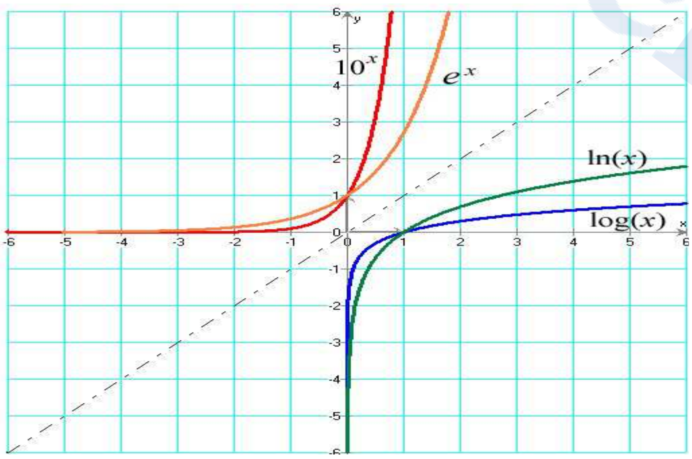
Annales corrigées

BAC C&D

AN-NOUR MATHEMATIQUE

3è édition Volume II

$$y'' - 2y' + y = -x + 3$$



Auteur : Mr *Moussa Abdoulaye Diallo*

03/09/2013 à Niamey (Niger)

As salam aleykoum war rah matoul la wa barkatouhou

Au nom d'Allah, L'infiniment Miséricordieux, Le Très Miséricordieux

Mes chers frères et sœurs

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

Gloire et pureté à mon Seigneur le Très Grand, béni soit à mes parents et les remerciements à mes frères et sœurs. **Chers élèves et enseignants, je vous demande de me pardonner de vous avoir vendus des documents portant des erreurs ou en parties corrigés. Encore tous les élèves ou enseignants que je les ai commis du tort, svp je vous pardonne.**

Confiez-vous à enseignants pour les réponses et détailles de ces exercices que je vous ai proposés. Si vous en trouverez, svp contacter moi par sms au 90 10 89 59 en précisant l'exercice concerné.

An-nour Mathématique, **3e édition (Volume 2)**, est une annale unique conforme au programme officiel nigérien, axé sur les chapitres suivants : les Fonctions logarithmes et exponentielles. Il en a 200 exercices types bac corrigés. En effet ces exercices tirent leurs sources dans les documents des élèves tels que les collections : IRMA, Delagrave, Terracher, Di mathème, Cube, Radial, Hachette, Durrande, CIAM, Vuibert, Bordas, les examens, les planches d'exercices…. pour ne citer que ceux-là. Ces exercices sont très pertinents.

Nous sommes ouvert à tout ce qui désire se lancer dans ce type de projet, d'éditer un ouvrage de mathématique au collège ou au lycée. D'ailleurs, une annale corrigée de Physique-Chimie est en cours, nous attendons votre participation à son élaboration.

Nul n'est parfait, la perfection appartient à Allah et Il l'a donne à celui qu'Il veut, donc nous espérons nos suggestions afin d'aider nos frères et sœurs à réussir leur examen.

Je vous souhaite bon usage et sollicite vos invocations.

A ma femme, Maryam Abdou, je t'aime par Allah.

Auteur : Mr *Moussa Abdoulaye Diallo*

AVANT PROPOS

Gloire et pureté à mon Seigneur le Très Grand, béni soit à mes parents et les remerciements à mes frères et sœurs.

Tous les remerciements à mes frères de la Mosquée de l'UAM de Niamey aux deux premier rang le frère Lawali Salifou qui m'a aidé à avoir l'outils informatique et le tonton Moussa Mahamadou en plus de l'outil informatique il est aussi mon producteur, qu'Allah lui fasse miséricorde.

J'en suis à la troisième (3è) édition d'An-nour Mathématique.

Chers élèves, nos enseignants sont les meilleurs au monde, faites leurs confiances.

Tous les remerciements sont à mes enseignants :

- ***Dr Otto Adamou à l'université de Niamey (FS)***
- ***Mr Mali Abdoulaye au Lycée municipal de Niamey***
- ***Mr Alako Adji au Lycée de Doutchi***
- ***Mr Sani Mainassara au Lycée Sarawnia de Dosso***
- ***Mr Dingamyo N'gonn Dingam au CES sony à Niamey (32 ans d'expérience d'enseignement)***
- ***Mr Abdoul Latif Waidi au Collège Mariama à Niamey (26 ans d'expérience d'enseignement).***

<u>AUTEUR</u> Mr MOUSSA ABDOULAYE DIALLO

SVP MAITRISER TOUS LES COURS AVANT DE COMMERCER A TRAITER LES EXERCICES

ET CHERCHER

AN-NOUR (3è) édition (volume 1

POUR COMPLETER VOTRE FORMATION.

BON USAGE ET SOLLICITE VOS INVOCATIONS

Sommaire

pages

AUTEUR Mr MOUSSA ABDOULAYE DIALLO

Généralités sur les fonctions

⌧ **Définition**

⌧⌧ **Soit *D* un intervalle ou une réunion d'intervalles de IR.**
Définir une fonction *f* de D_f sur IR, c'est associer à chaque réel *x* de D_f un réel unique noté *f* (*x*).
L'ensemble D_f s'appelle domaine de définition.

⌧⌧ **On appelle image de *x* par *f* le nombre *f* (*x*).**
Pour *y* ∈ IR s'il existe *x* ∈ D_f tel que *f* (*x*)=*y*, le nombre *x* est appelé antécédent de *y* par *f*. (un nombre *y* peut avoir plusieurs antécédents).

⌧⌧ **La représentation graphique ou la courbe représentative de la fonction *f* est l'ensemble des points de coordonnées (*x*; *f* (*x*)) où *x* est un élément de D_f.**

⌧ **Sens de variation d'une fonction**

Soit *f* une fonction définie sur D_f et *I* un intervalle de D_f.

⌧⌧ **On dit que la fonction *f* est croissante sur I si : Pour tout x_1, x_2 dans *I*, tels que $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.**

⌧⌧ **On dit que la fonction *f* est décroissante sur *I* si :Pour tout x_1, x_2 dans I, tels que $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.**

⌧⌧ **On dit que la fonction *f* est constante sur *I* si : Il existe un nombre réel *k* tel que pour tout réel *x* de *I*, *f* (*x*)=*k*.**

⌧ **Maximum, minimum, fonction majorée, minorée, bornée**

Soit *f* une fonction définie sur *D*, I un intervalle de *D* et *a* un réel de I.

⌧⌧ **On dit que *f* (*a*) est le minimum de *f* sur I si : Pour tout *x* dans I, *f* (*x*) ≥*f* (*a*) (*f* (*a*)est la plus petite valeur de la fonction).**

⌧⌧ **On dit que *f* (*a*) est le maximum de *f* sur I si : Pour tout *x* dans I, *f* (*x*) ≤*f* (*a*) (*f* (*a*)est la plus grande valeur de la fonction).**

⌧⌧ **On dit que *f* est majorée par le réel *M* sur *D* si pour tout réel *x* de *D*, *f* (*x*) ≤*M* .**

⌧⌧ **On dit que *f* est minorée par le réel *m* sur *D* si pour tout réel *x* de *D*, *f* (*x*) ≥*m* .**

⌧⌧ **Une fonction *f* majorée et minorée est bornée sur *D*.**

⌧ **Variation et extremum**

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I alors :

⌧⌧ **Si $f'(x) = 0$ pour tout *x* appartenant à I alors *f* est constante sur I.**

⌧⌧ **Si $f'(x) \geq 0$ pour tout *x* appartenant à I alors *f* est croissante sur I.**

⌧⌧ **Si $f'(x) > 0$ pour tout *x* appartenant à alors *f* est strictement croissante sur I.**

⌧⌧ **Si $f'(x) \leq 0$ pour tout *x* appartenant à I alors *f* est décroissante sur I.**

⌧⌧ **Si $f'(x) < 0$ pour tout *x* appartenant à alors *f* est strictement décroissante sur I.**

Définition.

On appelle polynôme une fonction définie comme somme de monômes.
On appelle fonction rationnelle, le quotient de deux polynômes.

⌧ **Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si *f* admet un extremum local en x_0 alors$f'(x_0) = 0$.**

⌧ **Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. Si la fonction dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe alors *f* admet un extremum local en x_0.**

⌧ **Théorème des valeurs intermédiaires :**

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I, *a* et *b* deux réels de I.
Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que *f*(*c*) = *k*.

⌧ **Théorème des valeurs intermédiaires (bis) :**

Soit *f* une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I, *a* et *b* deux réels de I. Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), il existe un unique réel *c* compris entre *a* et *b* tel que *f*(*c*) = *k*.

Fonction ln, exp

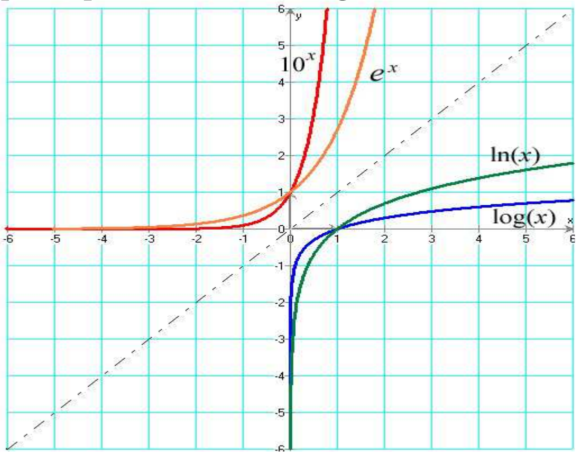
Asymptote verticale ssi $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = \infty$: la droite verticale d'équation $x = a$ est alors asymptote à Cf.

⌧ **Asymptote horizontale ssi $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = b$: la droite horizontale d'équation y = b est alors asymptote à Cf en ∞ .**

⌧ **Asymptote oblique ssi**
$\lim\limits_{x \mapsto \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$: la droite d'équation $y = ax + b$ est alors asymptote à Cf en ∞ ….

Les deux courbes exponentielles (la rouge et l'orange) passent par le point (0, 1). Il en est ainsi quelle que soit la base de la puissance.

Les deux courbes logarithmiques (la verte et la bleue) passent par le point (1, 0). Il en est ainsi quelle que soit la base du logarithme.



Remarques Il existe une symétrie axiale par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

Les fonctions ln(x) et e^x sont réciproques l'une de l'autre. Idem pour log(x) et 10^x.

- $a^x > 0$ pour tout x, si $a > 0$.
- Si $a > 1$, a^x croît extrêmement vite. On parle alors de *croissance exponentielle*.
- À l'inverse, les fonctions logarithmiques croissent très lentement. Elles sont négatives quand $0 < x < 1$

La limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$\ln a^n = n\ln a$	$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$	$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$\ln\frac{1}{a} = -\ln a$

$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x\to\infty} 1/x^n = 0$	$\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x\to 0+} x\ln x = 0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \ \ et \ \ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ \ et \ \ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}}$$

Croissances comparées

Pour lever l'indétermination de limites, on doit penser que le x « l'emporte » sur ln x

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$$

...et a fortiori lorsque x est élevé à une puissance entière. Ainsi, pour tout n entier naturel non nul :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Dérivation de fonctions composées

Si u est une fonction positive et dérivable, la dérivée (ln u)' est égale à u'/u (nommée dérivée logarithmique) et bien sûr une primitive de u'/u est ln $|u|$.

Les limites de la fonction se devinent sur la courbe représentée plus bas :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ \ et \ \ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Croissances comparées, pour n entier non nul (l'exponentielle l'emporte sur la puissance) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty \ \ et \ \ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Très important : la dérivée de exp(u) : $(e^u)' = u'e^u$. Si u est égal à x, u' est donc égal à 1. Si bien que, comme je l'ai indiqué plus haut, $(e^x)' = e^x$.

Méthodes de calcul sur les fonctions.

Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ? on procède à respecter ces conditions suivantes :

☒ les dénominateurs doivent être non nuls
☒ les expressions sous un radical doivent être positives

☒ les expressions dont on prend le logarithme doivent être strictement positives

Comment étudier la parité d'une fonction ?

⊠ Fonction paire : $\forall$ x $\in$ D_f, $f(-x) = f(x)$, donc la courbe de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

⊠ Fonction impaire : $\forall$ x $\in$ D_f, $f(-x) = -f(x)$, donc la courbe de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine du repère : O.

Comment étudier la périodicité d'une fonction ?

⊠ Considérons $a + x \in I$. On dit que f est périodique si et seulement elle admet une période non nulle a telle que $\forall x \in D_f = I, f(x+a) = f(x)$.

Comment démontrer que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie ?

⊠ on vérifie que $f(a+h) = f(a-h)$

Comment démontrer qu'un point I(a,b) est un centre de symétrie ?

⊠ on vérifie que $f(2a-h) + f(h) = 2b$

⊠ on vérifie que $f(a+h) + f(a-h) = 2b$

Comment peut-on montrer qu'une fonction est continue ?

⊠ si f est définie en un point x_0, on applique $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \mapsto x_0} f(x_0) = f(x_0)$.

⊠ si c'est sur un intervalle, on applique les théorèmes généraux, à l'aide des fonctions de référence, du genre « f est continue sur I comme quotient de fonctions continues sur I, avec dénominateur non nul ».

⊠ on montre qu'elle est dérivable.

⊠ si graphiquement sa courbe « ne saute pas ».

Comment peut-on montrer qu'une fonction est dérivable ?

⊠ si c'est en un point x_0, on applique la définition : f est dérivable en x_0 si son taux d'accroissement en x_0 admet une limite.

⊠ si c'est sur un intervalle, on applique les théorèmes généraux, à l'aide des fonctions de référence.

⊠ si graphiquement sa courbe admet en tout point une tangente non verticale.

Comment étudier la dérivabilité en un point x_0 ?

⊠ Appliquer les formules sur les fonctions dérivables en tenant compte de leur condition de validité.

⊠ Si en x_0 les théorèmes ne s'appliquent pas, étudier l'existence du nombre dérivé. Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant x_0.

⊠⊠ Le nombre dérivé à droite de f en x_0 est la limite, notée $f_d'(x_0)$, si elle existe :

$$\lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_d'(x_0).$$

⊠⊠ Le nombre dérivé à gauche de f en x_0 est la limite, notée $f_g'(x_0)$, si elle existe :

$$\lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g'(x_0).$$

<u>NB :</u> la fonction f est dérivable en x_0 si $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.

⊠ Interprétation graphique du résultat :

⊠⊠ une fonction est dérivable en x_0 si C_f admet une tangente non verticale en $A(x_0, f(x_0))$.

⊠⊠ une fonction n'est pas dérivable en x_0 si :

⊠⊠⊠ elle admet une tangente verticale en $A(x_0, f(x_0))$;

⊠⊠⊠ elle admet deux demi-tangentes différentes en $A^-(x_0^-, f(x_0^-))$ et en $A^+(x_0^+, f(x_0^+))$.

Comment peut-on étudier les variations d'une fonction ?

⊠ **Pour déterminer les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.**

⊠ Ceux-là revient à rechercher :

⊠⊠ Ensemble de définition de la fonction f :
⊠⊠ Sens de variation de la fonction f :
⊠⊠ Limite :
⊠⊠ Tableau de variation de la fonction f :

Comment déterminer les points d'inflexion ?

On résout $f''(x_0) = 0$.

Comment peut-on étudier le signe d'une fonction ?

☒ On la factorise et on utilise les règles de signe des fonctions affines (ax + b) ou des fonctions trinômes.

☒ On fait une résolution directe d'inéquation, lorsque par exemple on travaille avec les fonctions exp ou ln : on appliquera alors les règles suivantes : « exp(X) > 0 pour tout réel X » et « ln(X) < 0 sur]0 ;1] »…

☒ Dans certains cas, on pourra se servir des variations de f pour étudier son signe. Si par exemple f est croissante sur IR avec f(1) = 0 alors f est négative avant 1 et positive après.

Comment montrer qu'une fonction f est bijective de l'intervalle I sur l'intervalle J à déterminer ? Soit I un intervalle et soit une application *f* : I⟼IR. On note J = *f* (I). On suppose que la fonction *f* est :

☒ continue sur I

☒ strictement monotone sur I.

☒ alors, on conclut que la fonction *f* réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction *continue* et strictement monotone sur J de même sens que *f* .

Comment déterminer la tangente T à C_f au point M_0 d'abscisse x_0 ?

on appliquer : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Comment déterminer une limite ?

☒ Pour calculer une limite on commence toujours par regarder si c'est une forme indéterminée ou non. (*Les formes indéterminées*1 *sont :* $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \times \infty$ *et* 1^{∞}).

☒ Si ce n'est PAS une forme indéterminée, il n'y a rien à faire de plus. On évoque si nécessaire, un théorème « par somme », « par produit », « par composition » et on donne la valeur de la limite.

☒ Si par contre c'est une forme indéterminée,

☒☒ on peut transformer l'expression pour *lever l'indétermination* en factorisant, en simplifiant, en utilisant l'expression conjuguée s'il y a des racines carrées…etc jusqu'à obtenir une forme qui n'est pas indéterminée.

☒☒ On peut aussi, comme pour les suites, utiliser le théorème des gendarmes ou un théorème de comparaison.

☒☒ Dans le cas d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, on peut essayer de reconnaître la limite d'un taux de variations et interpréter la limite comme une dérivée en un point. En effet, si f est dérivable en a , $\lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \mapsto a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ (On passe d'une formule à l'autre en faisant le changement de variable $x = a + h$ ou $h = x - a$).

☒☒☒☒ Quand on a à chercher une limite et qu'il y a une difficulté, il faut distinguer 2 cas :

☒☒ x tend vers ∞ ($-\infty$ *ou* $+\infty$) : on met alors *x* avec le plus grand exposant possible en facteur et on SIMPLIFIE

☒☒ x tend vers une valeur finie a : on met alors $x - a$ en facteur avec le plus grand exposant possible et on SIMPLIFIE.

Comment déterminer la limite d'une fonction comprenant des logarithmes ?

☒ On utilise dans de nombreux cas le théorème relatif aux limites des fonctions composées.

☒ Dans les cas d'indéterminations, on est amené à utiliser les limites du cours, soit directement, soit après avoir transformé l'écriture de f(*x*) (en mettant, par exemple, *x* ou x^n en facteur).

☒ Il est également possible d'utiliser un changement de variable, mais, dans ce cas, l'énoncé apporte toutes les indications nécessaires.

Comment calculer des limites à l'infini ?

☒ **f étant un polynôme, en l'infini il se comporte comme son monôme de plus haut degré.** Un polynôme de degré n : mettre x^n en facteur

☒ Pour une fonction rationnelle, vous pouvez factoriser le numérateur et le dénominateur par des puissances convenables de x, puis simplifier

☒ Une fonction rationnelle : si le numérateur et le dénominateur se limitent à l'infini $\frac{\infty}{\infty}$, alors vous pouvez appliquer le <u>théorème de l'Hôpital</u> qui consiste à chercher la dérivée du numérateur et celle du dénominateur.

En l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré.

☒ Une fonction irrationnelle : multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

☒ Si les théorèmes des opérations sur les limites ne s'appliquent pas, lorsque la fonction f est :

☒ Si aucune des méthodes précédents ne s'applique, utiliser un théorème de comparaison.

⌧ **Changement de variables – Composition**
Le genre de méthode dont on se sert sans plus s'en rendre compte… De manière générale, ne vous attardez pas dans la rédaction des cas simples, et détaillez de préférence les étapes plus délicates.

⌧ Si aucune des méthodes précédents ne s'applique, utiliser un théorème de comparaison.

Comment lever une forme indéterminée en l'infini ?

⌧ On applique la règle des fonctions rationnelles : « en l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus degré ».

⌧ Si on est en présence de fonctions ln ou exp, on applique les croissances comparées : en gros, « en l'infini l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x », « en l'infini, le logarithme s'incline devant toute puissance de x ».

Comment lever une forme indéterminée en a (fini) ?

⌧ On reconnaît un taux de variation.

⌧ On factorise par x-a numérateur et dénominateur

⌧ On multiplie par la quantité conjuguée

Comment calculer des limites aux points qui annulent le dénominateur ?

⌧ **En l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à celle du quotient de ses monômes de plus haut degré.**
⌧ Calculer la valeur prise par le numérateur.

1. Si elle est différente de 0, la limite est infinie ; étudier le signe du dénominateur.
2. Si elle est égale à 0, factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier.

Comment déterminer les asymptotes à une courbe ?

Une asymptote est en générale une droite, verticale ou oblique (qui comprend le cas horizontal).

