

**1.1.EPREUVE DE MATHEMATIQUES-SERIE D****REPUBLIQUE GABONAISE  
DIRECTION DU BACCALAUREAT****2015 – MATHEMATIQUES  
Séries : D  
Durée : 4 heures  
Coef. : 4***L'usage de la calculatrice est autorisé***Exercice 1 (5 points)**

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 9x^2 + 6x.$$

- 1) Soit  $h$  un polynôme défini par  $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels.  
Déterminer  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $h$  soit solution de  $(E)$ .
- 2) On pose  $F = f - h$ .
  - a) Démontrer que si  $f$  est solution de  $(E)$  alors  $F$  est solution de  $(E') : y'' - 3y' + 2y = 0$ .
  - b) Réciproquement démontrer que si  $F$  est solution de  $(E')$  alors  $f$  est solution de  $(E)$ .
- 3) Résoudre l'équation différentielle  $(E')$ .
- 4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
- 5) Déterminer la solution particulière de  $(E)$  vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 3$ .

**Exercice 2 (5 points)**

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant :  $|z - 1| = |z - i|$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant :  $|z - 2| = 5$ .
3. Soit  $T$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(-2x + 3; -2x - 6)$ .
  - a) Déterminer la nature de  $T$  et préciser ses éléments caractéristiques.
  - b) Donner l'écriture complexe de  $T$ .
4. On appelle respectivement  $(E_1)$  et  $(E_2)$  les ensembles des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  vérifiant :  
 $(E_1) : (x - 2)^2 + y^2 = 2$ .  
 $(E_2) : y - x = 0$ .
  - a) Déterminer l'image  $(E'_1)$  de  $(E_1)$  par  $T$ .
  - b) Déterminer l'image  $(E'_2)$  de  $(E_2)$  par  $T$ .
5. En déduire l'ensemble des points  $K$  appartenant à  $(E'_1)$  et  $(E'_2)$ .

**Problème (10 points)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1-x)^2 e^x$ . On note  $(C_f)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique : 2 cm)

**Partie A : Etude de la fonction  $f$ .**

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. a) Montrer que pour tout réel  $x$  non nul,  $f(x) = x^2 e^x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ .  
b) En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
3. a) Déterminer  $f'(x)$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x)$  a le même signe que  $(x^2 - 1)$ . Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

**Partie B : Etude graphique de  $(C_f)$  et calcul d'aire.**

1. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.
2. Pour tout réel  $x$ , on pose :  $k(x) = f(x) - (-x + 1)$ .  
a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $k(x) = e^x(1-x)(1-x-e^{-x})$ .  
b) Etudier les variations de la fonction  $h: x \mapsto 1-x-e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
c) Calculer  $h(0)$ , puis donner le signe de  $h(x)$  pour tout réel  $x$ .  
d) Dresser le tableau de signe de  $k(x)$  et en déduire la position relative de  $(C_f)$  et  $(T)$ .
3. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (On donnera les valeurs de  $f(x)$  à  $10^{-1}$  près).

| $x$    | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|--------|----|----|----|----|----|-----|---|-----|---|
| $f(x)$ |    |    |    |    |    |     |   |     |   |

4. Tracer avec soin dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $(T)$  et  $(C_f)$
5. Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
6. Soit  $\mathcal{D}$  le domaine plan délimité par  $(C_f)$ ,  $(T)$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ . On note  $\mathcal{A}$ , l'aire de  $\mathcal{D}$ .

Hachurer proprement  $\mathcal{D}$  sur la représentation graphique et calculer en  $\text{cm}^2$  la valeur exacte de  $\mathcal{A}$ .