

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2019	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE CE	

### Exercice 1

Soit  $(C)$  l'ensemble des fonctions numériques continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $f$  de  $(C)$ , on définit la fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $F(x) = \int_{3x}^x \frac{f(t)}{t} dt$ .

1- Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis calculer sa fonction dérivée  $F'$ .

2-a/ Montrer que si  $f$  est une fonction constante alors  $F$  est aussi une fonction constante puis définir  $F$  dans ce cas.

b/ Définir la fonction  $F$  pour  $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ .

Dans la suite de l'exercice  $f$  est la fonction :  $t \rightarrow \cos t$ .

3-a/ Déterminer les signes de  $F(\frac{\pi}{6})$  et  $F(\frac{\pi}{2})$ .

b/ Montrer que pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$  et que  $F$  est une fonction bornée.

c/ Démontrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\sin x \leq x$ .

d/ Démontrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $F(x) + \ln 3 = -2 \int_{3x}^x \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} dt$

et que  $0 \leq F(x) + 3 \leq 2x^2$ .

En déduire la limite de  $F$  à droite en 0.

4- a/ Etablir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left| F(x) - \frac{3\sin x - \sin 3x}{3x} \right| \leq \frac{2}{3x} \text{ et en déduire la limite de } F \text{ en } +\infty.$$

b/ Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $F'(x) = \frac{4\cos x \sin^2 x}{x}$ .

5- Soit  $F_1$  la restriction de  $F$  à  $]0; 2\pi]$ .

a/ Dresser le tableau de variation de  $F_1$ .

b/ Montrer que l'équation  $x \in ]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$ ,  $F_1(x) = 0$  admet une unique solution.

### Exercice 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique : 2 cm).

Soit  $A_0$  le point d'affixe 2 et  $A'_0$  le point d'affixe  $1 - i\sqrt{3}$  et  $A_1$  le milieu du segment  $[A_0 A'_0]$ .

Plus généralement si  $A_n$  est un point d'affixe  $z_n$  on désigne par  $A'_n$  le point d'affixe

$(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})z_n$  et par  $A_{n+1}$ , le milieu du segment  $[A_n A'_n]$ . On note  $r_n$  et  $\theta_n$ , le module et l'argument de  $z_n$ .

1- Déterminer les affixes des points  $A_1$ ;  $A'_1$ ;  $A_2$  en  $A'_2$ .

2-a/ Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $z_{n+1}$  en fonction  $z_n$ .

En déduire l'expression de  $z_n$  en fonction de  $n$ .

Montrer que  $A_{n+1}$  est l'image de  $A_n$  par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b/ Etablir les expressions de  $r_n$  et  $\theta_n$  en fonction de  $n$ .

c/ Déterminer la limite de  $r_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

d/ Comparer les modules et les arguments de  $z_n$  et  $z_{n+6}$ .

3- a/ Etablir que  $A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1} A_n$ .

b/ Déterminer en fonction de  $n$ , la longueur  $d_n$  de la ligne brisée  $A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$ .

c/ Calculer la limite de  $d_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## Problème

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble  $(\Gamma)$  des points de l'espace équidistants de deux droites  $(D)$  et  $(D')$  non coplanaires et orthogonales.

### A.

1-a/ Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan  $\varepsilon$  laisse invariante une droite donnée.

b/ Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites  $(D)$  et  $(D')$ .

On note  $(P)$  le plan contenant la droite  $(D)$  et orthogonale à  $(D')$  en  $B$ .  $(P')$  le plan contenant la droite  $(D')$  et orthogonale à  $(D)$  en  $A$ .

2-a/ Déterminer l'intersection des plans  $(P)$  et  $(P')$ .

b/ Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des vecteurs directeurs de  $(D)$  et  $(D')$  respectivement.

Que peut-on dire de la droite  $(AB)$  et du vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  ?

3- Montrer que  $(\Gamma)$  admet les plans  $(P)$  et  $(P')$  comme plans de symétrie et la droite  $AB$  comme axe de symétrie.

4- Montrer que l'intersection de  $(\Gamma)$  avec l'un quelconque des plans  $(P)$  et  $(P')$  est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### B.

La droite  $(D)$  passe par le point  $A$  de coordonnées  $(0, 0, 1)$  et admet comme vecteur directeur  $\vec{u}$  tel que  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ . La droite  $(D')$  passant par  $B$  de coordonnées  $(0, 0, -1)$  et admet comme vecteur directeur  $\vec{v}$  tel que  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ .

1-a/ Vérifier que  $(D)$  et  $(D')$  sont orthogonales et non coplanaires.

Montrer que le point  $O$  appartient à  $(\Gamma)$ .

b/ Montrer qu'une représentation paramétrique de  $(D)$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $Q$  un point de  $(D)$ .

Exprimer  $MQ^2$ . Soit la fonction :  $t \mapsto MQ^2$ , en déduire la distance de  $M$  à  $(D)$ .

c/ Calculer de même la distance du point  $M$  à la droite  $(D')$ .

d/ En déduire que  $M$  appartient à  $(\Gamma)$  si et seulement si on a :  $xy + 2z = 0$ .

2- Déduire de cette relation :

a/ Que les intersections de  $(\Gamma)$  avec le plan orthogonal à la droite  $(AB)$  sont en général des hyperboles. Précise le cas d'exception.

b/ La nature des intersections de  $(\Gamma)$  avec les plan orthogonaux à l'axe  $(O, \vec{i})$  ou à l'axe  $(O, \vec{j})$ .

### C.

Soit  $M(t)$  le point de  $(\Gamma)$  d'abscisses  $x(t)$  et d'ordonnées  $y(t)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec  $x(t) = 4\cos t$  et  $y(t) = \sin 2t$ .

Lorsque  $t$  varie sur  $\mathbb{R}$ , le point  $M$  décrit une courbe  $(C)$  incluse dans  $(\Gamma)$ .

1-a/ Montrer que la courbe  $(C_z)$  projeté orthogonal de  $(C)$  sur le plan d'équation  $z = 0$  a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

b/ Etudier les positions des points  $M(t)$  et  $M(\pi - t)$ .

c/ Construire  $(C_z)$ . On prendra 2 cm comme unité.

2- On désigne par  $(C_x)$  le projeté orthogonal de  $(C)$  sur le plan d'équation  $x = 0$  et par  $(C_y)$  le projeté orthogonal de  $(C)$  sur le plan d'équation  $y = 0$

Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.

Une étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.