⌧ si $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = b$ (b étant un nombre fini) on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une *asymptote horizontale* pour la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque x tend vers ∞.

⌧ si $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = \infty$ (a étant un nombre fini) on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* pour la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque x tend vers a.

⌧ si $\lim\limits_{x \mapsto \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (b étant un nombre fini) on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* pour la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque x tend vers ∞.

Comment démontrer qu'une droite oblique est asymptote à la courbe ?

⌧ La fonction f est représenter par la courbe $\mathcal{C}_f$ et la fonction affine g par la droite D.

⌧⌧ Démontrer que la différence $f(x) - g(x)$ tend vers 0 lorsque x vers l'infini.
⌧⌧ L'étude de signe de cette différence donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Quelles sont les conditions de branches paraboliques ?

⌧ Lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ $(ou\ -\infty)$ à l'infini, il et possible que $\mathcal{C}_f$ n'admette pas de droite asymptote.

⌧ Nous allons présenter ici un autre comportement asymptotique assez fréquent : la présence d'une « branche parabolique ».

⌧⌧ Branche parabolique de direction Oy
$\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

⌧⌧ Branche parabolique de direction Ox
$\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

⌧⌧ Branche parabolique de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \neq 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) - ax = \infty$.

⌧⌧ Asymptote d'équation $y = ax + b$
$\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \neq 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) - ax = b$ avec b est une limite finie.

Comment étudier la position de deux courbes ?

On étudie le signe de la différence f(x) – g(x) :

⌧ Si $f(x) - g(x) > 0$ sur I, alors Cf est au dessus de Cg sur I.

⌧ Si $f(x) - g(x) < 0$ sur I, alors Cf est au dessous de Cg sur I.

⌧ si $f(x) - g(x) = 0$ en x_0, alors Cf et Cg s'interceptent au point d'abscisse x_0 …

Comment montrer qu'une équation admet au moins une solution ?

⌧ si on peut la résoudre, à l'attaque !

⌧ on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

⌧ On l'aborde graphiquement en cherchant les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Comment calculer la dérivabilité d'une fonction réciproque f^{-1}au point d'abscisse x_0 ?

⌧ on applique $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]} = \frac{1}{f'(y_0)}$ ou

⌧ on applique $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0} =$ or

$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y_0 = f^{-1}(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ x_0 = f(y_0) \end{cases}$, en remplaçant on aura $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{y \mapsto y_0} \frac{y-y_0}{f(y)-f(y_0)} = \frac{1}{f'(y_0)}$

Comment déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$?

on trace la droite D d'équation $y = k$, puis on compte le nombre de points d'intersections de D et $\mathcal{C}_f$.

Comment déterminer l'équation d'une droite connaissant les coordonnées de deux points ?

Soient les points $A(x_1;\ y_1)$ et $B(x_2;\ y_2)$ et l'équation de la droite (AB) est de la forme $y = ax + b$ ou a et b sont des réels à chercher.

⌧ on calcule son coefficient directeur $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,

⌧ on calcule b en choisissant une des formules :

Si $A \in (AB) \Leftrightarrow y_1 = ax_1 + b \Leftrightarrow b = y_1 - ax_1$

Si $B \in (AB) \Leftrightarrow y_2 = ax_2 + b \Leftrightarrow b = y_2 - ax_2$.

Comment chercher une nouvelle fonction de f, dans un nouveau repère $(I; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $I(a; b)$?

⌧ Cherchons une équation de $\mathcal{C}_f$ dans le nouveau repère orthonormé $(I; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $I(a; b)$. Si $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{IM} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$, la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ fournit les formules e changement de repère : $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$.

⌧ Alors $M \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow b + Y = f(a + X) \Leftrightarrow Y = f(a + X) - a$ est la nouvelle équation de $\mathcal{C}_f$ dans le nouveau repère orthonormé $(I; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $I(a; b)$.

<u>Plan d'étude d'une fonction.</u> Pour étudier la fonction f, on adopte généralement le plan suivant :

1. Simplifier l'expression du réel $f(x)$ et déterminer l'ensemble de définition D_f de f :
2. Déterminer l'ensemble d'étude E_f, en étudiant la périodicité éventuelle de f et les syméties éventuelles de $\mathcal{C}_f$;
3. Etudier la continuité de f ;
4. Etudier la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée $f\ '$;
5. Chercher les limites éventuelles de f aux bornes des intervalles qui figurent dans E_f ;
6. Faire le tableau de variation ;
7. Etudier les branches infinies ;
8. Etudier les points remarques (points d'inflexion, points d'intersection avec les axes,...) ;
9. Dessiner la courbe représentative de f . tracer d'abord les asymptotes, puis les tangentes parallèles à (x' x), et enfin $\mathcal{C}_f$.

100 exercices corrigés sur les fonctions logarithmes

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Dans les exercices, on considère que le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

<u>Problème 1 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de f : D_f ?**
2. **Montrer que la fonction f définie sur D_f est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.**
3. **Etudier les variations de f définie sur D_f.**
4. **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0, appartient à $]-1;1[$.**
5. **Soit g la fonction réciproque de f.**

a) **Quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g peut-on déduire de l'étude de la fonction f ?**

b) **Montrer que g est dérivable sur IR et que $g' = 1 - g^2$.**

6. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. $D_f = \left\{x / x \in \text{IR}, \frac{1+x}{1-x} > 0\right\} =]-1;1[$
2. **une fonction impaire** $\forall\, x \in]-1;1[,\ f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$, ainsi

• $\forall\, x \in]-1;1[,\ f(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) = -\left[\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right] = -f(x)$, alors f est une fonction impaire. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

3. On fait un changement de variable, $t = \frac{1+x}{1-x}$ en calculant : $\lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = +\infty$ on déduit

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto 0} \frac{1}{2}[\ln t] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \frac{1}{2}[\ln t] = +\infty$. $\quad \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$.

$\forall\, x \in]-1;1[,\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]-1;1[$.

$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$, donc sur $]-1;1[$, il a un unique antécédent. Ainsi elle admet une unique solution $x_0 = 0$.

tableau de variation de f sur $]-1;1[$.

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \quad \nearrow \quad +\infty$	

4. on remarque que $f(0) = 0$. Sur $]-1;0]$, $f(x) \leq 0$ et sur $[0;1[$, $f(x) \geq 0$.

5. On sait que f est continue et strictement croissante sur $]-1;1[$. Elle réalise donc une bijection de $]-1;1[$ sur $J = \text{IR}$. Alors g est continue et strictement croissante sur IR.

a) **propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g :** $D_g = \text{IR}$ comme f on a g est continue et strictement croissante sur IR.

Explicitons g : $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$, donc

$\forall\, x \in \text{IR},\ g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$;

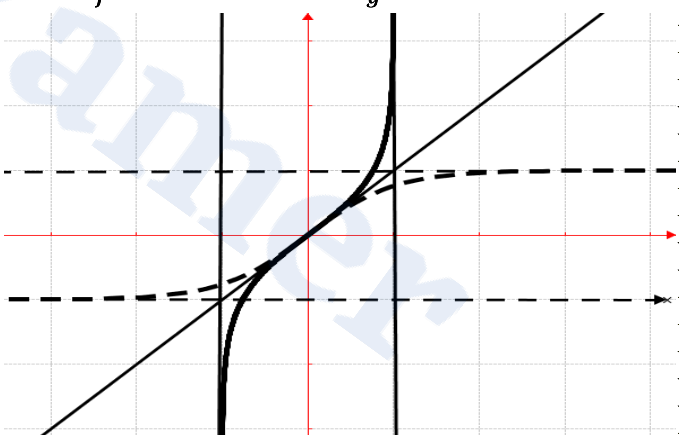
$\forall\, x \in \text{IR},\ g'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$, alors g est continue et strictement croissante sur IR.

$\forall\, x \in \text{IR},\ g(-x) = \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \times \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1} = -\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -g(x)$, alors g est une fonction impaire. Donc $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

b) **g est dérivable sur IR et que $g' = 1 - g^2$:**

$g'(x) = \mathbf{1} - [g(x)]^2 = \mathbf{1} - \left[\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right]^2 = \mathbf{1} - \frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1-e^{4x}+2e^{2x}-1}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\ (vraie)$

6. **$\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}_g$ en trait discontinu.**



<u>Problème 2 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln(x)$.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f : D_f ?**

b) **Etudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.**

c) **Dresser le tableau de variations de f.**

2. **Montrer que admet un point d'inflexion A dont on déterminera ces coordonnées.**
3. **Soit g la fonction de f à $I = [1;+\infty[$.**

a) **Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.**

b) **On note g^{-1} la bijection réciproque de g. Quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g^{-1} peut-on déduire de l'étude de la fonction f ?**

4. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln(x)$.

1.

a) $D_f = \{x / x \in IR, x > 0\} =]0; +\infty[$

b) **limite de f en 0 et en $+\infty$:**

$\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{1}{x^2}\left(x^4 - 1 - 4x^2\ln(x)\right)\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

et $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \left[x^2\left(1 - \frac{1}{x^4} - 4\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\right] = +\infty$

c) **tableau de variations de f** : $\forall\, x > 0, f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} = 2\frac{x^2-2x+1}{x^3} = 2\frac{(x-1)^2}{x^3} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. **point d'inflexion A dont on déterminera ces coordonnées :**

$\forall\, x > 0, f''(x) = 2\frac{2(x-1)x^3 - 3x^2(x-1)^2}{x^6} = \frac{2(x-1)(1-x)}{x^4}$.

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$, donc $A(1; 0)$.

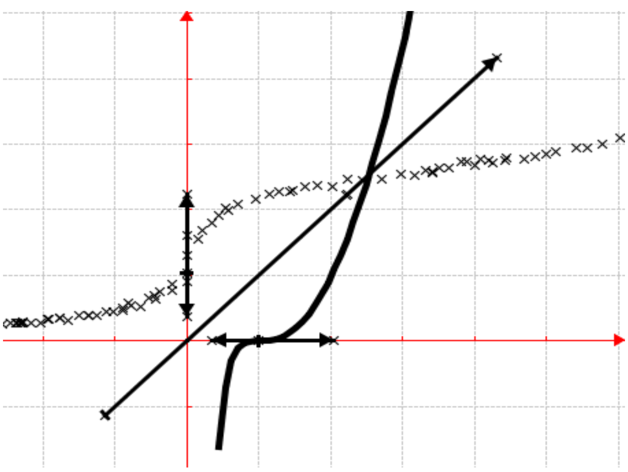
3.

a) g est continue et strictement croissante sur IR. Elle réalise donc une bijection de $[\mathbf{1}; +\infty[$ sur $J = [\mathbf{0}; +\infty[$.

c) **propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g :** $D_g = IR$ comme f on a g^{-1} est continue et strictement croissante sur $[\mathbf{0}; +\infty[$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$+$
$g^{-1}(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4. **$\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}_g$ en trait discontinu.**



<u>Problème 3 :</u> **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - 1$.**

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f : D_f ?**

b) **Etudier les limites de f sur D_f.**

c) **Dresser le tableau de f sur D_f.**

d) **Résoudre dans IR $f(x) = 0$.**

Déterminer le point A, point d'intersection de f par rapport à l'axe des abscisses.

2.

a) **Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g.**

b) **Préciser le domaine définition de g : D_g.**

c) **Etudier les variations de g définie sur D_g.**

3. **Tracer les courbes de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - 1$.

1.

a) $D_f = \{x / x \in IR, x - 1 > 0 \ et \ x + 1 > 0\} =]1; +\infty[$.

b) **Etudier les limites de f sur D_f :**

$\lim_{x \mapsto 1^+} f(x) = -1 + \ln 2 + \ln 0^+ = -\infty$; $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$

c) **Dresser le tableau de f sur D_f :**

$\forall\, x > 1, f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

d) **Résoudre dans IR $f(x) = 0$:**

$\ln(x-1) + \ln(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln[(x-1)(x+$
1=1⟺ln𝑥2−1=1⟺ln𝑒⟺𝑥2−1=𝑒.

$x = -\sqrt{e+1} \notin D_f$ ou $x = \sqrt{e+1} \in D_f$

donc $S_{IR} = \{\sqrt{e+1}\}$.

$\mathcal{C}_f \cap (ox) \Longrightarrow A(\sqrt{e+1}; 0)$.

2.

a) **fonction réciproque g *de* f :**

f est continue est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Donc f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers IR

b) **Préciser le domaine définition de g :** $D_g = IR$

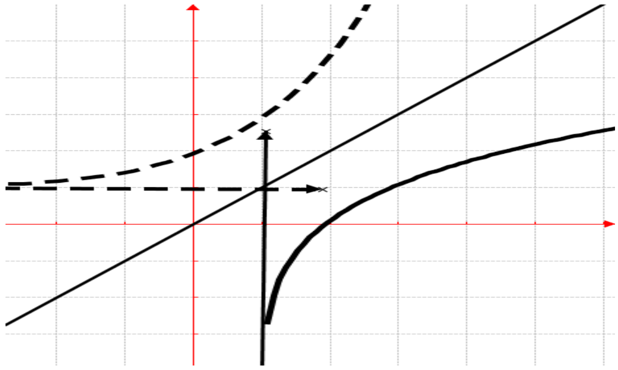
c) **variations de g définie sur D_g :** g est continue est strictement croissante sur **IR**

$$\ln(x^2 - 1) = 1 + y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e^{y+1} + 1}$$

$\forall\, x \in$ **IR**, $g(x) = \sqrt{e^{x+1} + 1}$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

3. $\mathcal{C}_f$ **en trait continu et** $\mathcal{C}_g$ **en trait discontinu**



Exercice 4 : **On considère la fonction** f **définie sur** $[0;+\infty[$ **par** $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. **Montrer que** f **est dérivable sur [0 ; +∞[. Étudier le signe de sa fonction dérivée** f'**, sa limite éventuelle en +∞, et dresser le tableau de ses variations.**
2. **On définit la suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ **par son terme général** $u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.

a) **Justifier que, si** $n\leq x\leq n+1$**, alors** $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

b) **Montrer, sans chercher à calculer** u_n**, que, pour tout entier naturel** n**,** $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

c) **En déduire que la suite** (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

3. **Soit F la fonction définie sur [0 ; +∞[par F(**x**) = [ln(**x **+3)]**^{2}**.**

a) **Justifier la dérivabilité sur [0 ; +∞[de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif** x**, le nombre F′(**x**).**

b) **On pose, pour tout entier naturel** n**,** $I_n=\int_0^n f(x)dx$. **Calculer** I_n.

4. **On pose, pour tout entier naturel** n**,** $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

a) **Calculer** Sn.

b) **La suite** (S_n) **est-elle convergente ?**

Correction : $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. **Etude de f sur [0 ; +∞[:** $f(0)=\frac{\ln 3}{3}$

$f'(x)=\frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$; posons $1-\ln(x+3)=0\Leftrightarrow x=e-3$; donc $\forall\, x\in[0;+\infty[$, $f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. De plus $f'(0)=\frac{1-\ln(3)}{9}$, donc f est dérivable sur [0 ; +∞[.

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$;

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$ ↘	0

2. $u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$.

a) **Justifier que, si** $n\leq x\leq n+1$**, alors** $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$:

$f(n)=\frac{\ln(n+3)}{n+3}$ et $f(n+1)=\frac{\ln(n+4)}{n+4}$

$n\leq x\leq n+1\Leftrightarrow n+3\leq x+3\leq n+4$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{n+4}\leq\frac{1}{x+3}\leq\frac{1}{n+3}\\ \ln(n+4)\leq\ln(x)\leq\ln(n+3)\end{cases}$ **car** f est décroissant ; en additionnant membre à membre on aura : $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

b) **Montrer, sans chercher à calculer** u_n**, que, pour tout entier naturel** n**,** $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

$f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)\ \Leftrightarrow \int_n^{n+1}f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1}f(x)\,dx\leq\int_n^{n+1}f(n)dx$ or $\int_n^{n+1}f(n+1)dx$ et $\int_n^{n+1}f(n)dx$ sont des réels indépendant de x donc $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

c) **En déduire que la suite** (u_n) **est convergente et déterminer sa limite.**

Comme f est décroissante et de limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$ alors u_n est convergente et sa limite est 0.

3. **F sur [0 ; +∞[par F(**x**) = [ln(**x **+3)]**^{2}**.**

a) Comme $\mathrm{F}(0)=(\ln 3)^2$

$\mathrm{F}(x)=[\ln(x+3)]^2\Leftrightarrow\mathrm{F}'(x)=2\frac{\ln(x+3)}{x+3}$.

b) $I_n=\int_0^n f(x)dx=2[\mathrm{F}(x)]_0^n=$

$.I_n=2[\ln(n+3)]^2-2(\ln 3)^2$.

4. $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$:

$u_n=\int_n^{n+1}f(x)dx=2[\mathrm{F}(x)]_n^{n+1}=2[\ln(n+4)]^2-2[\ln(n+3)]^2$

a) **Calculer** Sn

$u_0=2[\ln(4)]^2-2[\ln(3)]^2$

$u_1=2[\ln(5)]^2-2[\ln(4)]^2$

$u_2=2[\ln(6)]^2-2[\ln(5)]^2\ \ldots$

$u_n=2[\ln(n+4)]^2-2[\ln(n+3)]^2$ en additionnant membre à membre on aura :

$$S_n=-2[\ln(3)]^2-2[\ln(n+3)]^2$$

b) **La suite** (S_n) **est-elle convergente ?**

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n=\lim\limits_{n\mapsto+\infty}[2[\ln(3)]^2-2[\ln(n+3)]^2]=-\infty$

alors S_n **diverge.**

Problème 5 : **On considère la fonction** f **définie par :** $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de** f **:** D_f **?**

b) **Etudier les limites de** f **sur** D_f.

c) **Dresser le tableau de** f **sur** D_f.

2. **Soit** g **la restriction de** f **à** $\mathrm{I}=\left]e^{-1};+\infty\right[$.

a) **Démontrer que la fonction** g **est une bijection de I sur** $g(\mathrm{I})=]0;+\infty[$.

b) **On désigne par** g^{-1} **la bijection réciproque de** g**. Calculer** $g(\mathrm{e})$ **et la dérivé de** g^{-1} **au point** $\frac{1}{2}e^{-1}$.

c) **Dresser le variation de** g^{-1} **définie sur** $\mathrm{D}_{g^{-1}}$

Correction : $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$.

1.

a) $D_f = \{x/x \in IR, \boldsymbol{x(1+\ln x)} \neq 0 \; et \; x > 0\} =]0;\ e^{-1}[\cup]e^{-1};+\infty[$.

b) Etudier les limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto (e^{-1})^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto (e^{-1})^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{1}{x + x\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

c) Dresser le tableau de f sur D_f :

$\forall\, x \in]0;\ e^{-1}[\cup]e^{-1};+\infty[$, $f'(x) = \frac{-(2+\ln x)}{[x(1+\ln x)]^2}$,

posons $\boldsymbol{2 + \ln x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$.

x	0		e^{-2}		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$-e^2$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

2. g restriction de f à I $= \left]e^{-1};+\infty\right[$

a) g est continue et strictement décroissante sur $]e^{-1};+\infty[$. Donc f réalise une bijection de $]e^{-1};+\infty[$ vers $\boldsymbol{g(\mathrm{I})} =]\mathbf{0};+\infty[$.

b) $g(e) = \frac{1}{e(1+1)} = \frac{1}{2}e^{-1}$ **et dérivé de g^{-1} au point $\frac{1}{2}e^{-1}$: $D_{g^{-1}} =]\mathbf{0};+\infty[$**

$(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}e^{-1}\right) = \frac{1}{f'\left[g^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-1}\right)\right]} = \frac{1}{f'(e)} = -\frac{4}{3}e^2$.

c) Tableau variation de g définie sur $D_{g^{-1}}$:

$\boldsymbol{g^{-1}}$ est continue est strictement décroissante sur $]\mathbf{0};+\infty[$

x	0		$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	‖	$-$	
$g^{-1}(x)$	‖	$+\infty$ ↘	e^{-1}

Problème 6 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(\ln x)$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f : D_f ?

b) Etudier les limites de f sur D_f.

c) Dresser le tableau de f sur D_f.

2. Soit g la fonction réciproque de f. Quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction g peut-on déduire de l'étude de la fonction f ?

3. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Correction : $f(x) = \ln(\ln x)$

1.

a) $D_f = \{x/x \in IR, \boldsymbol{\ln x} > 0 \; et \; x > 0\} =]1;+\infty[$

b) $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) = \mathbf{ln(0)} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \mathbf{ln}(+\infty) = +\infty$

c) $\forall\, x > 1, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

tableau de variation de f sur $]1;+\infty[$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$+\infty$

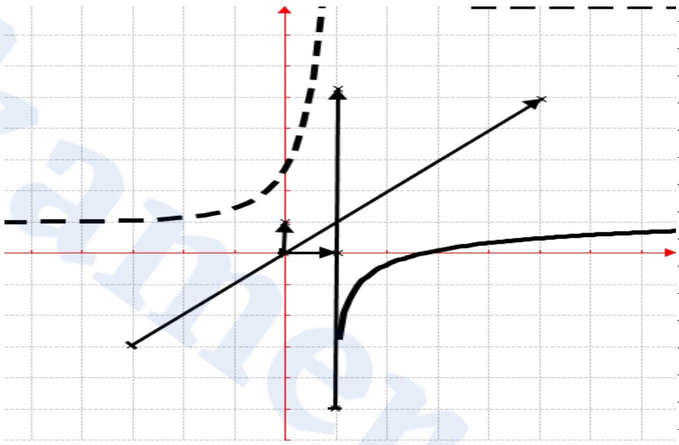
2. On sait que f est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]1;+\infty[$ sur J $=$ IR. Alors g est continue et strictement croissante sur IR.

a) $D_g =$ IR. comme f on a g est continue et strictement croissante sur IR.

Explicitons g : $y = \ln(\ln x)$ $\Leftrightarrow x = e^{e^y}$, donc $\forall\, x \in$ IR , $g(x) = e^{e^x}$;

$\forall\, x \in$ IR , $g'(x) = e^x e^{e^x} = e^{e^x+1} > 0$, alors g est continue et strictement croissante sur IR.

3. $\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}_g$ en trait discontinu.



Problème 7 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x(\ln x)^2$. D'unité graphique 2 cm

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f : D_f ?

b) Etudier les limites de f sur D_f (on démontrera que $f$admet un prolongement par continuité en 0).

c) Démontrer que f n'est pas dérivable à droite de 0. Dresser le tableau de f sur D_f.

2. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$. En déduire en cm^2 l'aire de la surface A délimitée par la courbe $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = e$.

Correction : $f(x) = x(\ln x)^2$

1.

a) $D_f = \{x/x \in IR,\ x > 0\} =]0; +\infty[$

b) **Etudier les limites de f sur D_f.**

$\lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 0$, $\lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}} = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 0$ et

$\lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{(\ln u)^2}{u} = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \left[\frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]^2 = 0$, donc

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \left[\frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]^2 = 0$ donc f **admet un prolongement continuité en 0.**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}(\ln x)^2 = +\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite de 0.

Dresser le tableau de f sur D_f.

$\forall\, x > 0, f'(x) = \ln x\,(\ln x + 2)$,

$\forall\, x \in]0; e^{-2}[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; e^{-2}[$ et sur $]1; +\infty[$.

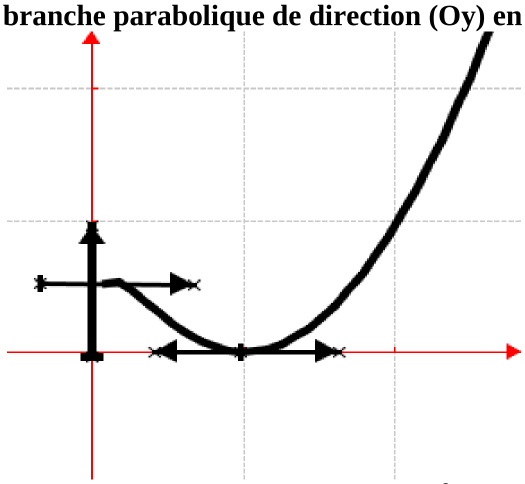
$\forall\, x \in [e^{-2};\ 1]$, $f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur $[e^{-2};\ 1]$.

tableau de variation de f : $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$:**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}(\ln x)^2 = +\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ **admet une branche parabolique de direction (Oy) en** $+\infty$.



3. $\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\ln x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right]\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$.

A $= \frac{1}{4}(e^2-1) \times 4cm^2 = (e^2-1)cm^2$.

Problème 8 : **On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 - 8\ln x - 1$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**
3. **Montrer que pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 2\frac{x^2-4}{x}$. En déduire le sens de variation de h.**
4. **Dresser le tableau de variation de h.**
5. **Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet deux (2) racines ; l'une est entière ; l'autre, notée x_0, appartient à l'intervalle $[3,2; 3,3]$.**
6. **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_h$ admet deux (2) branches infinies à déterminer.**
7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**
8. **Soit λ est un réel appartenant à $]3; 3,2[$.**

a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 1$ et $\mathcal{C}_h$.**

b) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ si λ tend vers 0.**

Correction : $h(x) = x^2\left(1 - 8\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)$

1. $D_h = \{x/x \in IR, x > 0\} =]0; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x^2 - 8\ln x - 1] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x^2\left(1 - 8\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$;

3. $\forall\, x > 0$, $h'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8}{x} = 2\frac{x^2-4}{x}$;

$\forall\, x \in]0; 2[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]0; 2[$.

$\forall\, x \in]2; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

4. **Dressons le tableau de variation de h.**

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2{,}54$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **$h(x) = 0$ admet exactement deux solutions :**

- h est dérivable et strictement décroissante sur $]0; 2[$. Elle réalise donc une bijection de $]0; 2[$ sur $]-2{,}54; +\infty[$. De plus sur $]0; 2[$, il a un unique antécédent. On remarque que $h(1) = 0$, donc 1 est solution.
- h est dérivable et strictement croissante sur $[\mathbf{3,2}; \mathbf{3,3}]$. Elle réalise donc une bijection de $[\mathbf{3,2}; \mathbf{3,3}]$ sur $[-6{,}52.10^{-2}; 0{,}338]$. De plus $\begin{cases} h(3{,}2) \times h(3{,}3) < 0 \\ ou\ 0 \in [-6{,}52.10^{-2}; 0{,}338] \end{cases}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet

une unique solution, notée x_0, telle $h(x_0) = 0$ et $x_2 \in [\mathbf{3,2;3,3}]$.
Ainsi l'équation $h(x) = 0$ admet deux (2) racines ; l'une est $x = 1$ car $h(1) = 0$; et $x_0 = 3{,}21$.

6. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.** $\frac{h(x)}{x} = x - 8\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.
Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.
Branche parabolique de direction (Oy) car
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x - 8\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right] = +\infty$.

7. **la courbe $\mathcal{C}_h$.**

8. $\lambda \in]3;3{,}2[$.
a) $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_1^\lambda h(x)dx = \int_1^\lambda [-x^2 + 8\ln x + 1]dx = -\frac{x^3}{3} + 8x\ln x - 8x + x \Big]_1^\lambda$ on aura :

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{3} + 8\lambda\ln\lambda - 7\lambda + \frac{22}{3}.$$

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{22}{3}$.

<u>Problème 9 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \ln(x^2 + x - 2)$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**
3. **Montrer que pour tout réel $x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$. En déduire le sens de variation de h.**
4. **Dresser le tableau de variation de h.**
5. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**
6. **Monter que h admet une bijective de $]1;+\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.**
7. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.**
8. **On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls et on considère l'application :**
F : $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto Z = F(z) = \ln(z^2 + z - 2)$.
Quel est l'ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :
a) $F(z) = 0$
b) $F(z) = \ln(z)$
c) $F(z) = \ln(z - 2i)$.

<u>Correction :</u> $h(x) = \ln(x^2 + x - 2)$

1. $D_h = \{x/x \in IR, x^2 + x - 2 > 0\}$, posons $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+		−	+

Donc $D_h =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

2. $\lim\limits_{x \mapsto -2^-} h(x) = \ln 0 = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} h(x) = \ln 0 = -\infty$;
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \ln(x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \ln(x^2) = +\infty$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln(x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln(x^2) = +\infty$.

3. $\forall\, x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$;
$\forall\, x \in]-\infty;-2[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$.
$\forall\, x \in]1;+\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

4. **Dressons le tableau de variation de h.**

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$h'(x)$	−	⊠	⊠	+
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	⊠	⊠	$-\infty \nearrow +\infty$

5. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$:**
Asymptotes verticales d'équation : $x = -2$ et $x = 1$.
$\frac{h(x)}{x} = \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)\right]}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)}{x}$. Branche parabolique de direction (Ox) car
$\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \infty} \left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right)}{x}\right] = 0$.

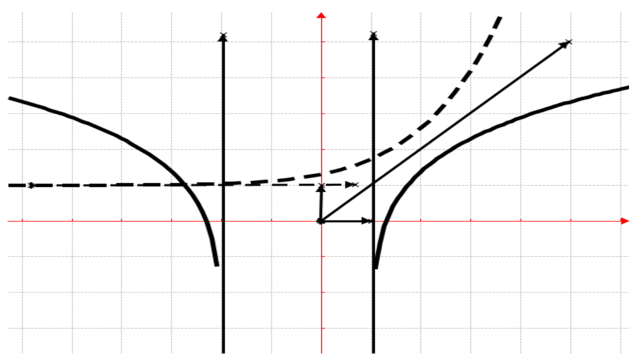
6. h est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]1;+\infty[$ sur $J =]-\infty;+\infty[$. **Explicitons h^{-1}**

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2\left(-1 - \sqrt{4e^y + 9}\right) \\ x = 1/2\left(-1 + \sqrt{4e^y + 9}\right) \end{cases}$$

donc $\begin{cases} h^{-1}(x) = 1/2\left(-1 - \sqrt{4e^x + 9}\right) \\ h^{-1}(x) = 1/2\left(-1 + \sqrt{4e^x + 9}\right) \end{cases}$.

$\forall\, x \in]-\infty;+\infty[$, $h^{-1}(x) = 1/2\left(-1 + \sqrt{4e^x + 9}\right)$.

7. **$\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu**



8. $\mathbb{C}^* /Z = F(z) = \ln(z^2 + z - 2)$.

L'ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :

a) $F(z) = 0 \Leftrightarrow \ln(z^2 + z - 2) = \ln 1 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 1 \Leftrightarrow z^2 + z - 3 = 0$, $\Delta = 13$, alors $z_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ donc $S_{\mathbb{C}^*} = \left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

b) $F(z) = \ln(z) \Leftrightarrow \ln(z^2 + z - 2) =$ ln$z⇔z2+z−2=z⇔z2+2=0⇔z=±i2$, donc $S_{\mathbb{C}^*} = \{-i\sqrt{2}; i\sqrt{2}\}$.

c) $F(z) = \ln(z - 2i) \Leftrightarrow \ln(z^2 + z - 2) =$ ln$z−2i⇔z2+z−2=z−2i⇔z2=2−2i$, les racines carrées de $2 - 2i$ sont $\sqrt{\sqrt{2}+2} - i\sqrt{\sqrt{2}-2}$ ou $-\sqrt{\sqrt{2}+2} + i\sqrt{\sqrt{2}-2}$, alors $z_1 = \frac{-1-\sqrt{\sqrt{2}+2}+i\sqrt{\sqrt{2}-2}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+\sqrt{\sqrt{2}+2}-i\sqrt{\sqrt{2}-2}}{2}$;

$S_{\mathbb{C}^*} = \left\{z_1 = \frac{-1-\sqrt{\sqrt{2}+2}+i\sqrt{\sqrt{2}-2}}{2}; z_1 = \frac{-1-\sqrt{\sqrt{2}+2}-i\sqrt{\sqrt{2}-2}}{2}\right\}$.

Problème 10 : **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1+2\ln x}{2x}$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**
3. **Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{1-2\ln x}{2x^2}$. En déduire le sens de variation de h.**
4. **Dresser le tableau de variation de h.**
5. **Déterminer les équations des tangentes T_A et T_B aux points A et B d'abscisse $e^{-1/2}$ et e.**
6. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$, des tangentes T_A et T_B.**

Correction : $h(x) = \frac{1+2\ln x}{2x} = \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$.

1. $D_h = \{x/x \in IR, x > 0\} =]0; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{1+2\ln x}{2x}\right] = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}\right] = 0$.

3. $\forall x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{-1+2-2\ln x}{2x^2} = \frac{1-2\ln x}{2x^2}$; alors h est strictement croissante sur $]0; e^{1/2}[$ et h est strictement décroissante sur $]e^{1/2}; +\infty[$.

4. **Dressons le tableau de variation de h.**

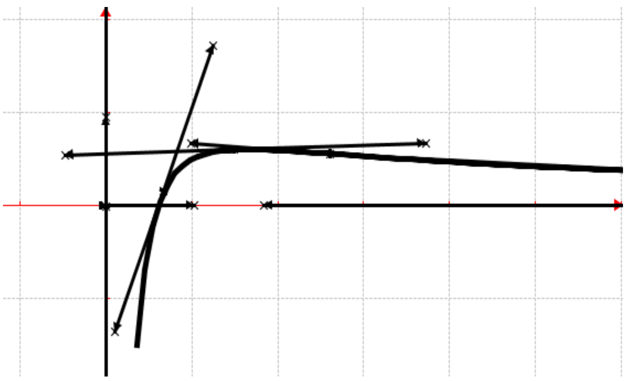
x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$		$-$	
$h(x)$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$e^{-1/2}$	$\searrow$	0

5. **Equations des tangentes T_A et T_B :**

$T_A : y = h'(e^{-1/2})(x - e^{-1/2}) + h(e^{-1/2}) = ex - e^{1/2}$ et

$T_B : y = h'(e)(x - e) + h(e) = \frac{-e^{-2}}{2}x + 2e^{-1}$.

6. **courbe $\mathcal{C}_h$, des tangentes T_A et T_B.**



Problème 11 : **On considère la fonction h définie par $h(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$.**

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de h ?**

b) **Etudier les limites de h sur D_h.**

c) **Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{x^2-8}{x^2-4}$. En déduire le sens de variation de h.**

d) **Dresser le tableau de variation de h.**

2.

a) **Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ à l'infinie. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (d). (1cm)**

b) **Montrer que le point $A(0; -2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.**

c) **Placer le point A et tracer $\mathcal{C}_h$ et (d).**

3. **A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire de la surface A délimitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, la droite (d) et les droites d'équations $x = 4$, $x = 6$.**

On rappelle que $\frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$ et $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$.

Correction : $h(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$.

1.

a) $D_h = \left\{x/x \in IR, \frac{x+2}{x-2} > 0\right\} =$.

$D_h =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

b) **Etudier les limites de h sur D_h.**

$\lim\limits_{x \mapsto -2^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^-} \left[x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right] = \ln 0^- = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^+} \left[x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right] = \ln\frac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [x - 2 + \ln(1)] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\boldsymbol{x - 2 + \ln(1)}] = +\infty$.

c) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)' = \frac{x-2-x-2}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$.

$\forall\, x \in\,]-\infty;\ -2[\, \cup\,]2; +\infty[$, $h'(x) = 1 + \frac{-4}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x^2-4} = \frac{x^2-4-4}{x^2-4} = \frac{x^2-8}{x^2-4}$.

$\forall\, x \in\,]-\infty; -2\sqrt{2}[\, \cup\,]2\sqrt{2}; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -2\sqrt{2}[$ et sur $]2\sqrt{2}; +\infty[$

$\forall\, x \in\,]-2\sqrt{2}; -2[\, \cup\,]2;\ 2\sqrt{2}[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-2\sqrt{2}; -2[$ et sur $]2;\ 2\sqrt{2}[$.

d) **Dresser le tableau de variation de h :**

$h(-2\sqrt{2}) = -6{,}591 = -6{,}6$ et $h(2\sqrt{2}) = 2{,}6$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$	-2	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$			$-$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow -6{,}6$	$\searrow -\infty$			$+\infty \searrow 2{,}$	$\nearrow +\infty$

2.

a) $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[h(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[\boldsymbol{\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)}\right] = \boldsymbol{\ln(1) = 0}$

donc la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ à l'infinie.

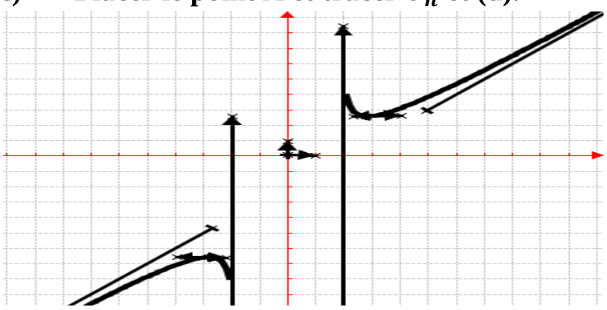
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$	$-$			$+$
	$\mathcal{C}_h$ est au-dessous de la droite (d)			$\mathcal{C}_h$ est au-dessus de la droite (d)

b) $\boldsymbol{h(2a - x) + h(x) = 2b = -4}$

$\begin{cases} h(-x) = -x - 2 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \\ h(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) \end{cases}$ $\ln\left(\frac{x+2}{x-2} \times \frac{x-2}{x+2}\right) = 0$

En additionnant, on aura $h(-x) + h(x) = -4$, d'où le point $A(0;\ -2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

c) **Placer le point A et tracer $\mathcal{C}_h$ et (d).**



3. $\forall x \in\,]2; +\infty[$, $h(x) - y = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 0$.

$\forall x \in\,]2; +\infty[$, $\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \ln(x+2) - \ln(x-2)$

$\int_4^6 \ln(x+2)\, dx = [x\ln(x+2)]_4^6 - \int_4^6 \frac{x}{x+2} dx =$

$\int_4^6 \ln(x+2)\, dx = [x\ln(x+2)]_4^6 - \int_4^6 \left[\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x+2}}\right] dx$

$\int_4^6 \ln(x+2)\, dx = [(x+2)\ln(x+2) - x]_4^6 = 24\ln 2 - 6\ln 6 - 2$

$\int_4^6 \ln(x-2)\, dx = [x\ln(x-2)]_4^6 - \int_4^6 \frac{x}{x-2} dx =$

$\int_4^6 \ln(x-2)\, dx = [x\ln(x-2)]_4^6 - \int_4^6 \left[\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x-2}}\right] dx$

$\int_4^6 \ln(x-2)\, dx = [(x-2)\ln(x-2) - x]_4^6 = 6\ln 2 - 2$

Or $A = \int_4^6 [h(x) - y] dx.\boldsymbol{cm^2} = \int_4^6 [\ln(x +$ *2−lnx−2dx.**cm2=18**ln2−6ln6**cm2***

$$\mathbf{A} = \ln\left(\frac{2^{18}}{6^6}\right)\boldsymbol{cm^2} = \ln\left(\frac{2^{12}}{3^6}\right)\boldsymbol{cm^2} = \boldsymbol{1{,}72cm^2}$$

<u>Problème 12 :</u> On considère la fonction h définie par $h(x) = (x^2 - 4x)\ln(x) + \frac{1}{2}x^2$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier les limites de h sur D_h. (On démontrera que h admet un prolongement par continuité en 0)

c) Démontrer que $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = +\infty$.

d) Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = 2(x-2)(1 + \ln x)$. En déduire le sens de variation de h. Dresser le tableau de variation de h.

e) Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions. Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune d'elles

2. Soit (P) la parabole définie sur $]0; +\infty[$ par $p(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) Trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_h$ et (P).

b) Préciser la position de (P) par rapport à $\mathcal{C}_h$.

c) Tracer $\mathcal{C}_h$ et (P). Unité graphique 3 cm.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^4 (x^2 - 4x)\ln(x)\, dx$. En déduire en cm^2 l'aire de la surface A délimitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, (P) et les droites d'équations $x = 1$, $x = 4$.

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{h(x) = (x^2 - 4x)\ln(x) + \frac{1}{2}x^2}$.

1.

a) $D_h = \{x / x \in IR, x > 0\} =]0;\ +\infty[$.

b) Etudier les limites de h sur D_h.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[\boldsymbol{x^2\ln(x) - 4x\ln(x)}] = 0$ donc $\boldsymbol{h}$ **admet un prolongement continuité en 0.**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\boldsymbol{(x^2 - 4x)\ln(x) + \frac{1}{2}x^2}\right] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[(x-4)\ln(x) + \frac{1}{2}x\right] = +\infty$

, donc h n'est pas dérivable à droite de 0.

d) $\forall\, x \in \mathrm{D}_h$, $h'(x) = (2x-4)\ln(x) + 2x - 4 = 2(x-2)\ln(x) + 2(x-2) = 2(x-2)(1+\ln x)$.

$\forall\, x \in]0; e^{-1}[\, \cup\,]2; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]0; e^{-1}[$ et sur $]2; +\infty[$.

$\forall\, x \in [e^{-1};\ 2]$, $h'(x) < 0$ alors h est décroissante sur $[e^{-1};\ 2]$.

