CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE n°1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit un entier n strictement positif.

   a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$.

   b) En effectuant le changement de variables $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du$ en fonction de l'intégrale I_n.

   c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0,\quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$

2) Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du.$$

   a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du$.

   b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

4) a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).

   b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x} dt \quad \text{pour } |x| < R.$$

EXERCICE n°2

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \qquad \forall (x, y) \in E \times E,\ (u(x)|y) = -(x|u(y))$$

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

   a) Etant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j) −ème coefficient de A. Justifier :

   $$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i)$$

   b) En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2) Montrer que l'entier n est un nombre pair.

   Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice A.

3) On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4) Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5) On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

   a) Montrer que la dimension de F est égale à 2.

   b) Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^{\perp}$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^{\perp}}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$.

   c) Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

   Indication : On pourra considérer les vecteurs $e_1' = \dfrac{1}{\|x\|}x$ et $e_2' = \dfrac{1}{a\|x\|}u(x)$.

   d) Montrer que l'endomorphisme $u_{F^{\perp}}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6) On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).

   Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}''$ de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE n°3

Première partie.

Soit un réel $a \in]0,29[$, on considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ H(t) = 10t^3 + 31t^2 + 71t - a$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel noté $\ell \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que : $H(\ell) = 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

   Pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.

   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}$$

   b) Déterminer le sens de variation de l'application $f \quad : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{H(t)}{H'(t)} \end{array} \right.$

   En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$$

   c) Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \left|H\left(\ell\right) - H(u_n) - (\ell - u_n) H'(u_n)\right)\right| \leqslant 46\,|u_n - \ell|^2$$

   d) En déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{46\,|u_n - \ell|^2}{71}$$

   puis que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{7\,|u_n - \ell|^2}{10}$$

   e) Pour tout réel $a \in]0,29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de ℓ à 0.03 près.

3) Application informatique. On utilisera le langage python sans aucune bibliothèque supplémentaire.

Ecrire une fonction *suite(a,n)* en langage python qui prend en entrée le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 2) en fonction de a.

Deuxième partie.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux réels a et b strictement positifs et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(X=0) = \dfrac{a}{100} \\ P(X=1) = \dfrac{b}{100} \\ P(X=2) = \dfrac{2}{5} \\ P(X=3) = \dfrac{21}{100} \\ P(X=4) = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [0,1],\ G_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n)t^n$$

1) Déterminer la relation reliant les réels a et b.

2) Déterminer la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X.

3) On suppose qu'une population évolue par générations. Etant donné un entier naturel $n \geqslant 1$, on note Z_n la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus de la n-ième génération. Le nombre de descendants de chaque individu d'une génération quelconque suit la loi de la variable aléatoire X. On pose $Z_0 = 1$.

   On admet que pour tout entier naturel n, la fonction génératrice G_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n vérifie la relation de récurrence :

$$G_{Z_{n+1}} = G_X \circ G_{Z_n}$$

   Dans cet exercice, on s'intéresse à la probabilité d'extinction de la population à long terme, ce qu'on mesure par le comportement asymptotique de la suite $(P(Z_n = 0))_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = P(Z_n = 0)$.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de la fonction génératrice G_{Zn}.

   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

   c) Montrer que $G_X\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Montrer alors que la suite (w_n) est convergente vers un réel noté $L(a)$ appartenant à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

   d) Montrer que le réel $L(a)$ est égal au réel ℓ de la partie I, en déduire une approximation de la probabilité $L(a)$ d'extinction de la population à long terme en fonction de a.

EXERCICE n°4

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

A New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

A chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit l un entier naturel non nul. Un trajet de l étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_l)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et l, $u_i = E$ si au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'est et $u_i = N$ si au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le nord

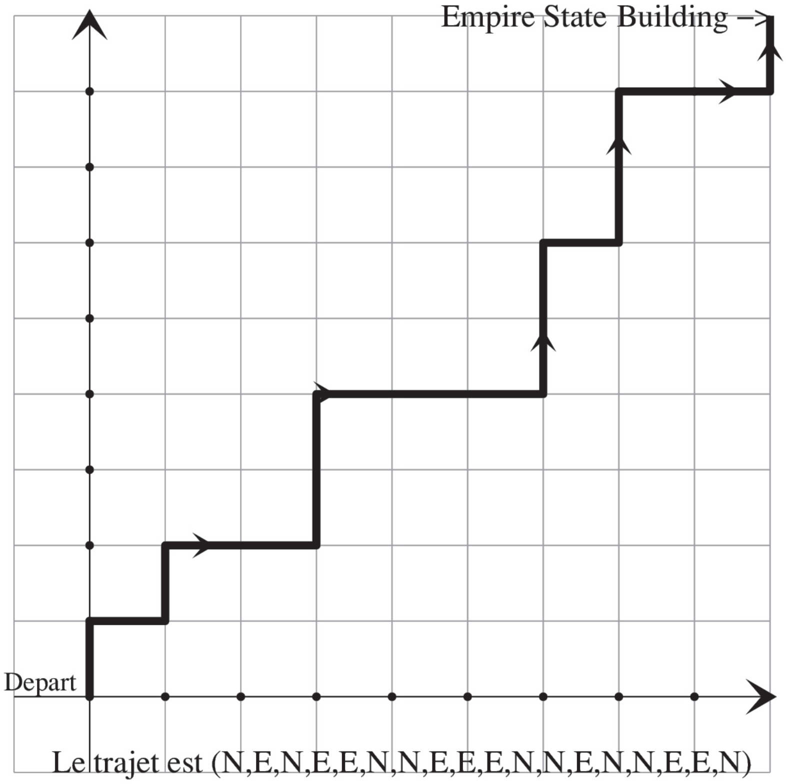
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de l étapes (l est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant l$ définies par récurrence par :

$x_0 = y_0 = 0$

pour $1 \leqslant k \leqslant l$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si } u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si } u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



1) a) Ecrire en langage Python une fonction *deplacement(L,a,b)* dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L = "N"$ et $(a+1, b)$ si $L = "E"$.

b) Ecrire une fonction $chemin(m)$ où m est un chaîne constituée des caractères $"N"$ et $"E"$et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2) a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement l étapes où $l \in \mathbb{N}^*$.

b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.

c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'évènement " Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$." On pourra noter N_k l'évènement : "à l'étape k, le déplacement se fait vers le nord" et E_k l'évènement contraire de l'évènement N_k.

a) Calculer la probabilité de l'évènement U_1.

b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.

c) Soit $n \geqslant 2$. On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$

puis que :

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$$

4) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = P(U_n)$.

a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ v_{n+1} = (2n-1)\,v_n - (2n+1)\,v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire?
