Ministère des Enseignements Secondaires
Inspection Générale des Enseignements
Inspection de Pédagogie/sciences
Section Mathématiques

Examen : Baccalauréat
Épreuve Zéro: Mathématiques
Session : 2021
Série : C/E Durée : 04 heures
Coefficient : 7(C) / 6(E).

EPREUVE ZÉRO

Partie A : Evaluation des compétences (15 points).

Exercice 1 : 03 points

Pour toute fonction continue g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_x^{x+1} g(t)dt$.

1. Justifier que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ etque pour tout réel x , $G'(x) = g(x+1) - g(x)$. **1 pt**
2. En déduire que si g est périodique de période 1 et $\int_0^1 g(t)dt = 0$, alors pour tout réel$x$,G(x)=0. **1 pt**
3. On suppose dans cette question que $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
   Donner le sens des variations de Gsur $\mathbb{R}$. **1 pt**

Exercice 2 : 03 points

On lance trois fois de suite un décubique dont les faces sont équilibrées, et numérotées de 1 à 6. On note à chaque fois le numéro de la face de dessus du dé a, b et$\mathrm{c}$ désignent respectivement les numéros lus au premier, deuxième et troisième lancer respectivement.

1. **a.** Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) :$\mathrm{a}y'' - \mathrm{b}y' + \mathrm{c}y = 0$ sont de la forme $\mathrm{y} = e^x(k_1 cosx + k_2 sinx)$ où k_1 et k_2 sont des constantes réelles si et seulement si 1+i est une solution de l'équation caractéristique associée à (E). **0,5 pt**
   b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pourque les fonctions : $x \mapsto e^x(k_1 cosx + k_2 sinx)$soientles solutions de (E). **1 pt**
2. Calculer la probabilité pour que les solutions de l'équation différentielle $\mathrm{a}y'' - \mathrm{b}y' + cy = 0$ soient de la forme $\mathrm{y} = e^x(k_1 cosx + k_2 sinx)$ où k_1 et k_2 sont des constantes réelles. **1,5 pt**

Exercice 3 : 04 points

f est la fonction définie sur $[0; 1]$par $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

1. Montrer que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$. **0,5 pt**
2. Montrer que pour tout couple $(x; y)$ des réels de $[0; 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$. **0,5 pt**
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. **0,5 pt**
   b. En déduire que (u_n) est convergente. **0,5 pt**
   c. Justifier que pour tout entier naturel non nul n,$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|$. **0,5 pt**

d. En déduire que pour tout entier naturel n,
$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - u_0|et|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. **0,5 pt**

e. De la relation
$u_{p+q} - u_p = (u_{p+q} - u_{p+q-1}) + (u_{p+q-1} - u_{p+q-2}) + (u_{p+q-2} - u_{p+q-3}) + \ldots + (u_{p+1} - u_p)$,
Montrerque pour tout couple $(p\,;q)$ d'entiers naturels,
$|u_{p+q} - u_p| \leq \frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{2^{q-1}} + \frac{1}{2^{q-2}} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\right)$. **1 pt**

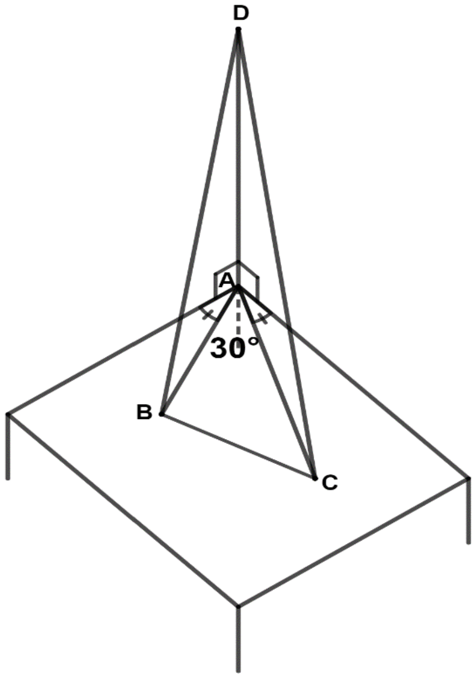
Exercice 4 : **5 points**

ABC est un triangle isocèle en A tel que mes$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ rad ; I le point du plan tel que CAI soit isocèle rectangle et mes$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$ rad, O le point d'intersection des médiatrices respectives des segments $[AI]$ et $[BC]$.

1. Faire une figure. **1 pt**
2. Montrer queABOC est un losange. **0,5 pt**
3. S est la similitude directe de centre O, et transformant A en B ; H le milieu de $[BC]$; C'et H' les images respectives de C et de H par S.
   - **3.1** Déterminer une mesure en radians de l'angle de S. **0,25 pt**
   - **3.2** Montrer que C' est sur la droite (OH). **0,25 pt**
   - **3.3** Montrer que H' est le milieu de $[OB]$. **0,25 pt**
   - **3.4** Montrer que les droites (C'H') et (OB) sont perpendiculaires. **0,25 pt**
   - **3.5** En déduire le centre du cercle circonscrit au triangle OBC et que le triangle BC'C est rectangle et isocèle en C'. **1,5 pt**
4. On suppose dans toute cette question que AB $= 2$.

a.Montrerque HC= $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, puis que HO= $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **0,75 pt**
b.En déduire le rapport de S. **0,25 pt**

Partie B : Évaluation des compétences (5 points).



Situation : Un architecte conçoit un monument à placer sur une surface rectangulaire et horizontale, surélevée par quatre piliers comme ci-contre : AD=3 m, AB=2m, AC=2m et Mes$(\widehat{BAC}) = 30°$.

Ce monument doit être rempli de béton léger, avec des faces latérales à couvrir par des carreaux. À la veille de la réalisation de l'ouvrage, le maire voudrait qu'onprévoit au moment du coulage du monument, un trou permettant plus tard de fixer une tige en fer devant porter le drapeau de la république. Cette tige doit être verticale et s'appuyer sur le centre de la base ABC.

Tâches :

1. Quel volume approximatif de béton doit-on prévoir pour réaliser ce monument. **1,5 pt**
2. Pour quelle surface approximative, doit-on prévoir des carreaux ? **1,5 pt**
3. Où doit-on faire passer le trou de fixation de la tige sur laface BCD ? **1,5 pt**

Présentation générale : **0,5 pt**