$h(e^{-1}) = 1{,}33$ et $h(2) = -0{,}772$.

x	0	e^{-1}	2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$h(x)$	$0 \nearrow$	$1{,}33 \searrow$	$-0{,}77 \nearrow$	$+\infty$

e) $h(x) = 0$ **admet exactement deux solutions :**

- h est dérivable et strictement décroissante sur $]e^{-1}; 2[$. De plus $\begin{cases} h(2) \times h(e^{-1}) < 0 \\ ou\ 0 \in\,]-0{,}77; 1{,}33[\end{cases}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_1, telle $h(x_1) = 0$ et $x_1 \in\,]e^{-1}; 2[$.

valeur approchée de x_1 à 10^{-2} :

$\begin{cases} h(1{,}2) = 0{,}107 \\ h(1{,}3) = -7{,}58.10^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1{,}2+1{,}3}{2} = 1{,}25$

- h est dérivable et strictement croissante sur $]2; +\infty[$. De plus $\begin{cases} h(2) \times h(+\infty) < 0 \\ ou\ 0 \in\,]-0{,}77; +\infty[\end{cases}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_2, telle $h(x_2) = 0$ et $x_2 \in\,]2; +\infty[$

valeur approchée de x_2 à 10^{-2} :

$\begin{cases} h(2{,}7) = 0{,}158 \\ h(2{,}6) = -9{,}8.10^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2{,}6+2{,}7}{2} = 2{,}65.$

2. **(P) définie sur $]0; +\infty[$ par $p(x) = \frac{1}{2}x^2$.**

a) $h(x) = p(x) \Leftrightarrow x(x-4)\ln(x) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ \mathrm{O}(0;0) \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ \mathrm{B}\left(1; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4 \\ \mathrm{C}(4;8) \end{cases}$.

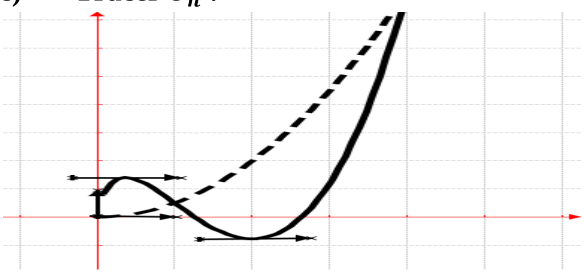
b) **Préciser la position de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (P)**

$\forall\, x \in]0; 1[\, \cup\,]4;\ +\infty[$, $h(x) - p(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de la droite (P).

$\forall\, x \in]1; 4[$, $h(x) - p(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de la droite (P).

Si $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 4$ $\mathcal{C}_h$ et (P) se coupent.

c) **Tracer $\mathcal{C}_h$:**



3. $\int_1^4 (x^2 - 4x)\ln(x)\, dx =$
$\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right)\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x\right) dx =$
$\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right)\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + x^2\right]_1^4 = \left[x^2\left[\left(\frac{1}{3}x - \right.\right.\right.$
2lnx−19x+114=−643ln2+8

$\mathrm{A} = -\int_1^4 (x^2 - 4x)\ln(x)\, dx\,.\,9\ \boldsymbol{cm^2} =$

$\mathrm{A} = (192\ln 2 - 72)\boldsymbol{cm^2}$

Problème 13 :

1. **Soit la fonction f définie par :**

$f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2 - 1}$.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **Etudier les limites de f sur D_f. Interpréter les résultats obtenus.**

c) **Démontrer que** $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

e) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.**

2. **Trouver les nombres réels a et b tels que**

$\forall\, x, x \in \mathbb{R},\ |\ln x| \neq 1,\ \frac{1}{(\ln x)^2 - 1} = \frac{a}{\ln x - 1} + \frac{b}{\ln x + 1}$.

Correction :

1. $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2 - 1}$

a) $\mathrm{D}_f = \{x / x \in \mathrm{IR},\ (\ln x)^2 - 1 \neq 0\ et\ x > 0\} =$
$\mathrm{D}_f =]0; e^{-1}[\, \cup\,]e^{-1}; e[\, \cup\,]e; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet un prolongement par continuité en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto (1/e)^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto (1/e)^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = e^{-1}$;

$\lim\limits_{x \mapsto e^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto e^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = e$.

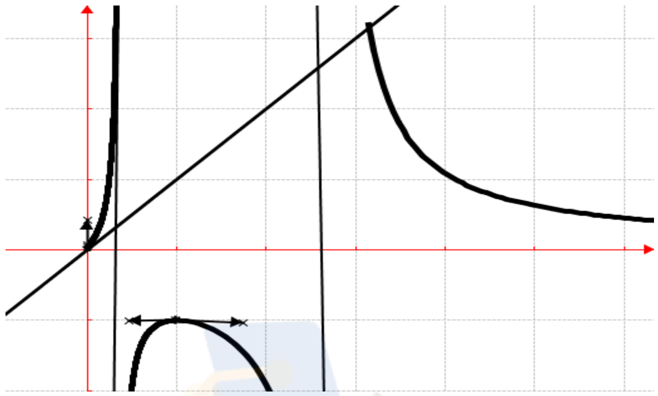
c) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{1}{x(\ln x)^2 - x}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$ **car**

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \left[\frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]^2 = 0$ **d**onc f n'est pas dérivable à droite de 0.

d) $\forall\, x \in D_f,\ f'(x) = -\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{[(\ln x)^2-1]^2} = \dfrac{-2\ln x}{x[(\ln x)^2-1]^2}$.

x	0		e^{-1}		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

e) **Traçons la courbe de $\mathcal{C}_g$:**



2. **Trouver les nombres réels a et b :**

$\forall\, x, x \in \mathbb{R},\ |\ln x| \neq 1,\ \dfrac{1}{(\ln x)^2-1} = \dfrac{a}{\ln x - 1} + \dfrac{b}{\ln x + 1} = \dfrac{(a+b)\ln x + (a-b)}{(\ln x)^2-1}$.

On déduit que $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Problème 14 :

1. **Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2+4)$.**

a) **Etudier la parité de f.**

b) **Étudier le sens de variation de f sur D_f.**

2. **Soit la fonction g définie par : $g(x) = f(x) - x$.**

a) **Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur IR.**

b) **Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; 3]$ qu'on note α. Donner la valeur arrondie de α d'amplitude 10^{-1}.**

c) **Justifier le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.**

3. **Démontrer que $g(x) = \ln\left[\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{4}{e^x}\right)\right]$. En déduire les limites de f et de g.**

4. **Dresser le tableau de variation de f et de g.**

5. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.**

6. **Construire la courbe $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$.**

7. **Démontrer que la restriction f de h à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une application réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Expliciter h^{-1}. Construire $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.**

8. **On considère la suite $(u_n)_{n\in\text{IN}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.**

a) **Placer les points u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3.**

b) **Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \le u_n \le \alpha$.**

c) **Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\text{IN}}$ converge.**

d) **Déterminer sa limite.**

Correction :

1. $f(x) = \ln(x^2+4)$, on a $D_f = \text{IR}$.

a) $f(-x) = \ln((-x)^2+4) = \ln(x^2+4) = f(x)$, alors f est paire.

b) $\forall\, x \in \text{IR},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$, alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

2. $\boldsymbol{g(x) = f(x) - x = \ln(x^2+4) - x}$

a) $\forall\, x \in \text{IR},\ g'(x) = \frac{2x}{x^2+4} - 1 = \frac{-x^2+2x-4}{x^2+4} < 0$, car en posant $-x^2+2x-4 = 0$, $\Delta = -12 < 0$ donc g est strictement décroissante sur IR.

b) Pour $x \in [2\,;\ 3]$: g est continue (puisque dérivable), strictement décroissante et prend des valeurs négatives ($g(2) = \ln 8 - 2$) et positives ($g(3) = \ln 13 - 3$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution a dans [2 ; 3].

Donnons la valeur arrondie de α à 10^{-1} : on trouve, $g(2{,}1) \times g(2{,}1) = 0{,}03 \times (-0{,}020) < 0$ donc $2{,}1 \le \alpha \le 2{,}2$.

c) **Justifions le nombre réel α est l'unique solution de $f(x) = x$:** Remarquons déjà que $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Reste à démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

Vu que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, vu qu'elle s'annule sur [2 ;3], on peut affirmer que ce 0 de g est unique sur $[0; +\infty[$ (inutile de réappliquer le théorème des valeurs intermédiaires) α est donc la seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0; +\infty[$.

3. **Limites de f et de g :**

$g(x) = \ln(x^2+4) - \ln(e^x) = \ln\left[\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{4}{e^x}\right)\right]$

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[\ln(x^2+4)] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln\left[\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{4}{e^x}\right)\right] = \ln 0 = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[\ln(x^2+4) - x] = +\infty$

4. Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1{,}38$	$\nearrow$	$+\infty$

5. branches infinies de $\mathcal{C}_f$: $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(x^2+4)}{x}$, posons $t=x^2+4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{t^2-4}$

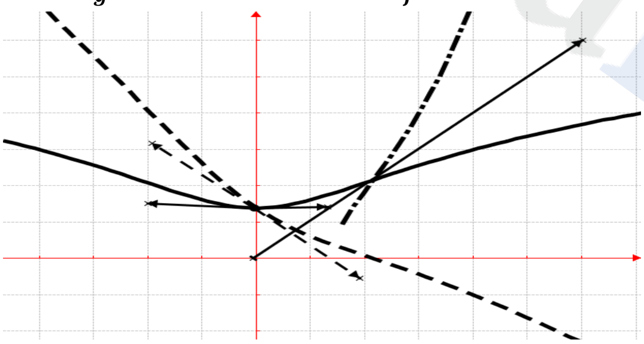
$$\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\mapsto\pm\infty}\left[\frac{\ln(t)}{\sqrt{t^2-4}}\right]=\lim_{t\mapsto\pm\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\times\frac{1}{\pm\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}\right]=0$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.

$$\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{t\mapsto\pm\infty}\left[\frac{\ln(t)}{t}\times\frac{1}{\pm\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}}-1\right]=-1$$ **, on calcule**

$\lim_{x\mapsto\pm\infty}[g(x)-x]=\lim_{x\mapsto\pm\infty}f(x)=+\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de coefficient directeur -1 à l'infinie.

6. $\mathcal{C}_g$ en trait discontinu et $\mathcal{C}_f$ en trait continu



7. f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur J $=[1{,}38;+\infty[$. **Explicitons h^{-1}**

$y=\ln(x^2+4)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{e^y-4}\\x=+\sqrt{e^y-4}\end{cases}$ donc

$\forall\, x\in[1{,}38;+\infty[,\ h^{-1}(x)=\sqrt{e^x-4}$.

8. $(u_n)_{n\in\text{IN}}/\ u_{n+1}=f(u_n)=\ln(u_n^2+4)$

a) **Plaçons les points u_0 $=1$; u_1** $=\ln(5)=1{,}60$ **;** $u_2=\ln[(\ln 5)^2+4]=1{,}88$ **et** $u_3=\ln[(1{,}88)^2+4]=2{,}02$.

b) **Montrons que, $\forall\, n\in$ IN, on a $1\le u_n\le\alpha$:** $2{,}1\le\alpha\le2{,}2$ et $\mathbf{1\le u_n\le\alpha}$

<u>Initialisation :</u> comme $u_0=1$ et $\alpha\approx2{,}2$ on a bien $1\le u_0\le\alpha$ (vraie)

<u>hérédité :</u> montrons que **SI** $1\le u_n\le\alpha$ **ALORS** $1\le u_{n+1}\le\alpha$

Supposons que $1\le u_n\le\alpha\Leftrightarrow1\le u_n^2\le\alpha^2\Leftrightarrow1+4\le u_n^2+4\le\alpha^2+4\Leftrightarrow\ln5\le\ln(u_n^2+4)\le\ln(\alpha^2+4)\Leftrightarrow1{,}60\le u_{n+1}\le f(\alpha)\Leftrightarrow1\le u_{n+1}\le\alpha$ car on a alors $f(1)\le f(u_n)\le f(\alpha)$ puis **f est une fonction croissante** sur $[0\,;+\infty[$. Mais $f(1)=\ln5>1$ et $f(\alpha)=\alpha$ donc $1\le u_{n+1}\le\alpha$ (vraie)

<u>Conclusion :</u> $\forall$ n $\in$ IN, $1\le u_n\le\alpha$.

c) **Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\text{IN}}$ converge :** La suite $(u_n)_{n\in\text{IN}}$ est majorée par α. Montrons alors qu'elle est croissante, c'est à dire : $u_n\le u_{n+1}$

g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et nulle en α. Par conséquent, $0\le x\le\alpha\Leftrightarrow g(x)\ge0\Leftrightarrow f(x)\ge x$. Mais comme $1\le u_n\le\alpha$, on appliquant l'inégalité précédente, $f(u_n)\ge u_n$, c'est à dire $u_{n+1}\ge u_n$ donc $(u_n)_{n\in\text{IN}}$ est croissante.

$(u_n)_{n\in\text{IN}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers un réel m : comme $1\le u_n\le\alpha$, on a $11\le m\le\alpha$.

d) **Déterminons sa limite :** $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f est continue sur $[0\,;+\infty[$ donc en m. u_n est une suite convergente vers un réel m. D'après le théorème du point fixe, m est vérifie $m=f(m)$, l'équation a pour unique solution α donc $\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\alpha$.

<u>Problème 15 :</u> On considère la fonction f définie par $f(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$.

1. **Déterminer les limites de f sur D$_f$.**
2. **Étudier les variations et construire $\mathcal{C}_f$.** **En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle$]0;+\infty[$.**
3. **Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-\ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.**
4. **Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle$]1;+\infty[$.**
5. **Montrer que l'équation $F(x)=1-\frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$ qu'on note α.**
6. **Donner un encadrement de α à 10^{-1}.**
7. **On considère la suite $(u_n)_{n\in\text{IN}}$ définie par $u_1=0$ et pour tout tout nombre entier naturel n non nul, par $u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$.**

a) **Placer les points u_1 et u_2.**

b) **Exprimer $S_{1,n}=u_1+u_2+\cdots+u_n$ en fonction de n.**

c) **Déterminer $\lim_{n\mapsto1}S_{1,n}=$.**

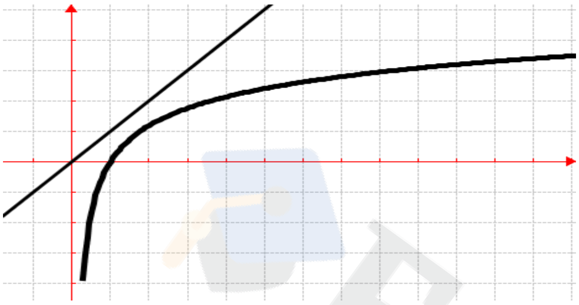
Correction : $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$, $D_f =]0; +\infty[$.

1. $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto 0} f(x) = -\infty$.

2. $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Branches infinies : $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.



Comme $f(1) = 0$, Si $x \in]0; 1[$, $f(x) < 0$. Si $x \in]1; +\infty[$, $f(x) > 0$. Si $x = 1$, $f(1) = 0$.

3. **Montrons que $\mathrm{F}(x) = x \ln x - \ln x$:**
$\forall x \in]0; +\infty[$, $\mathrm{F}'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x = f(x)$, d'où la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = x \ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

4. $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$, alors F est strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

5. **Montrons que l'équation $\mathrm{F}(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$ qu'on note α :** On a $\mathrm{F}(1) = 0$ et $\mathrm{F}(e) = e - 1 \approx 1{,}7$.
D'autre part $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$, donc $0 < 1 - \frac{1}{e} < e - 1$.
F est dérivable donc continue sur $[1; e]$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [1; e]$tel que $\mathrm{F}(\alpha) = 1 - \frac{1}{e}$.

6. $\mathrm{F}(1{,}9) - 1 + \frac{1}{e} \approx -0{,}05$ et $\mathrm{F}(2{,}0) - 1 + \frac{1}{e} \approx 0{,}06$, donc $1{,}9 < \alpha < 2{,}0$.

7. **$(u_n)_{n \in \mathrm{IN}}$ définie par $u_1 = 0$ / $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.**

a) **Placer les points u_1 et u_2.**
$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - n - \ln n$
$u_1 = f\left(\frac{1}{1}\right) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$
$u_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 - \ln 2 = -1 - \ln 2$

b) $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n
$u_1 = 1 - 1 - \ln 1$
$u_2 = 1 - 2 - \ln 2$
$u_3 = 1 - 3 - \ln 3$ ….
$u_n = 1 - n - \ln n$, en additionnant membre à membre, on a : $S_{1,n} = \frac{n(n-1)}{2} - \ln(n!)$.

c) $\lim_{n \mapsto 1} S_{1,n} = \lim_{n \mapsto 1} \left[\frac{n(n-1)}{2} - \ln(n!)\right] = 0$.

Problème 16 :

1. **On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x+1)$.**
a) **Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.**
b) **Étudier les variations et construire la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.**
c) **En déduire le signe de $f(x)$.**

2. **Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par**
$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n.$$
a) **Etudier le sens de variation de la suite S_n.**
b) **On considère la suite définie**
$$S'_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$
Etudier le sens de variation de la suite S'_n.

Correction :

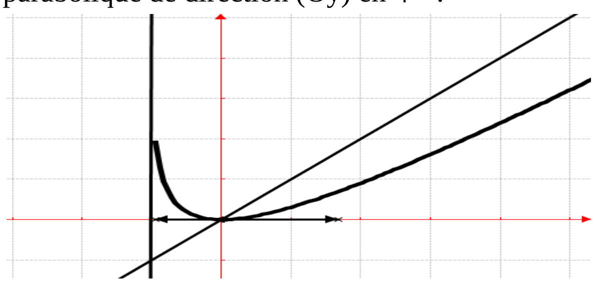
1. $f(x) = x - \ln(x+1)$, $D_f =]-1; +\infty[$

a) Posons $t = x + 1$, on déduit $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{t \mapsto +\infty} [t - 1 - \ln t] = \lim_{t \mapsto +\infty} \left[t\left(1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t}\right)\right] = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto -1^+} f(x) = +\infty$.

b) $\forall x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Branches infinies : $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{\ln(x+1)}{x}$, on déduit que $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



c) f admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$, $\forall\, x \in]-1; +\infty[$, $f(x) > 0$.

2. $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n}$

$\boldsymbol{S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)}$.

a) $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$S_{n+1} - S_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ or $\frac{1}{n} > 0$ et $\forall\, x \in]-1; +\infty[$, $f(x) > 0$ donc on en déduit que $S_{n+1} - S_n > 0$ donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

b) sens de variation de la suite S'_n :

$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\left(-\frac{1}{n+1}\right) + \ln\left[1 + \left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$-[S'_{n+1} - S'_n] = \left(-\frac{1}{n+1}\right) - \ln\left[1 + \left(-\frac{1}{n+1}\right)\right] = f\left(-\frac{1}{n+1}\right)$, nous pouvons ainsi écrire $S'_n - S'_{n+1} = f\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. On sait que $n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \geq -1$. $\forall\ -\frac{1}{n+1} \in]-1; +\infty[$, $f\left(-\frac{1}{n+1}\right) > 0$ alors $S'_{n+1} - S'_n < 0$. Donc la suite $(S'_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

<u>Problème 18 :</u> On considère la fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)}$.

a) Montrer que, pour tout x réel, $\boldsymbol{f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Montrer que, pour tout x réel, f est strictement croissante sur IR.

d) Montrer que f un point d'inflexion A d'abscisse négatif à déterminer les coordonnées.

e) Dresser le tableau de variations de f.

f) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

g) Justifier que $0 < \alpha < 1$.

h) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

i) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)}$.

a) $D_f = \{x / x \in \text{IR}, x^2 + 1 > 0\} =]-\infty; +\infty[$

$\forall\, x \in \text{IR}$, $f(x) = 2x - 2 + \ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] = 2x - 2 + \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [2x - 2 + \ln(x^2+1)] = +\infty$

et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[x\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)\right] = -\infty$.

c) $\forall\, x \in \text{IR}$, $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$, alors f est strictement croissante sur IR.

d) $\forall\, x \in \text{IR}$, $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, un point d'inflexion, $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \mp 1$.

