,1,2]$:

- $L_0 = [4,4,1,2]$
- $L_1 = [2,4,1,2,1,1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)
- $L_2 = [1,4,2,2,3,1]$ (il y a un « 4 » , deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

5.1. On donne `A = [2,0,4,1,3,3,2,3,1,1]`. Déterminer L_3 et L_{2018}.

5.2. On donne `B = [2,4,1,1,1,2]`. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.3. On donne `C = [2,4,1,0]`. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.4. Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en argument une liste `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément $\texttt{L}_n$ de la suite de Robinson associée à `A`.