Exercice I / 5 points

1. Dressons le tableau des effectifs de cette série regroupé en classe **1,5 pts**

Classes	**[20,25[**	**[25,30[**	**[30,35[**	**[35,40[**	**[40,45[**	**[45;50[**
Effectifs	**3**	**8**	**10**	**10**	**7**	**2**

2. Construisons le polygone des effectifs cumulés décroisant **1,5 pt**

3. Détermination graphique et par calculs de la médiane de cette série statistique **1 pt**

• Graphiquement (voir graphe)

• Par calcul, on a, par interpolation linéaire, puisque $20 \in]19, 29[$, on a

$\frac{19-29}{35-30} = \frac{19-20}{35-\mathrm{Me}} \Rightarrow \mathrm{Me} = 34,5$ **ans**

4.a) Détermination du nombre de comités possibles

$C_{40}^{4} = \frac{40!}{36!4!} = 91390$ **comités 0,5 pts**

4.b) Déterminons le nombre de comités comportant 2 femmes **0,5 pt**

$C_5^2 C_{35}^2 = 5950$ **comités**

Exercice II / 4 points

ABC est un triangle tel que AB=4, BC=7 et AC=9

1.a) Montrons que **0,75 pt**

$BC^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$

$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BC^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$

1.b) Déduisons-en la valeur de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ **0,5 pt**

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2} = 24$

2. Calculons la valeur du $\cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$ **0,75 pt**

$\cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

3.a) Calculons la valeur de $\cos 3\alpha$ **1 pt**

$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = 4(\cos\alpha)^3 - 3\cos\alpha = -\frac{22}{27}$

3.b) Résolvons dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos 3x = \frac{2}{3}$ **1 pt**

$$\cos 3x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} 3x = \alpha + 2k\pi \\ 3x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k \in Z$$

L'ensemble solution dans $[0, 2\pi[$ est

$\{\frac{\alpha}{3}; \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}; \frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}; -\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}; -\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}; -\frac{\alpha}{3} + 2\pi\}$

Problème

Partie A

1. Déterminons l'ensemble de définition de f

$Df = R - \{-1\}$

2. Déterminons le signe de f(x) pour $x \in]-1; +\infty[$ **0,25 pt**

Pour $x \in]-1; +\infty[f(x) \prec 0$

3. Déterminons une asymptote à (ξ_f) 0,25 pt

(ξ_f) a pour asymptote verticale la droite d'équation x=-1

4. Déterminons une équation de la tengante a (ξ_f) au point d'abscisse -2 0,5 pt

Une équation de la tengante à (ξ_f) au point d'abscisses -2 est : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ cette équation sera alors $y = 2$

5.a Montrons qua (a, b, c) est solution du système d'équation $\begin{cases} y + z = -2 \\ x - z = 0 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases}$

D'après le tableau de variation de f, f(0)=-2 ; f'(0)=0 et f(-2)=2 avec

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ et $f'(x) = a + \frac{c}{(x+1)^2}$ on retrouve le système d'équation

5.b Déduisons-en a, b et c **1 pt**

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

6.a Montrons que la droite d'équation y=-x-1 est asymptote à (ξ_f) en $-\infty$ et $+\infty$ **0,5x2=1 pt**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) -(-x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1} \to 0$ **donc y=-x-1 est asymptote à (ξ_f) en $-\infty$**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) -(-x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1} \to 0$ **donc y=-x-1 est asymptote à (ξ_f) en $+\infty$**

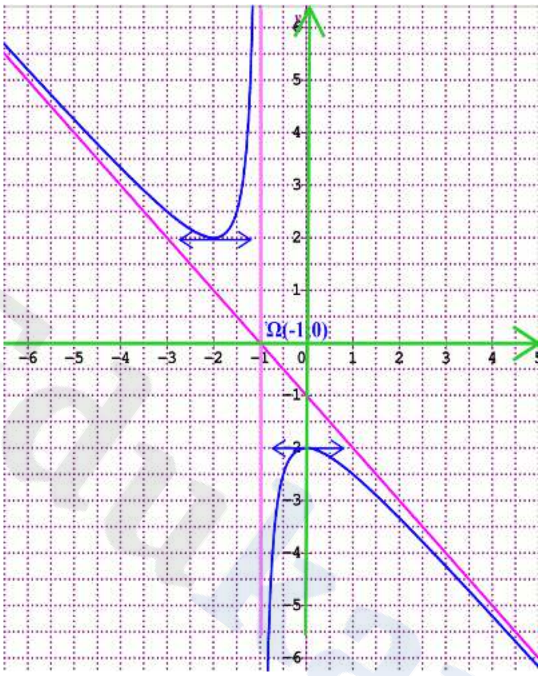
6.b Montrons que le point $\Omega(-1, 0)$ est centre de symétrie de (ξ_f) **1 pt**

Il suffit de vérifier que

$f(-1-x) + f(-1+x) = 0$

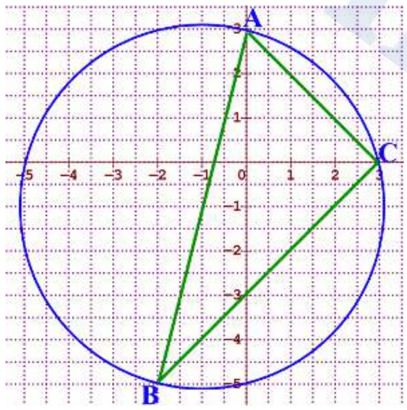
De ce qui précède, nous pouvons conclure que $\Omega(-1, 0)$ est centre de symétrie à la courbe **1 pt**

6.c Construisons (ξ_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$



Partie B

1. Plaçons les points A(0;3), B(-2;-5) et C(3 ;0) **0,75 pt**



2. Donnons la nature du triangle ABC **0,5 pt**

$AB = \sqrt{68}$, $AC = \sqrt{18}$ et $BC = \sqrt{50}$ soit $AB^2 = AC^2 + BC^2$ et d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C

3. Donnons que une équation cartésienne de (Γ), le cercle circonscrit au triangle ABC

Soit M(x,y) unpoint de (Γ), $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2IM = AB$ où I est le milieu de [AB], ainsi $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 17$

Donc (Γ) **:** $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 15 = 0$ **0,75 pt**

Partie C

1. Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+1}{2u_n-2} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{2}$

Déterminons son premier terme

$v_1 = \frac{1}{u_1-1} = 1$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 1$ **1 pt**

2. Exprimons (v_n) en fonction de n **1 pt**

$v_n = v_1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1)$

Exprimons (u_n) en fonction de n

$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{n+3}{n+1}$

Exprimons (S_n) en fonction de n **0,5 pt**

$S_n = \frac{n(n+3)}{4}$