Ce point est de coordonnées : $A(-1; -4 + \ln 2)$

e) Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f) $[f(x); f(+\infty)[= [-2; +\infty[$

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Or $0 \in [-2; +\infty[$, **donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,** l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

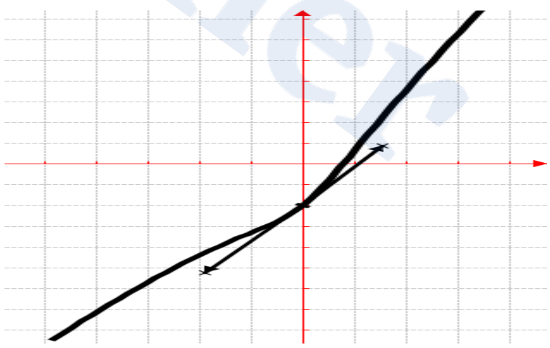
g) On sait que $f(0) = -2$ et $f(1) = \ln 2 > 0$, donc f change de signe sur $[0; 1]$, on a $0 < \alpha < 1$.

h) branches infinies de $\mathcal{C}_f$: $\frac{f(x)}{x} = 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$. On calcule

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \left[2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right] = 2$ et

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - 2x] = +\infty$, on a une branche parabolique de coefficient directeur 2.

i) $\mathcal{C}_f$



<u>Problème 19 :</u> On considère la fonction h définie par : $\boldsymbol{h(x) = \frac{1+\ln x}{x} - 1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Etudier les limites de h sur D_h.

3. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$. En déduire le sens de variation de h.

4. Dresser le tableau de variation de h.

5. Déterminer les deux (2) asymptotes de $\mathcal{C}_h$.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

7. Soit α est un réel appartenant à $]3;4[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x=\alpha$, $x=1$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Correction : $h(x)=\frac{1+\ln x}{x}-1=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}-1$

1. $D_h=\{x/x\in IR, x>0\}=]0;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\mapsto 0} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h(x)=-1$;

3. $\forall x\in]0;+\infty[$, $h'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{-1+1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$; alors h est strictement croissante sur $]0;1[$ et h est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

4. **Dressons le tableau de variation de h.**

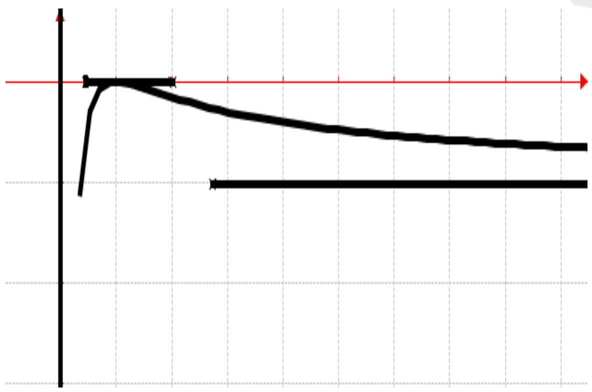
x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$		$-$	
$h(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	-1

5. **Asymptotes de $\mathcal{C}_h$.**

Asymptote verticale d'équation : $x=0$.

Asymptote horizontale d'équation : $y=-1$.

6. **la courbe $\mathcal{C}_h$.**



7. $\alpha\in]3;4[$.

a) $\mathcal{A}(\alpha)=-\int_1^\alpha h(x)dx=\int_1^\alpha\left[\frac{-1}{x}-\frac{\ln x}{x}+\right.$ $1dx=-\ln x-12\ln x2+x1\alpha=-\ln\alpha-12\ln\alpha2+\alpha-1.$

b) $\lim\limits_{\alpha\mapsto 0}\mathcal{A}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\mapsto 0}\left[-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2+\alpha-1\right]=$ $\lim\limits_{\alpha\mapsto 0}\left[-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2+\alpha-1\right]=+\infty$.

Problème 20 : **On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.**

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f : D_f ?

b) Montrer que la fonction f définie sur D_f est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.

c) Déterminer les limites de f sur D_f.

d) Etudier le sens de variation de f définie sur D_f. En déduire le sens de variation de f.

2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée x_0, appartient à $]-1;1[$.

3.

a) Dresser le tableau de variation de f sur IR.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.

c) Montrer que $\forall\ x\in D_f$, $f''(x)=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$.

d) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion α dont on déterminera son coordonnée.

4.

a) Déterminer les réels a, b, tels que pour tout x réel différent de -1, on ait $\frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}$.

b) Déterminer les réels c, d, tels que pour tout x réel différent de 1, on ait $\frac{x}{1-x}=c+\frac{d}{1-x}$.

c) Calculer $m=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$ et $n=-\int_{-1}^0\frac{x}{1-x}dx$. En déduire par intégration par parties $A=\int_0^1\ln(1+x)\,dx$ et celle de $B=\int_{-1}^0\ln(1-x)\,dx$.

5. On considère la fonction F définie sur D_f par $F(x)=(x-1)\ln(1-x)-(x+1)\ln(x+1)$.

a) Montrer que F est une primitive de f.

b) Déterminer alors la valeur exacte de $I=\int_{1/4}^{3/4}f(x)dx$.

c) Montrer que $I=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{84375}{823543}\right)$.

6.

a) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b) Monter que f admet une bijective de $[0;1[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction f^{-1} réciproque de f.

c) Montrer que la fonction f^{-1} définie sur J est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.

d) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$, T_0 et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 2$, par $u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Montrer que (u_n) peut s'écrire $\ln(n-1)-\ln(n+1)$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

<u>Correction :</u> $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1.

a) $D_f = \left\{x/x \in IR, \frac{1+x}{1-x} > 0\right\} =]-1;1[$

b) $\forall\, x \in]-1;1[$, $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$,

$\forall\, x \in]-1;1[$, $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = -f(x)$, alors f est une fonction impaire. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

c) On fait un changement de variable, $t = \frac{1+x}{1-x}$ en calculant : $\lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-}\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = +\infty$ on déduit $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto 0}[\ln t] = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}[\ln t] = +\infty$.

d) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$.

$\forall\, x \in]-1;1[$, $f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]-1;1[$.

2. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$, donc sur $]-1;1[$, il a un unique antécédent. Ainsi elle admet une unique solution $x_0 = 0$.

3.

a) tableau de variation de f sur $]-1;1[$.

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	

b) on remarque que $f(0) = 0$.
Sur $]-1;0]$, $f(x) \le 0$ et sur $[0;1[$, $f(x) \ge 0$.

c) $\forall\, x \in]-1;1[$, $f''(x) = \left[\frac{2}{1-x^2}\right]' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$.

d) Un point d'inflexion dont on déterminera son coordonnée : $f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ainsi le point $\alpha(0;0)$ coïncide avec celui de l'origine O.

4.

a) $\forall\, x \in IR - \{-1\}$, $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1} = \frac{ax+a+b}{x+1}$, par identification, on a : $a = 1$ et $b = -1$ d'où $\forall\, x \in IR - \{-1\}$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

b) $\forall\, x \in IR - \{1\}$, $\frac{x}{1-x} = c + \frac{d}{1-x} = \frac{-cx+c+d}{1-x}$, par identification, on a : $c = -1$ et $d = 1$ d'où $\forall\, x \in IR - \{1\}$, $\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$.

c) $m = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{x+1}\right]dx = [x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

Et $n = -\int_{-1}^0 \frac{x}{1-x}dx = \int_{-1}^0 \left[+1 - \frac{1}{1-x}\right]dx = [x - \ln(1-x)]_{-1}^0 = 1 + \ln 2$.

Déduire par intégration par parties :

$A = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = 2\ln 2 - 1$. Et $B = \int_{-1}^0 \ln(1-x)\,dx = [x\ln(1-$

x-10+-10x1-xdx=1

5. $\forall\, x \in]-1;1[$ par $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(x+1)$.

a) $F'(x) = \ln(1-x) + 1 - \ln(x+1) - 1 = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = f(x)$.

b) $I = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = [F(x)]_{1/4}^{3/4} = (-1/4)\ln(1/4) - (7/4)\ln(7/4) + 3/4)\ln(3/4) + (5/4)\ln(5/4)$.

c) $I = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3^3 \times 5^5}{7^7}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{84375}{823543}\right)$.

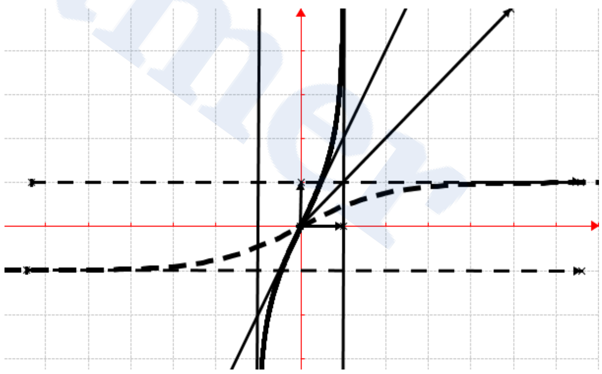
6.

a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$, ainsi $T_0 : y = 2x$.

b) f est continue et strictement croissante sur $[0;1[$. Elle réalise donc une bijection de $[0;1[$ sur $J = [0;+\infty[$. **Explicitons f^{-1} :** $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow x = \frac{e^y-1}{e^y+1}$, donc $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

c) $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f^{-1}(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^x}{e^x+1} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f^{-1}(x)$, alors f^{-1} est une fonction impaire. Donc $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

d) $\mathcal{C}_f$, T_0 et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.



7. (u_n) / $n \ge 2$, par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{1+n}{n}}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln(n-1) - \ln(n+1)$

b) $\forall\, n \ge 2$, $0 < \frac{1}{n} < 1$, et f est décroissante sur $[0;1[$. Ainsi, pour tout entier naturel $n \ge 2$, $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, donc $f\left(\frac{1}{n+1}\right) > f\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_{n+1} > u_n$.
Donc la suite (u_n) est croissante.

c) en appliquant le théorème de gendarme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

Problème 21 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?
2. Etudier les limites de h sur D_h.
3. Montrer que pour tout réel $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{-4x}{x^4-1}$. En déduire le sens de variation de h.
4. Dresser le tableau de variation de h.
5. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.
6. Montrer que h admet une bijection de $]-\infty; -1[$ vers un intervalle J à déterminer. Expliciter la fonctions h^{-1} réciproque de h.
7. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

Correction : $h(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

1. $D_h = \left\{\frac{x}{x} \in \mathrm{IR}, \frac{x^2+1}{x^2-1} > 0\right\}$

$D_h =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = 0$. quand vous posez $t = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, on prend $x \mapsto \mp 1$, $t \mapsto -\infty$ ou $x \mapsto \pm\infty$, $t \mapsto -\infty$ et $h = \ln t$.

3. $\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $h'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' \times \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \times \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{-4x}{x^4-1}$; alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et h est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

4. **Dressons le tableau de variation de h.**

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$		⊠		$-$
$h(x)$	$0 \nearrow +\infty$		⊠		$+\infty \searrow 0$

5. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

Asymptotes verticales d'équation : $x = -1$ et $x = 1$.

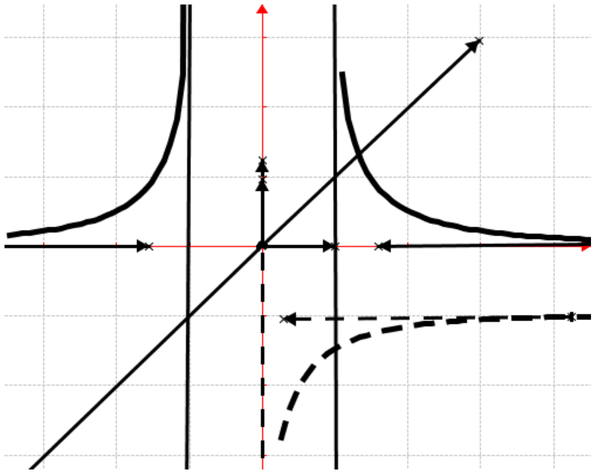
Asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

6. h est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1[$. Elle réalise une bijection de $]-\infty; -1[$ vers $J =]h(-\infty); h(-1)[=]0; +\infty[$. Explicitons h^{-1} :

$$y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{e^y+1}{e^y-1}} \\ x = -\sqrt{\frac{e^y+1}{e^y-1}} \end{cases} \quad \text{donc}$$

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{e^x+1}{e^x-1}}$.

7. $\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu



Problème 22 : On considère la fonction g définie par : $g(x) = (\ln x)^2$

1.
a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
b) Etudier les limites de g sur D_g.
c) Montrer que pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$. En déduire le sens de variation de g.
d) Dresser le tableau de variation de g.
e) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_g$
f) Montrer que h admet deux bijections de D_g vers deux intervalles I et J à déterminer. Expliciter les fonctions réciproques de g.
g) Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. Soit λ est un réel appartenant à $]2; 3[$.
a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 1$ et $\mathcal{C}_g$.
b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ définie par $u_1 = 0$ et pour tout tout nombre entier naturel n non nul, par $u_n = \sqrt{g(n)}$.
a) Placer les points u_1 et u_2.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.
c) Exprimer $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.
d) Montrer que en fonction de n, $\forall\, n > 0$, $S_{1,n+1} - S_{1,n} = \ln(n+1) > 0$.

4. On pose, pour tout $n > 0$, $v_n = e^{-S_{1,n}}$.
a) Exprimer v_n en fonction de n.
b) Préciser le sens de variation de $(v_n)_{n>0}$.
c) Déterminer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n =$.

Correction : $g(x) = (\ln x)^2$

1.

a) $D_g = \{x/x \in IR, x > 0\} =]0; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0} g(x) = (-\infty)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = +\infty$.

c) $\forall\, x > 0,\ g(x) = (\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$

$\forall\, x > 0,\ g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$; alors g est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

d) Dressons le tableau de variation de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$		$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) $\frac{g(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln x)^2}{(\sqrt{x})^2} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$.

Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

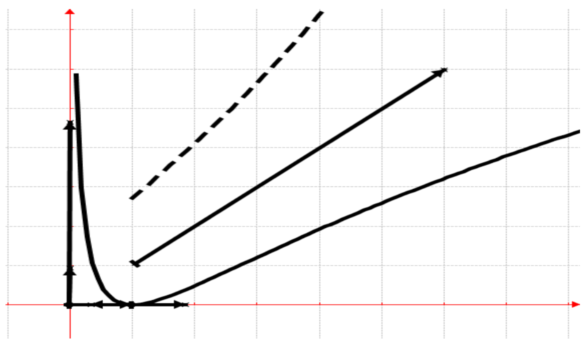
Branche parabolique de direction (Ox) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2\right] = 0$.

f) h est continue et strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.. Elle réalise deux bijections, l'une de $]0; 1]$ vers $I = [h(1); h(0)[= [0; +\infty[$ et l'autre de $]0; 1]$ vers $J = [h(1); h(+\infty)[= [0; +\infty[$. **<u>Explicitions :</u>** $(\ln x)^2 = y \Leftrightarrow [\ln x - \sqrt{y}][\ln x + \sqrt{y}] = 0 \Leftrightarrow x = e^{\sqrt{y}}$ ou $x = e^{-\sqrt{y}}$ donc.

$$\forall\, x \in [0; +\infty[, \begin{cases} h^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}} \\ h^{-1}(x) = e^{-\sqrt{x}} \end{cases}$$

g) $\mathcal{C}_g$ **en trait continu et** $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ **en trait discontinu**



2. $\lambda \in]2; 3[$.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^\lambda g(x)dx = [x(\ln x)^2]_1^\lambda - 2\int_1^\lambda \ln x\, dx = [x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x]_1^\lambda = \lambda(\ln\lambda)^2 - 2\lambda\ln\lambda + 2\lambda - 2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$.

3. $u_n = \ln n$ avec l'entier naturel $n > 0$.

a) $u_1 = \ln 1 = 0$ et $u_2 = \ln 2 = 0{,}67$.

b) la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.

$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ or $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.

c) $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(1 \times 2 \times \ldots \times n) = \ln(n!)$.

d) $\forall\, n > 0,\ S_{1,n+1} - S_{1,n} = \ln[(n+1)!] - \ln(n!) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)\times n!}{n!}\right) = \ln(n+1) > 0$.

4. $\forall\, n > 0,\ v_n = e^{-S_{1,n}} = e^{-\ln(n!)}$.

a) $v_n = e^{-\ln(n!)} = e^{\ln\left(\frac{1}{n!}\right)} = \frac{1}{n!}$.

b) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} == \frac{-n}{(n+1).n!} < 0$ donc la suite $(v_n)_{n>0}$ est décroissante.

c) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

<u>Problème 23:</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 2. Interprétation graphique du résultat obtenu.

3. Etudier les limites de h sur D_h.

4. Montrer que pour tout réel $x \in]2; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{\ln(x-1)}}$. En déduire le sens de variation de h.

5. Dresser le tableau de variation de h.

6. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.

7. Monter que h admet une bijective de $[2; +\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

8. Résoudre dans IR, $h(x) = 0$.

9. Montrer que l'équation $h^{-1}(x) = 3$ admet une unique solution, notée α, appartient à l'intervalle $]0; 1[$.

10. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

<u>Correction :</u> $h(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$

1. $D_h = \{x/x \in IR, \ln(x-1) \geq 0\ et\ x - 1 > 0\}$. $D_h = [2; +\infty[$.

2. Continuité de h en 2: $\lim\limits_{x \mapsto 2} h(x) = 0$ et $h(2) = 0$, alors h est continue en 2.

Dérivabilité de h en 2: posons $t = x - 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 2}(x-2) = 0$, on peut écrire : $\frac{h(x)-h(0)}{x-2} = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x-2} = \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t-1} = \sqrt{\frac{\ln(t)}{t-1} \times \frac{1}{t-1}}$ donc

$\lim\limits_{x \mapsto 2} \frac{h(x)-h(0)}{x-2} = \lim\limits_{t \mapsto 1} \left[\sqrt{\frac{\ln(t)}{t-1} \times \frac{1}{t-1}}\right] = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x \mapsto 2} \frac{h(x)-h(0)}{x-2} = +\infty$; alors h n'est pars dérivable en 2, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en cet point, une demi-tangente verticale.

3. $\lim\limits_{x \mapsto 2} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = +\infty$.

4. $\forall\, x \in]2; +\infty[, h'(x) = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{\ln(x-1)}} > 0$; alors h est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

5. **Dressons le tableau de variation de h.**

x	2		$+\infty$
$h'(x)$	||	+	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.** $\frac{h(x)}{x} = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x} = \sqrt{\frac{\ln(x-1)}{x}} = \sqrt{\frac{\ln(t)}{t+1}} = \sqrt{\frac{\ln(t)}{t} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t}}}$ en posons $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln(x-1) = +\infty$, on peut écrire

Branche parabolique de direction (Ox) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\sqrt{\frac{\ln(t)}{t} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t}}}\right] = 0$.

7. h est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[2; +\infty[$ vers $\text{J} = [0; +\infty[$. **Explicitons h^{-1} :** $y = \sqrt{\ln(x-1)} \Leftrightarrow x = e^{y^2} + 1$: $\forall\, x \in [0; +\infty[, h^{-1}(x) = e^{x^2} + 1$.

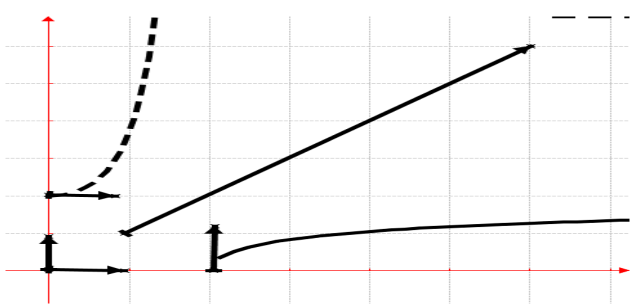
8. $\sqrt{\ln(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ donc $S_{\text{IR}} = \{2\}$.

9. $h^{-1}(x) = 3 \Leftrightarrow h^{-1}(x) - 3 = 0$.

$h^{-1}(0) - 3 = -1$ et $h^{-1}(1) - 3 = 0{,}71$

h^{-1} est continue et strictement croissante sur $]0; 1[$. Or $[h^{-1}(0) - 3] \times [h^{-1}(1) - 3] < 0$ et $0 \in]-1; 0{,}71[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h^{-1}(\alpha) = 3$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$.

- **$\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$en trait discontinu**



Problème 24 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \ln\left(\sqrt{2x-1} + 7x\right)$.

1.

a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de $p(x) = \sqrt{2x-1} + 7x$.

b) En déduire l'ensemble de définition de h.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en $\frac{1}{2}$. Interprétation graphique du résultat obtenu.

d) Etudier les limites de h en $+\infty$.

2.

a) Pour tout réel $\forall\, x \geq 1/2$, étudier le signe de $1 + 7\sqrt{2x-1}$.

b) Pour tout réel $\forall\, x \geq 1/2$, étudier le signe de $2x - 1 + 7x\sqrt{2x-1}$.

c) Montrer que pour tout réel $x \in]1/2; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1+7\sqrt{2x-1}}{2x-1+7x\sqrt{2x-1}}$. En déduire le sens de variation de h.

d) Dresser le tableau de variation de h.

3. Montrer que l'équation $h(x) = 2{,}5$ admet une unique solution, notée α, appartient à l'intervalle $]1; 2[$

4. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

Correction : $h(x) = \ln\left(\sqrt{2x-1} + 7x\right)$

1.

a) $p(x) = \sqrt{2x-1} + 7x$

$\text{D}_p = \{x/x \in \text{IR}, 2x - 1 \geq 0\} = [1/2; +\infty[$. Posons $p(x) = \sqrt{2x-1} + 7x > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 49x^2 \Leftrightarrow 49x^2 - 2x + 1 > 0$; posons $49x^2 - 2x + 1 = 0$, $\Delta = 4 - 4 \times 49 = -192 < 0 \Leftrightarrow S_{IR} = \text{IR}$. Donc $\forall x \in \text{D}_p = [1/2; +\infty[, p(x) > 0$.

b) $\text{D}_h = \{x/x \in \text{IR}, 2x - 1 \geq 0\} = [1/2; +\infty[$.

c) **Continuité de h en $\frac{1}{2}$:** $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{7}{2}\right)$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1/2} \ln\left(\sqrt{2x-1} + 7x\right) = \ln\frac{7}{2}$ alors h est continue en $\frac{1}{2}$.

Dérivabilité de h en $\frac{1}{2}$: posons $\begin{cases} t = \sqrt{2x-1} \\ x = \frac{1}{2}(t^2 + 1) \end{cases}$.

$\frac{h(x)-h(1/2)}{x-1/2} = \frac{\ln\left(\sqrt{2x-1}+7x\right)-\ln\frac{7}{2}}{x-1/2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\sqrt{2x-1}+2x\right)}{x-1/2}$

$\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\sqrt{2x-1}+2x\right)}{x-1/2} = 2\frac{\ln\left(t^2+\frac{2}{7}t+1\right)}{t^2}$ et $\begin{cases} x \mapsto 1/2 \\ t \mapsto 0 \end{cases}$

$\lim \frac{h(x)-h(1/2)}{x-1/2} = +\infty$; alors h n'est pars dérivable en $x \mapsto 1/2$

$\frac{1}{2}$, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

d) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln\left(\sqrt{2x-1}+7x\right) = +\infty$.

2.

a) $\forall\, x \in [1/2;+\infty[,\ 1+7\sqrt{2x-1} \geq 0$.

b) $\forall\, x \geq 1/2,\ 2x-1+7x\sqrt{2x-1} \geq 0$.

c) $\forall\, x \in]1/2;+\infty[, h'(x) = \left(\sqrt{2x-1}+7x\right)' \times \frac{1}{\sqrt{2x-1}+7x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+7\right) \times \frac{1}{\sqrt{2x-1}+7x} = \frac{1+7\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}\times\left(\sqrt{2x-1}+7x\right)} = \frac{1+7\sqrt{2x-1}}{2x-1+7x\sqrt{2x-1}}$; alors h est strictement croissante sur $]1/2;+\infty[$.

d) **Dressons le tableau de variation de h.**

x	$1/2$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$\ln\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $h^{-1}(x) = 2{,}5 \Leftrightarrow h^{-1}(x) - 2{,}5 = 0$.

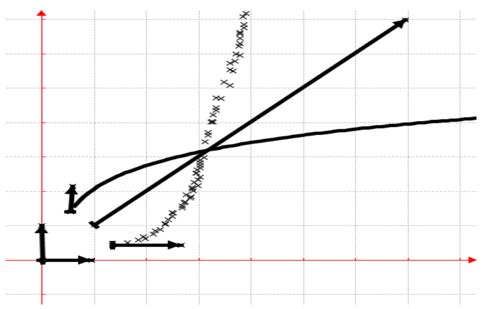
h^{-1} est continue et strictement croissante sur $]1;2[$.

Elle réalise donc une bijection de $]1;2[$ sur $][h^{-1}(1)-2{,}5];[h^{-1}(2)-2{,}5][=]-0{,}42;0{,}25[$. Or $[h^{-1}(1)-2{,}5]\times[h^{-1}(2)-2{,}5] < 0$ et $0 \in]-0{,}42;0{,}25[$. Ainsi l'équation $h^{-1}(x) = 2{,}5$ admet une solution $\alpha \in]1;2[$

4. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.** $\frac{h(x)}{x} = \frac{\ln\left(\sqrt{2x-1}+7x\right)}{x}$,

on en déduit $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$ $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

$\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu



Problème 25 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{(\ln x)^2+4} - 3\ln x$.

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de h ?**

b) **Etudier la limite de h sur D_h.**

c) **Etudier le signe de $\ln x - 3\sqrt{(\ln x)^2+4}$ sur $x \in]0;+\infty[$. Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $h'(x) = \frac{\ln x - 3\sqrt{(\ln x)^2+4}}{x\sqrt{(\ln x)^2+4}}$. En déduire le sens de variation de h.**

d) **Dresser le tableau de variation de h.**

2. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

3. **Résoudre dans IR, $h(x) = 0$.**

4. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

<u>**Correction :**</u> **$h(x) = \sqrt{(\ln x)^2+4} - 3\ln x$**

1.

a) $D_h = \{x/x \in \text{IR}, x > 0\} =]0;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\sqrt{(\ln x)^2+4} - 3\ln x\right] = +\infty$

Posons $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$, on peut écrire : $h(e^t) = \sqrt{t^2+4} - 3t = \frac{t^2+4-9t^2}{\sqrt{t^2+4}+3t} = \frac{4-8t^2}{\sqrt{t^2+4}+3t} = \frac{\frac{4}{t}-8t}{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}+3}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{t \mapsto +\infty} e^t = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\frac{\frac{4}{t}-8t}{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}+3}\right] = -\infty$.

c) Posons $\ln x - 3\sqrt{(\ln x)^2+4} < 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{(\ln x)^2+4} < -\ln x \Leftrightarrow 3\sqrt{(\ln x)^2+4} > \ln x \Leftrightarrow 9(\ln x)^2+36 > (\ln x)^2 \Leftrightarrow 8(\ln x)^2+36 > 0 \Leftrightarrow 2(\ln x)^2+9 > 0$ (vraie).

$\forall\, x \in]0;+\infty[, \ln x - 3\sqrt{(\ln x)^2+4} < 0$.

d) $\forall\, x \in]0;+\infty[, h'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{(\ln x)^2+4}} - \frac{3}{x} = \frac{\ln x - 3\sqrt{(\ln x)^2+4}}{x\sqrt{(\ln x)^2+4}} < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

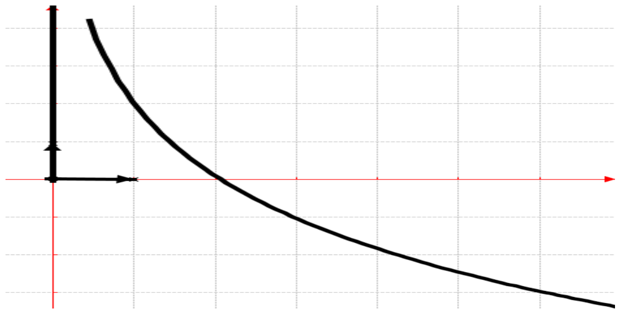
Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

Branche parabolique de direction (Ox) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\sqrt{(\ln x)^2+4}}{x} - 3\frac{\ln x}{x}\right] = 0$.

3. $\sqrt{(\ln x)^2+4} = 3\ln x \Leftrightarrow \begin{cases}(\ln x)^2+4 \geq 0\\ 3\ln x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ or $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \in [1;+\infty[$ donc $S_{\text{IR}} = \left\{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right\}$.

4. $\mathcal{C}_h$: $h(1) = 2$.



<u>Problème 26 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{\ln(x)+2}{1-\ln(x)}$.

1.

a) Montrer que l'on peut prolonger h par continuité à droite en 0 en attribuant à $h(0)$ la valeur -1.

b) Quel est l'ensemble de définition de h ?

c) Etudier les limites de h sur D_h.

d) Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{3}{x[1-\ln(x)]^2}$. En déduire le sens de variation de h.

e) Dresser le tableau de variation de h.

2. Résoudre dans IR, $h(x) = 0$.

3.

a) Monter que h admet une bijective de $[4;+\infty[$ sur l'intervalle J qu'on déterminera. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h.

b) Montrer que l'équation $h^{-1}(x) = 1,1$ admet une unique solution, notée α, appartient à $]2;2,5[$.

4. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et celle des réciproques de la fonction h.

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{\ln(x)+2}{1-\ln(x)} = \frac{1+\frac{2}{\ln(x)}}{\frac{1}{\ln(x)}-1}$.

1.

a) Prolonger h par continuité à droite en 0 :

Posons $t = \ln(x)$, $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} \left[\frac{t+2}{1-t}\right] = -1$, c'est une limite finie qui indique le prolongement de h par continuité à droite en 0. On peut aussi remarquer que h n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en cet point une demi-tangente verticale.

b) $D_h = \{x / x \in \text{IR}, 1 - \ln(x) \neq 0 \ et\ x > 0\} =]0; e[\cup]e; +\infty[$.

c) Posons $t = \ln(x)$, $h(e^t) = \frac{t+2}{1-t}$ on calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\frac{t+2}{1-t}\right] = -1$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} \left[\frac{t+2}{1-t}\right] = -1$; $\lim\limits_{x \mapsto e^-} h(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto e^+} h(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$.

d) $\forall\, x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$, $h'(x) = \frac{\frac{1}{x}[1-\ln(x)]+\frac{1}{x}[\ln(x)+2]}{[1-\ln(x)]^2} = \frac{3}{x[1-\ln(x)]^2} > 0$ alors h est strictement croissante sur $]0; e[$ et sur $]e; +\infty[$.

e) **tableau de variation de h :**

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	-1

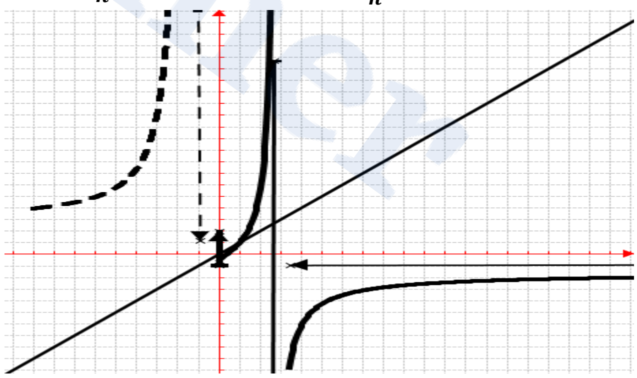
2. $h(x) = \frac{\ln(x)+2}{1-\ln(x)} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$, donc $S_{\text{IR}} = \{e^{-2}\}$.

3.

a) h est continue et strictement croissante sur $[4; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[4; +\infty[$ vers $J = [-8,76; -1[$. **Explicitons h^{-1} :** $y = \frac{\ln(x)+2}{1-\ln(x)} \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{y-2}{1+y} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y-2}{1+y}}$, donc $\forall\, x \in [-8,76; -1[$, $h^{-1}(x) = e^{\frac{x-2}{1+x}}$.

b) $h^{-1}(x) = 1,1 \Leftrightarrow h^{-1}(x) - 1,1 = 0$.
h^{-1} est continue et strictement croissante sur $]2; 2,5[$. Elle réalise donc une bijection de $]2; 2,5[$ sur $][h^{-1}(2) - 1,1]; [h^{-1}(2,5) - 1,1][=]-0,1; 0,06[$. Or $[h^{-1}(2) - 1,1] \times [h^{-1}(2,5) - 1,1] < 0$ et $0 \in]-0,1; 0,06[$. Ainsi l'équation $h^{-1}(x) = 1,1$ admet une solution $\alpha \in]2; 2,5[$.

4. **$\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinu**



<u>Problème 27 :</u>

A. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité à droite en 0 en attribuant à $f(0)$ la valeur 1.

2. Quel est l'ensemble de définition de h ?

3. Etudier la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-2}{x[\ln(x)-1]^2}$. En déduire le sens de variation de f.

5. Dresser le tableau de variation de f.

6. Résoudre dans IR, $f(x) = 0$.

B. On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{[\ln(x)]^2+1}{[\ln(x)]^2-1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Etudier les limites de h sur D_h.

3. Etudier les variations de h sur $[2; e[\cup]e; +\infty[$.

4. Tracer $\mathcal{C}_h$ sur $[2; e[\cup]e; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$.

<u>**Correction :**</u>

A. $f(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$

1. Prolonger h par continuité à droite en 0 :

Posons $t = \ln(x)$, $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} \left[\frac{t+1}{t-1}\right] = 1$, c'est une limite finie qui indique le prolongement de f par continuité à droite en 0. On peut aussi remarquer que f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en cet point une demi-tangente verticale.

2. $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$.

3. Posons $t = \ln(x)$, $f(e^t) = \frac{t+1}{t-1}$ on calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\frac{t+1}{t-1}\right] = 1$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} \left[\frac{t+1}{t-1}\right] = 1$; $\lim\limits_{x \mapsto e^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto e^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

4. $\forall x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}[\ln(x)-1] - \frac{1}{x}[\ln(x)+1]}{[\ln(x)-1]^2} = \frac{-2}{x[\ln(x)-1]^2} < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; e[$ et sur $]e; +\infty[$.

5. **tableau de variation de f :**

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

6. $f(x) = \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, donc $S_{IR} = \{e^{-1}\}$.

B. $h(x) = \frac{[\ln(x)]^2+1}{[\ln(x)]^2-1}$.

1. $D_h =]0; e^{-1}[\cup]e^{-1}; e[\cup]e; +\infty[$

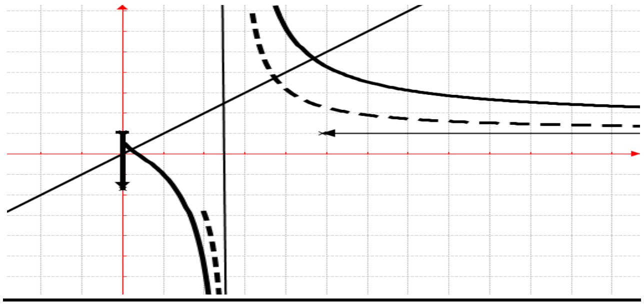
2. Posons $t = \ln(x)$, $h(e^t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ on calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\frac{t^2+1}{t^2-1}\right] = 1$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} \left[\frac{t^2+1}{t^2-1}\right] = 1$; $\lim\limits_{x \mapsto e^-} h(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto e^+} h(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$.

3. $\forall x \in [2; e[\cup]e; +\infty[$,
$h'(x) = \frac{\frac{2\ln x}{x}[[\ln(x)]^2-1] - \frac{2\ln x}{x}[[\ln(x)]^2+1]}{[[\ln(x)]^2-1]^2} = \frac{-2\ln x}{x[[\ln(x)]^2-1]^2} < 0$ alors h est strictement décroissante sur $[2; e[$ et sur $]e; +\infty[$.

tableau de variation de h : $h(2) = -2{,}85$

x	2	e		$+\infty$
$h'(x)$	$-$			$-$
$h(x)$	$-2{,}85$ ↘ $-\infty$			$+\infty$ ↘ 1

4. **$\mathcal{C}_f$ en trait continue et $\mathcal{C}_h$ en trait discontinue**



<u>**Problème 28 :**</u> **On considère la fonction g définie par : $g(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$**

1. Etudier les variations de g.

2.

a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

b) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse e^2.

c) Etudier les branches infinies.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ et (T).

4. On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]0; e]$.

a) Démontrer que g admet une application réciproque h^{-1} dont on explicitera l'ensemble de définition.

b) Calculer $h^{-1}(x)$.

c) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 0.

5. Soit λ est un réel appartenant à $]6; 7[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 1$ et $\mathcal{C}_g$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$.

<u>**Correction :**</u> **$g(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$**

1. $D_g = \{x / x \in IR,\ x > 0\} =]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$; alors g est strictement croissante sur $]0; e[$ et g est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$.

$g(x) = 2\ln x - (\ln x)^2 = \ln x\,(2 - \ln x)$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[\ln x\,(2-\ln x)] = -\infty$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\ln x\,(2-\ln x)] = -\infty$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$-$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

2.

a) $g(x) = \ln x\,(2-\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$, donc $S_{IR} = \{1; e^2\}$.

b) $(T) : y = g'(e^2)(x-e^2) + g(e^2) = -2e^{-2}x + 2$.

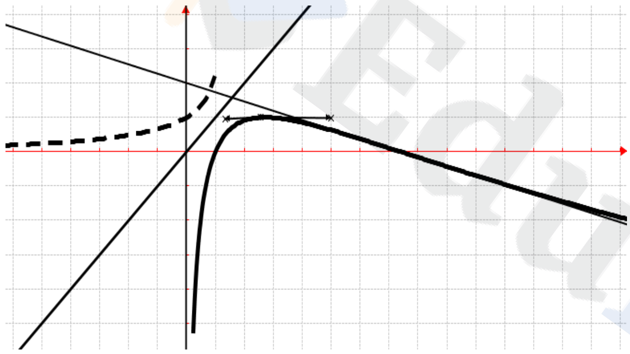
c) **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

Branche parabolique de direction (Ox) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2\frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}\right] = 0$.

3. **$\mathcal{C}_h$ en trait plein et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait pointé**



4. **h la restriction de g à $]0; e]$.**

a) h est continue et strictement croissante sur $]0; e]$. Elle réalise une bijection de $]0; e]$ vers $J =]-\infty; 1]$. h^{-1} est définie sur $]-\infty; 1]$.

b) **Explicitons h^{-1} :** $y = 2\ln x - (\ln x)^2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x + y = 0 \Leftrightarrow x = e^{(1\pm\sqrt{1-y})}$, donc $\forall\, x \in]-\infty; 1]$, $h^{-1}(x) = e^{(1-\sqrt{1-x})}$.

c) **h^{-1} est dérivable en 0 :** $\frac{h^{-1}(x)-h^{-1}(0)}{x-0} = \frac{y-1}{g(y)-g(e)}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{h^{-1}(x)-h^{-1}(0)}{x-0} = \frac{1}{g'[h^{-1}(0)]} = \frac{1}{g'\left[e^{(1-\sqrt{1-0})}\right]} = \frac{1}{g'[1]} = \frac{1}{2}$.

5. $\boldsymbol{\lambda} \in]6; 7[$.

a) $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_1^{\lambda} g(x)dx = \int_1^{\lambda}[2\ln x]dx - \int_1^{\lambda}[(\ln x)^2]dx = 2\int_1^{\lambda}[\ln x]dx - [x(\ln x)^2]_1^{\lambda} + 2\int_1^{\lambda} \ln x\, dx = [-x(\ln x)^2 + 4x\ln x - 4x]_1^{\lambda} = -\boldsymbol{\lambda}(\ln\boldsymbol{\lambda})^2 + 4\boldsymbol{\lambda}\ln\boldsymbol{\lambda} - 4\boldsymbol{\lambda} + 4$.

b) $\lim\limits_{\boldsymbol{\lambda} \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) = +\infty$.

<u>Problème 29 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{2x-5}{x-1} + \ln(x-1)$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h(x) = 2 - \frac{3}{x-1} + \ln(x-1)$ et $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$.

c) Etudier les limites de h sur D_h.

d) Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$. En déduire le sens de variation de h. Dresser le tableau de variation de h.

2.

a) Déterminer les équations tangentes T_A et T_B aux points A et B d'abscisse 4 et 6.

b) Existe-t-il une tangente T_C à $\mathcal{C}_h$ parallèle à la droite (d) d'équation $y = 4x$? Si oui, en donner une équation.

3. Tracer $\mathcal{C}_h$, T_A, T_B, T_C et (d).

4. Soit α est un réel appartenant à $]4; 5[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 2$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 1.

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{2x-5}{x-1} + \ln(x-1)$.

1.

a) $D_h = \{x / x \in IR, x-1 > 0\} =]1; +\infty[$.

b) $h(x) = 2 - \frac{3}{x-1} + \ln(x-1) = \frac{2x-2-3}{x-1} + \ln(x-1) = \frac{2x-5}{x-1} + \ln(x-1) = h(x)$ et $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$.

c) Posons $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$, on a : $h(t +$ $1=2-3t+\ln t$ et $\lim x-1=\infty x\mapsto\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 1} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1}\left[\frac{2x-5}{x-1} + \ln(x-1)\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}\left[2 - \frac{3}{t} + \ln(t)\right] = +\infty$.

d) On sait que $h(x) = 2 - \frac{3}{x-1} + \ln(x-1)$ ainsi $\forall\, x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+2}{(x-1)^2} > 0$; alors h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	1			$+\infty$
$h'(x)$	‖		$+$	
$h(x)$	‖	$-\infty$	↗	$+\infty$

2.

a) **Equations des tangentes T_A et T_B**

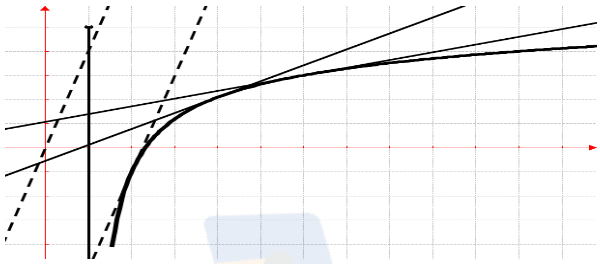
$T_A : y = h'(4)(x-4) + h(4) = 0{,}66x - 0{,}54$ et

$T_B : y = h'(6)(x-6) + h(6) = 0{,}32x + 1{,}08$.

b) **une tangente à $\mathcal{C}_h$ parallèle à la droite d'équation $y = 4x$:** $h'(x_0) = 4 = \frac{x_0+2}{(x_0-1)^2} \Leftrightarrow 4x_0^2 - 9x_0 + 2 = 0$, $\Delta = 49$, les racines sont : $x_0 = \frac{1}{4}$ ou $x_0 = 2$, or $x_0 = 2 \in]1; +\infty[$.

tangente T_C : $y = h'(2)(x-2) + h(2) = 4x - 9$.

3. **$\mathcal{C}_h$, T_A, T_B, T_C et (d)**



4. $\alpha \in]4; 5[$.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_2^{\alpha} h(x)dx =$

$\mathcal{A}(\alpha) = \int_2^{\alpha} h(x)dx = \int_2^{\alpha}\left[2 - \frac{3}{x-1} + \ln(x-1)\right]dx$

$\mathcal{A}(\alpha) = [2x - 3\ln(x-1) + (x-1)\ln(x-1) - x]_2^{\alpha}$

$\mathcal{A}(\alpha) = [x + (x-4)\ln(x-1)]_2^{\alpha}$

$\mathcal{A}(\alpha) = (\alpha-4)\ln(\alpha-1) + \alpha - 2$

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto 1} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto 1}[(\alpha-4)\ln(\alpha-1) + \alpha - 2] = \lim\limits_{\alpha \mapsto 1}[(\alpha-4)\ln(\alpha-1) + \alpha - 2] = +\infty$.

<u>Problème 30 :</u>

1. **On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$. Étudier les variations de g sur D_g. Déterminer l'équation de la droite (d) tangente au point A d'abscisse 0. Etudier la position de (d) par rapport à $\mathcal{C}_g$.**

2. **Soit g_1 la restriction de g à $[0; 1]$.**

a) **Montrer que g_1 est une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.**

b) **En déduire que g_1 admet une fonction réciproque g_1^{-1}. Calculer $g_1^{-1}(x)$ et déterminer les variations de g_1^{-1}.**

c) **Construire $\mathcal{C}_{g_1^{-1}}$ la courbe représentative de g_1^{-1} sur le même dessin.**

3. **On considère la fonction f définie par :**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{(\ln x)^2 + \ln x + 1} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Étudier les variations et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.**

4. **Soit f_1 la restriction de f à $[1; e]$.**

a) **Montrer que f_1 est une bijection de $[1; e]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.**

b) **En déduire que f_1 admet une réciproque f_1^{-1}. Sans calculer $f_1^{-1}(x)$, déterminer les variations de f_1^{-1}.**

c) **Construire $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$ la courbe représentative de f_1^{-1} sur le meme dessin.**

5. **On considère la fonction h définie par : $h(z) = \frac{z}{z^2+z+1}$.**

a) **Quel est l'ensemble de définition de h ?**

b) **On pose $Z = h(-1+i)$. Calculer Z, $\frac{1}{Z}$ et Z^8.**

c) **On pose $z = e^{i\theta}$. Démontrer que dans ce cas $\overline{h(z)} = h(\bar{z}) = h(z)$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.**

<u>Correction :</u>

1. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$. $D_g = \mathrm{IR}$

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $g'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$; alors g est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]0; +\infty[$ et g est décroissante sur $[-2; 0]$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = 1$.

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		+		−		+
$g(x)$	1 ↗	1,33	↘	0	↗	1

(d) : $y = g'(0)(x-0) + g(0) = 0$.

La position de (d) par rapport à $\mathcal{C}_g$: $g(x) - y = g(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1} > 0$, alors $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de (d).

2. **g_1 la restriction de g à $[0; 1]$:**

a) g_1 est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$. Elle réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $I = [0; 1/3]$.

b) Comme g_1 est une bijection sur I, alors elle admet une fonction réciproque g_1^{-1} définie sur I.

Calculons $g_1^{-1}(x)$: $y = \frac{x^2}{x^2+x+1} \Leftrightarrow (y-1)x^2 + yx + y = 0$, $\Delta = 2y(2-y)$, on a $x = \frac{-y \pm \sqrt{2y(2-y)}}{2(y-1)}$ ainsi :

$\forall\, x \in [0; 1/3]$, $g_1^{-1}(x) = \frac{-x - \sqrt{2x(2-x)}}{2(x-1)}$.

x	0		$1/3$
$(g_1^{-1})'(x)$		+	
$g_1^{-1}(x)$	0	↗	1

c) **$\mathcal{C}_{g_1^{-1}}$ voir figure, le tracé en pointé.**

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{(\ln x)^2}{(\ln x)^2+\ln x+1} & si\ x>0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$

a) Continuité de f en 0: $\frac{(\ln x)^2}{(\ln x)^2+\ln x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}}$, ce qui permet

$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = \lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}}\right] = 1$ et $f(0)=1$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\ln x-1}{x[(\ln x)^2+\ln x+1]} = \frac{-1-\frac{1}{\ln x}}{x\ln x+x+\frac{x}{\ln x}}$

$\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{-1-\frac{1}{\ln x}}{x\ln x+x+\frac{x}{\ln x}}\right] = -\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) variations et tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f :

$\forall\ x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\ln x(\ln x+2)}{x[(\ln x)^2+\ln x+1]^2}$; alors f est strictement croissante sur $]0;e^{-2}]$ et sur $[1;+\infty[$ et g est décroissante sur $[e^{-2};1]$.

$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = 1$.

x	0	e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	+		−		+
$f(x)$	1	↗	1,33	↘	0	↗ 1

4. f_1 la restriction de f à $[1;e]$.

a) f_1 est continue et strictement croissante sur $[1;e]$. Elle réalise une bijection de $[1;e]$ sur $\mathrm{J} = [0;1/3]$.

b) Comme f_1 est une bijection sur J, alors elle admet une fonction réciproque f_1^{-1} définie sur J

x	0		1/3
$(f_1^{-1})'(x)$		+	
$f_1^{-1}(x)$	0	↗	1

c) $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$ voir figure, le tracé en point et tiré.

5. $\boldsymbol{h(z) = \frac{z}{z^2+z+1}}$.

a) $\mathrm{D}_h = \{z/z\in\mathbb{C}, z^2+z+1\neq 0\}$.

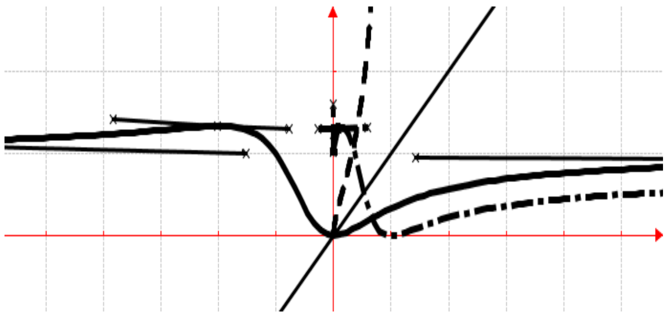
$\mathrm{D}_h = \mathrm{IR} - \left\{\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

b) On pose $Z = h(-1+i)$. Calculons $Z = h(-1+i) = \frac{-1+i}{-i} = -1-i = \sqrt{2}e^{\frac{-3\pi}{4}i}$, $\frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ et

$Z^8 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi}{4}i}\right)^8 = 16e^{-6\pi i} = -16$.

c) On pose $z = e^{i\theta}$. Démontrons que dans ce cas $\overline{h(z)} = h(\bar{z}) = h(z)$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z

$\overline{h(z)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2+\bar{z}+1} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{-2i\theta}+e^{-i\theta}+1}\times\frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}}$, on remarque aisément que $\overline{h(z)} = h(\bar{z}) = h(z)$.



Problème 31 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases}\sqrt{x}\ln x, & si\ x>0 \\ 0\ si\ x=0\end{cases}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interprétation graphique du résultat obtenu.

c) Etudier les limites de h sur D_h.

d) Montrer que pour tout réel $x>0$, $h'(x) = \frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$. En déduire le sens de variation de h. Dresser le tableau de variation de h.

2. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

<u>Correction :</u> $h(x) = \sqrt{x}\ln x = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$

1.

a) $\mathrm{D}_h = [0;+\infty[$.

b) Continuité de h en 0: $\lim_{x\mapsto 0} 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} = 0$ alors h est continue en 0.

Dérivabilité de h en 0: $\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\mapsto 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{-\infty}{0^+} - \infty$; alors h n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en cet point une demi-tangente verticale.

c) $\lim_{x\mapsto 0}[2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}] = 0$ et $\lim_{x\mapsto+\infty}[2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}] = +\infty$.

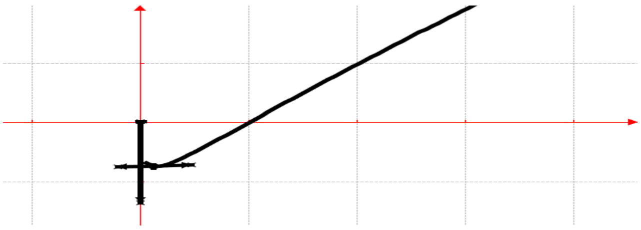
d) $\forall\ x\in]0;+\infty[$, $h'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$; alors h est strictement décroissante sur $]0;e^{-2}[$ et h est strictement croissante sur $]e^{-2};+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$h'(x)$	||	−		+	
$h(x)$	0	↘	$-2e^{-1}$	↗	$+\infty$

2. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.** $\frac{h(x)}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.Branche parabolique de direction (Ox) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$.

$\mathcal{C}_h$.



<u>Problème 32 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & si\ x \leq 0 \\ x^2 \ln x & si\ x > 0 \end{cases}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interprétation graphique du résultat obtenu.

c) Etudier les limites de h sur D_h.

Etudier le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

2. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$. (d'unité graphique 1 cm)

3. Soit λ est un réel appartenant à $]-3;-2[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\lambda) =$.

<u>Correction :</u> $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & si\ x \leq 0 \\ x^2 \ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

1.

a) $D_h =]-\infty;+\infty[$.

b) Continuité de h en 0:

- $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right] = 0$ alors h est continue en 0^- ;
- $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} [x^2 \ln x] = 0$ alors h est continue en 0^+

On remarque que $hg(0) = hd(0) = h(0) = 0$, donc h est continue en 0.

Dérivabilité de h en 0:

- $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ alors h n'est pas dérivable à gauche de 0. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ **admet une demi-tangente verticale à gauche.**
- $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} [x \ln x] = 0$ alors h est dérivable à droite de 0. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ **admet une demi-tangente à droite.**

h n'est pas dérivable en 0.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 0} [h(x)] = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] = -1$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [x^2 \ln x] = +\infty$.

- $\forall\, x \in]-\infty;0[$, $h'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$; alors h est strictement croissante sur $]-\infty;0[$.
- $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $h'(x) = x(2\ln x + 1)$; alors h est strictement décroissante sur $]0;e^{-1/2}[$ et h est strictement croissante sur $]e^{-1/2};+\infty[$.

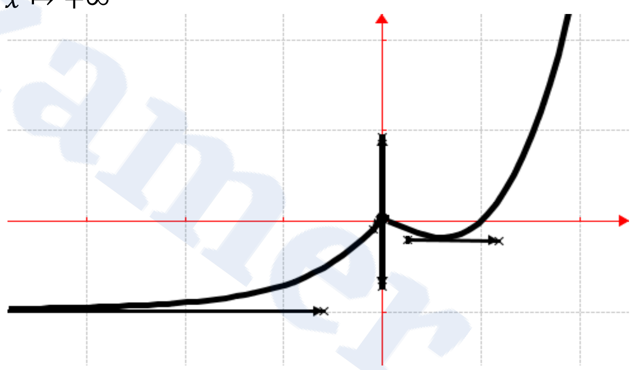
Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	||	$-$		$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-1/(2e)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$**

asymptote horizontale d'équation $y = -1$

Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [x \ln x] = +\infty$.



3. $\lambda \in]-3;-2[$.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_\lambda^0 h(x)dx\ cm^2 = -\int_\lambda^0 \left[\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right] dx\ cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[-\sqrt{x^2+1}\right]_\lambda^0 cm^2 = \sqrt{\lambda^2+1} - 1$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \left[\sqrt{\lambda^2+1} - 1\right] = +\infty$.

<u>Problème 33 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & si\ x \leq 0 \\ x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) & si\ x > 0 \end{cases}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interprétation graphique du résultat obtenu.

c) Etudier les limites de h sur D_h.

Etudier le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, appartient à $]1; 2[$. En déduire le signe de $h(x)$ sur IR.

3. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$. (d'unité graphique 2 cm)

4. Soit λ est un réel appartenant à $]0; \alpha[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 1$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathcal{A}(\lambda) =$.

<u>**Correction :**</u> $h(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & si\ x \le 0 \\ x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) & si\ x > 0 \end{cases}$

1.

a) $D_h =]-\infty; +\infty[$.

b) Continuité de h en 0:

- $\lim\limits_{x \mapsto 0^-}[\ln(x^2+1)] = 0$ h est continue en 0^- ;
- $\lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2\right] = 0$ h est continue en 0^+.

On remarque que $hg(0) = hd(0) = h(0) = 0$, donc h est continue en 0.

Dérivabilité de h en 0:

- $\lim\limits_{x \mapsto 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \times x\right] = 0$ alors h est dérivable à gauche de 0. Par conséquent **$\mathcal{C}_h$ admet une demi-tangente à gauche.**
- $\lim\limits_{x \mapsto 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[x \ln x - \frac{1}{2}x\right] = 0$ alors h est dérivable à droite de 0. Par conséquent **$\mathcal{C}_h$ admet une demi-tangente à droite.**

h est dérivable en 0.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 0}[h(x)] = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[\ln(x^2+1)] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right] = +\infty$.

- $\forall\, x \in]-\infty; 0[$, $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} < 0$; alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
- $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = 2x \ln x$; alors h est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $h(1) = -1/2$ et $h(2) = 0,772$.

h est dérivable et strictement croissante sur $]1; 2[$. De plus $\begin{cases} h(1) \times h(2) < 0 \\ ou\ 0 \in [-1/2,; 0{,}772] \end{cases}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, telle $h(\alpha) = 0$ et $\alpha \in]1; 2[$.

signe de $h(x)$ sur IR :

$\forall\, x \in]0; \alpha[,, h(x) < 0$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[,, h(x) > 0$

Si $x = 0$ ou $x = \alpha$ alors $h(x) = 0$.

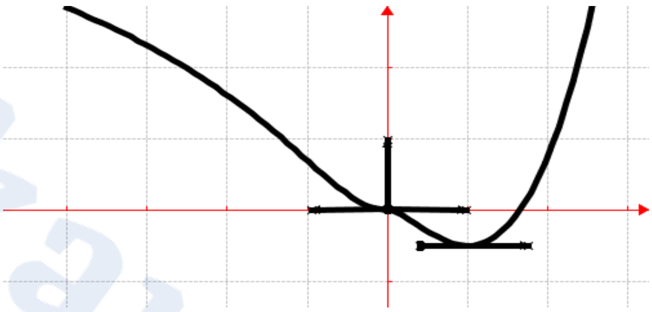
3. branches infinies de $\mathcal{C}_h$

Branche parabolique de direction (Ox) car

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right] = 0$.

Branche parabolique de direction (Oy) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right] = +\infty$.



4. $\lambda \in]0; \alpha[$.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = -4\int_1^{\lambda} h(x)dx\ cm^2 =$
$-4\int_1^{\lambda}\left[x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]dx\ cm^2 =$

$\mathcal{A}(\lambda) = -4\left[\frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{5}{6}\right)\right]_1^{\lambda} cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\frac{10}{9} - \frac{4}{3}\lambda^3\left(\ln\lambda - \frac{5}{6}\right)\right] cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0}\mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto 0}\left[\frac{10}{9} - \frac{4}{3}\lambda^3 \ln\lambda + \frac{20}{18}\lambda^3\right] = \frac{10}{9}$.

<u>**Problème 34 :**</u> **On considère la fonction h définie par :** $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty;\ -1[\ \ h(x) = 1 - x^2 \\ \forall\, x \in [-1;\ 1]\ \ h(x) = \ln(2 - x^2) \\ \forall\, x \in]1;\ +\infty[\ \ h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \end{cases}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -1. Interprétation graphique du résultat obtenu.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 1. Interprétation graphique du résultat obtenu.

d) Etudier les limites de h sur D_h.

Etudier le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

2. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$. (d'unité graphique 2 cm)

__Correction :__ $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty;\ -1[\ \ h(x) = 1 - x^2 \\ \forall\, x \in [-1;\ 1]\ \ h(x) = \ln(2 - x^2) \\ \forall\, x \in]1;\ +\infty[\ \ h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \end{cases}$

1.

a) $D_h =]-\infty; +\infty[$.

b) **Continuité de h en -1: $h(-1) = 0$**

- $\lim\limits_{x \mapsto -1^-}[1 - x^2] = 0$ h est continue en -1^- ;
- $\lim\limits_{x \mapsto -1^+}[\ln(2 - x^2)] = 0$ h est continue en -1^+.

On remarque que $hg(-1) = hd(-1) = h(-1) = 0$, donc h est continue en -1.

Dérivabilité de h en -1 :

- $\lim\limits_{x \mapsto -1^-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^-}[1 - x] = 0$ alors h est dérivable à gauche de -1. Par conséquent **$\mathcal{C}_h$ admet une demi-tangente à gauche.**
- $\lim\limits_{x \mapsto -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[\frac{\ln(2-x^2)}{x+1}\right] = \text{FI}$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[\frac{\ln[1+(1+x)(1-x)]}{(x+1)(1-x)} \times (1 - x)\right] = 2$

alors h est dérivable à droite de -1. Par conséquent **$\mathcal{C}_h$ admet une demi-tangente à droite de -1.**

h n'est pas dérivable en -1.

c) **Continuité de h en 1: $h(1) = 0$**

- $\lim\limits_{x \mapsto 1^-}[\ln(2 - x^2)] = 0$ h est continue en 1^- ;
- $\lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = 0$ h est continue en 1^+.

On remarque que $hg(1) = hd(1) = h(1) = 0$, donc h est continue en 1.

Dérivabilité de h en 1 :

- $\lim\limits_{x \mapsto 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^-}\left[\frac{\ln(2-x^2)}{x-1}\right] = \text{FI}$

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^-}\left[\frac{\ln[1+(1+x)(1-x)]}{(x+1)(1-x)} \times (1 - x)\right] = 0$

h est dérivable à gauche de 1. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet une demi-tangente à gauche.

- $\lim\limits_{x \mapsto 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[\frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = \text{FI}$

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)(x-1)^2}}\right] = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}\right] = +\infty$

alors h n'est pas dérivable à droite de 1. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet une demi-tangente verticale.

h n'est pas dérivable en 1.

d) $\lim\limits_{x \mapsto -1}[h(x)] = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto 1}[h(x)] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[1 - x^2] = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right] = 1$.

- $\forall\, x \in]-\infty; -1[$, $h'(x) = -2x > 0$; alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$.
- $\forall\, x \in]-1; 1[$, $h'(x) = \frac{-2x}{2-x^2}$;

$\forall\, x \in]-1; 0[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-1; 0[$.

$\forall\, x \in]0; 1[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

- $\forall\, x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 0$; alors h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

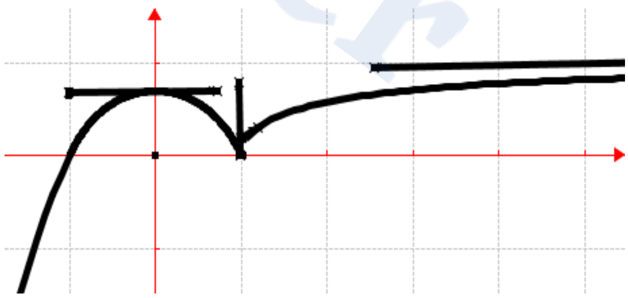
Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	||	$+$		$-$	||	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

2. branches infinies de $\mathcal{C}_h$

asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[1 - x] = +\infty$.



__Problème 34 :__ **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} x^3 \ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.**

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Montrer que h est une fonction impaire.

c) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interprétation graphique du résultat obtenu.

d) **Etudier les limites de h sur D_h.**
Etudier le sens de variation de h.
Dresser le tableau de variation de h.
2. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**
Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$. (d'unité graphique 2 cm)
3. **Soit λ est un réel appartenant à $]-1;0[$.**
a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x=\lambda$, $x=-1$ et $\mathcal{C}_h$.**
b) **Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathcal{A}(\lambda) =$.**

__Correction :__ $h(x) = \begin{cases} x^3 \ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

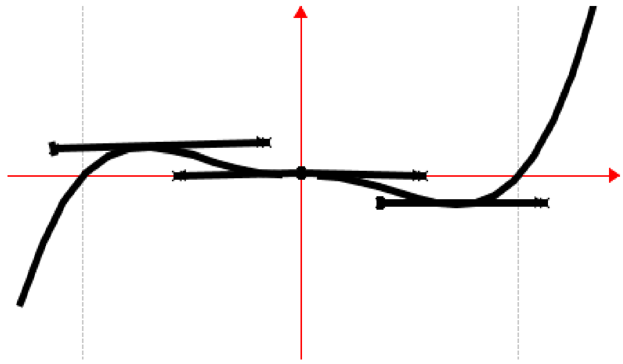
1.
a) $D_h =]-\infty;+\infty[$.
b) $h(-x) = (-x)^3 \ln|-x| = -x^3 \ln|x| = -h(x)$, d'où h est une fonction impaire.
c) **Continuité de h en 0:**
$\lim\limits_{x \mapsto 0}[x^3 \ln|x|] = 0$ donc h est continue en 0 ;
Dérivabilité de h en 0:
$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x^2 \ln|x|] = 0$ alors h est dérivable.
d) $\lim\limits_{x \mapsto 0}[h(x)] = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[x^3 \ln|x|] = -\infty$.
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x^3 \ln|x|] = +\infty$. **Sens de variation de h :**
$\forall\, x \neq 0$, $h'(x) = 3x^2 \ln|x| + x^2 = x^2\,(3\ln|x| + 1)$
Posons $3\ln|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = e^{-1/3} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = e^{-1/3} \\ x = -e^{-1/3} \end{cases}$;

x	$-\infty$		$-e^{-1/3}$		0		$e^{-1/3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	

$\forall\, x \in]-\infty;\, -e^{-1/3}[\cup]e^{-1/3};+\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty;\, -e^{-1/3}[$ et sur $]e^{-1/3};+\infty[$.
$\forall\, x \in]-e^{-1/3};0[\cup]0;e^{-1/3}[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement croissante sur $]-e^{-1/3};0[$ et sur $]0;e^{-1/3}[$.
Dressons le tableau de variation de h

x	$-\infty$		$-e^{-1/3}$		0		$e^{-1/3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-0{,}12$	$\searrow$	0	$\searrow$	$0{,}12$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$**
Branche parabolique de direction (Oy) car
$\lim\limits_{x \mapsto \mp\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \mp\infty}[x^2 \ln|x|] = +\infty$.



5. $\lambda \in]-1;0[$.
a) $\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_{-1}^{\lambda} h(x)dx\ cm^2 =$
$4\int_{-1}^{\lambda}[x^3 \ln(-x)]dx\ cm^2 =$
$\mathcal{A}(\lambda) = 4\left[\frac{1}{4}x^4 \ln(-x)\right]_{-1}^{\lambda} cm^2 - 4\int_{-1}^{\lambda}\frac{1}{4}x^3\ cm^2$
$\mathcal{A}(\lambda) = \left[x^4\left[\ln(-x) - \frac{1}{4}\right]\right]_{-1}^{\lambda} cm^2$
$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\lambda^4\left[\ln(-\lambda) - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}\right] cm^2$.
b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto 0}\left[\lambda^4 \ln(-\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^4 + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$

__Problème 35 :__ **On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} |x\ln x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$**

1.
a) **Donner l'expression de la fonction f sans valeur absolue sur $[0;+\infty[$.**
b) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 1. Interpréter graphiquement ces résultats.**
c) **Déterminer la limite de f en $+\infty$. Etudier le sens de variation de f définie sur $[0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de f.**
d) **Dresser le tableau de variation de f.**
Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.
2.
a) **Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, appartient à $]1,5;2[$.**
b) **En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$.**
3. **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x=\alpha$, $x=1$ et $\mathcal{C}_f$. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.**
4. **On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_0 > 1$ et pour tout tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.**
a) **Pour quelles valeurs de u_0, de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est-elle constante ?**
b) **On choisit $u_0 \in]0;e^{-1}[$. Démontrer que :**

- **$\forall\, n \in \mathrm{IN},\ 0 < u_n < e^{-1}$.**
- **La suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est strictement croissante.**

c) On choisit maintenant $u_0 \in \left]e^{-1}; 1\right[$.

- **Prouver que $0 < u_1 < e^{-1}$.**
- **En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est strictement croissante à partir du rang 1.**

d) Pour $u_0 > e$,

- **montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est croissante.**
- **Prouver que $x \geq e$, $f'(x) \geq 2$.**
- **En déduire que $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ u_{n+1} - e \geq 2(u_n - e)$, puis que $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ u_{n+1} - e \geq 2^n(u_0 - e)$.**
- **En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = \begin{cases} |x \ln x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1.

a) f sans valeur absolue sur D_f : $D_f = [0; +\infty[$

$\forall\, x \in]0; 1],\ f(x) = -x \ln x$

$\forall\, x \in [1; +\infty[,\ f(x) = x \ln x$

b) Continuité de f en 0: $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$, alors f est continue en 0. **Continuité de f en 1:** $\lim\limits_{x \mapsto 1^\pm} f(x) = 0$ et $f(1) = 0$, alors f est continue en 1.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |\ln x|$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \mp\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

Dérivabilité de f en 1: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{|\ln x|}{x-1}$

$\lim\limits_{x \mapsto 1^\mp} \frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \mp 1$; alors f n'est pas dérivable en 1, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point deux demi-tangentes.

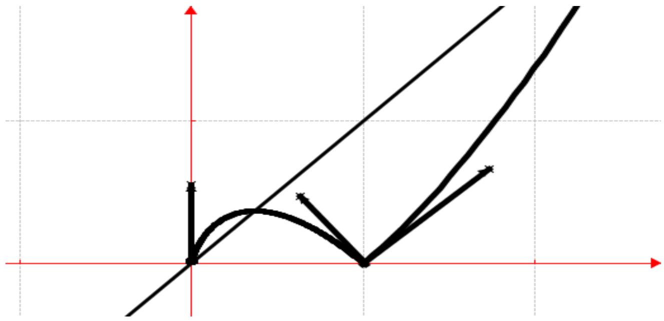
c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [x \ln x] = +\infty$.

$\forall\, x \in]0; 1[,\ f'(x) = -(1 + \ln x)$, donc f est strictement croissante sur $]0; e^{-1}]$ et f est strictement décroissante sur $[e^{-1}; 1[$.

$\forall\, x \in]1; +\infty[,\ f'(x) = 1 + \ln x$, donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

d) Dressons le tableau de variation de f

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2.

a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0$.

f est continue et strictement croissante sur $]1{,}5; 2[$. Elle réalise donc une bijection de $]1{,}5; 2[$ sur $][f(1{,}5) - 1]; [f(2) - 1][=]-0{,}392; 0{,}38[$. Or $[f(1{,}5) - 1] \times [f(2) - 1] < 0$ et $]-0{,}392; 0{,}38[$. Ainsi l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in]1{,}5; 2[$

b) $\forall\, x \in [0; +\infty[,\ f(x) \geq 0$.

3. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha [x \ln x]dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}$.

$\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \left[\frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$.

4. $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ définie par $u_0 > 1\ /u_{n+1} = f(u_n)$.

a) $u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln u_n = u_n \Leftrightarrow \ln u_n = 1 \Leftrightarrow u_n = u_0 = e$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ constante.

b) $u_0 \in \left]0; e^{-1}\right[$. Démontrons que :

- **$\forall\, n \in \mathrm{IN},\ 0 < u_n < e^{-1}$:**

- $0 < u_0 < e^{-1}$, (vraie)
- Supposons que $\forall\, k \in \mathrm{IN},\ 0 < u_k < e^{-1}$ est vraie, montrons que $\forall\, k \in \mathrm{IN},\ 0 < u_{k+1} < e^{-1}$ est vraie : $0 < u_k < e^{-1} \Leftrightarrow \ln e^{-1} < \ln u_k < \ln 1 \Leftrightarrow -1 < \ln u_k < 1$ en multipliant membre à membre $0 < u_k < e^{-1}$, on obtient $0 < u_k \ln u_k < e^{-1} \Leftrightarrow 0 < u_{k+1} < e^{-1}$ (vraie).
- $\forall\, n \in \mathrm{IN},\ 0 < u_n < e^{-1}$.

- **$(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est strictement croissante :** $\forall\, u_0 \in]0; e^{-1}[$ or f est strictement croissante sur $]0; e^{-1}]$ alors $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est strictement croissante.

c) $u_0 \in \left]e^{-1}; 1\right[$

- **Prouvons que, $0 < u_1 < e^{-1}$:** $u_1 = f(u_0)$ $e^{-1} < u_0 < 1 \Leftrightarrow f(1) < f(u_0) < f(e^{-1}) \Leftrightarrow 0 < f(u_0) < e^{-1}$ ou $0 < u_1 < e^{-1}$.
- **suite $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est strictement croissante à partir du rang 1 :** on sait que $e^{-1} < u_0 < 1$ et $0 < u_1 < e^{-1}$ en faisant la différence membre à membre on a : $u_1 - u_0 > 0$, ou bien, comme f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ alors $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est strictement croissante à partir du rang 1.

d) Pour $u_0 > e$,

- **suite $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ est croissante :**

\- $u_0 > e \Leftrightarrow \ln u_0 > \ln e \Leftrightarrow u_0 \ln u_0 > u_0 \ln e \Leftrightarrow u_1 > u_0$, (vraie)

\- Supposons que $\forall\, k \in \mathrm{IN}$, $u_k > e$ est vraie, montrons que $\forall\, k \in \mathrm{IN}$, $u_{k+1} > u_k$ est vraie : $\ln u_k > \ln e \Leftrightarrow u_k \ln u_k > u_k \ln e \Leftrightarrow u_{k+1} > u_k$ (vraie).

\- $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $u_{n+1} > u_n$, $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$ est croissante.

- $x \geq e \Leftrightarrow 1 + \ln x \geq \ln e + 1 \Leftrightarrow 1 + \ln x \geq 2$ or $f'(x) = 1 + \ln x$, donc $\forall\, x \geq e$, $f'(x) \geq 2$.

- $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $u_{n+1} - e \geq 2(u_n - e)$, $f'(u_n) = 1 + \ln u_n \geq 2 \Leftrightarrow u_n \geq e \Leftrightarrow u_{n+1} \geq e$ or $u_{n+1} - e > u_n - e$ alors $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $u_{n+1} - e \geq 2(u_n - e)$ puis que,
 $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $u_{n+1} - e \geq 2^n(u_0 - e)$.

- **limite de $(u_n)_{n\in\mathrm{IN}}$.**

$$\lim_{n\mapsto+\infty}[u_n] = \lim_{n\mapsto+\infty}[\,2^n(u_0 - e)] = +\infty.$$

<u>Problème 36 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = -2 + \ln|x^2 - 4|$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h : D_h?**
2. **Montrer que h est une fonction paire.**
3. **Etudier les limites de h sur D_h.**
4. **Etudier le sens de variation de h sur D_h.**
5. **Dresser le tableau de variation de h sur D_h.**
6. **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.**
7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**
8. **Soit $\mathrm{I} =]-\infty; -2[$ et h_{I} la restriction de h à I.**

a) Montrer que h_{I} est une bijection de I vers IR.

b) Expliciter et représenter graphiquement la bijection réciproque h_{I}^{-1}.

<u>Correction :</u> $h(x) = -2 + \ln|x^2 - 4|$

1. $\mathrm{D}_h = \{x/x \in \mathrm{IR}, x^2 - 4 \neq 0\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$.

2. **Montrer que h est une fonction paire :**

$h(-x) = -2 + \ln|(-x)^2 - 4| = -2 + \ln|x^2 - 4| = h(x)$ alors h est une fonction paire. Donc la courbe $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On pouvait étudier h sur $\mathrm{D}_v = [0; 2[\cup]2; +\infty[$.

3. **Limites de h sur D_h :**

$$\lim_{x\mapsto -2^{\mp}} h(x) = -2 + \ln 0^+ = -\infty\,;$$
$$\lim_{x\mapsto 2^{\mp}} h(x) = -2 + \ln 0^+ = -\infty\,;$$
$$\lim_{x\mapsto -\infty} h(x) = -2 + \ln|-\infty| = +\infty \text{ et}$$
$$\lim_{x\mapsto +\infty} h(x) = -2 + \ln|+\infty| = +\infty.$$

4. **Sens de variation de h sur D_h :**

$\forall\, x \neq \{-2; 2\}$, $h'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$,

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 2	2 $+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	$-$	$-$	$+$
$h'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\forall\, x \in]-\infty; -2[\cup [0; 2[$, $h'(x) < 0$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $[0; 2[$.
$\forall\, x \in]-2; 0] \cup]2; +\infty[$, $h'(x) > 0$, alors h est strictement croissante sur $]-2; 0]$ et sur $]2; +\infty[$.

5. **tableau de variation de h sur D_h :** $h(0) = -0{,}61$.

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 2	2 $+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow -0{,}61$	$\searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

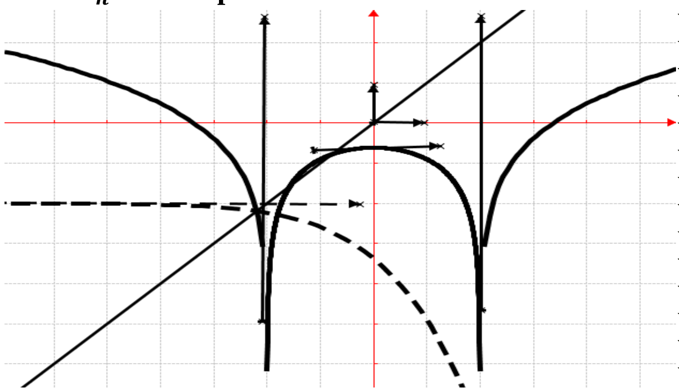
6. **Etudions les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.** Posons $t = x^2 \Leftrightarrow x = \mp\sqrt{t}$ alors $\lim_{x\mapsto\mp\infty} x^2 = +\infty$

- $$\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{-2}{x} + \frac{\ln|x^2-4|}{x}\right] = \lim_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] =$$
$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] = \lim_{t\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln|t|}{-\sqrt{t}}\right] = \lim_{t\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln t}{-\sqrt{t}}\right] = 0$$ alors $\mathcal{C}_h$ admet branche parabolique de direction (Ox) en $-\infty$.

- $$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{-2}{x} + \frac{\ln|x^2-4|}{x}\right] = \lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] =$$
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] = \lim_{t\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln|t|}{\sqrt{t}}\right] = \lim_{t\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right] = 0$$ alors $\mathcal{C}_h$ admet branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

Donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.

7. **$\mathcal{C}_h$ en trait plein.**



8. **Soit $\mathrm{I} =]-\infty; -2[$ et h_{I} la restriction de h à I.**

a) Montrer que h_{I} est une bijection de I vers IR.

h_{I} est continue est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$.

Donc h_{I} réalise une bijection de $]-\infty;-2[$ vers IR.

b) $h(x)=y \Leftrightarrow |x^2-4|=e^{y+2} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=\sqrt{e^{y+2}+4} \\ x=-\sqrt{e^{y+2}+4} \end{cases}$ donc $\forall\, x \in]-\infty;+\infty[, h_{\mathrm{I}}^{-1}(x)=-\sqrt{e^{x+2}+4}$.

Voir figure précédente, $\mathcal{C}_{h_{\mathrm{I}}^{-1}}$ en trait discontinue.

<u>Problème 37 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x)=\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|$.

a) Quel est l'ensemble de définition de h : D_h?

b) Etudier les variations de h sur D_h.

c) Montrer que l'équation $h(x)=\frac{21}{10}$ admet une unique solution x_0, appartient à l'intervalle $[2;3]$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

e) Soit λ un réel tel que $\lambda>2$.

Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ vérifiant $\begin{cases} 2\le x\le\lambda \\ 0\le y\le h(x) \end{cases}$.

Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque α tend vers 1.

<u>Correction :</u> $h(x)=\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|$

a) $\mathrm{D}_h=\{x/x\in \mathrm{IR}, x-1\neq 0\}=$
$\mathrm{D}_h=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

b) $\forall\, x\neq 1, h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{(x-1)^2}$,

$\forall\, x\in]-\infty;1[\cup]1;2]$ $h'(x)<0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;2[$.

$\forall\, x\in]2;+\infty[$, $h'(x)>0$ alors h est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\left[\frac{x}{x-1}+\ln(1-x)\right]=\frac{1}{0^-}+\ln 0^-=-\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\left[\frac{x}{x-1}+\ln(x-1)\right]=\frac{1}{0^+}=-\infty$ car $\frac{1}{0^+}$ est emporte sur $\ln 0^+$.

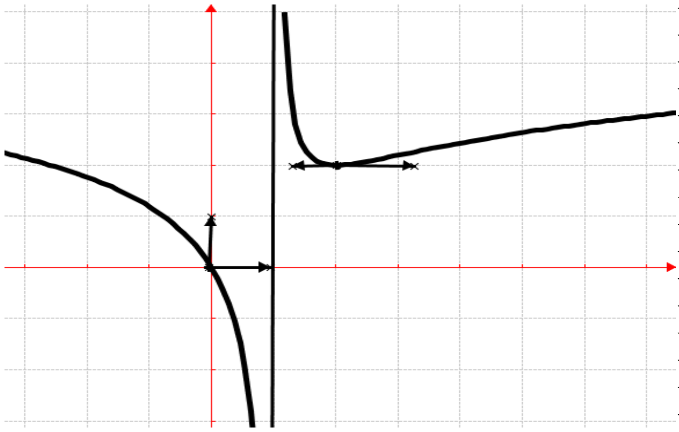
x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$-$		$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$

c) $h(2)=2$; $h(3)=2{,}19$; $h(x)=\frac{21}{10}=2,1$.

h est continue et strictement croissante sur $[2;3]$. **Or** $h(2)-2,1=-0{,}1$; $h(3)-2,19=0{,}09$ et $[h(2)-2,1]\times[h(3)-2,19]<0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires **l'équation $h(x)=\frac{21}{10}$ admet une unique solution $x_0\in[2;3]$.**

d) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$:**

$\lim\limits_{x\mapsto\mp\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto\mp\infty}\left[\frac{\ln|x|}{x}\right]=0$, donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.



e) $\mathcal{A}(\lambda)=\int_2^\lambda h(x)dx=\int_2^\lambda\left[\frac{x}{x-1}+\ln(x-\right.$
$1dx=2\lambda xx-1dx+x\ln x-12\lambda-2\lambda xx-1dx=x\ln x-12\lambda$
$=\lambda\ln\lambda-1$.

$\lim\limits_{\lambda\mapsto 1}\mathcal{A}(\lambda)=\ln 0^+=-\infty$.

<u>Problème 38 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x)=\ln|x^2+x-2|$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h : D_h?

2. Montrer que la droite (d) d'équation $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur D_h.

4. Etudier les limites de h sur D_h.

5. Etudier le sens de variation de h sur D_h.

6. Dresser le tableau de variation de h sur D_h.

7. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.

8. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

9. Soit $\mathrm{I}=]1;+\infty[$ et h_{I} la restriction de h à I.

a) Montrer que h_{I} est une bijection de I vers IR.

b) Expliciter et représenter graphiquement la bijection réciproque h_{I}^{-1}.

<u>Correction :</u> $h(x)=\ln|x^2+x-2|$

1. $\mathrm{D}_h=\{x/x\in\mathrm{IR}, x^2+x-2\neq 0\}=$
$]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

2. **Droite (d) : $x=-\frac{1}{2}$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_h$ on vérifie que $h(a+h)=h(a-h)$, $a=-\frac{1}{2}$.**

$h\left(x-\frac{1}{2}\right)=\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\right|=\ln\left|x^2-\frac{9}{4}\right|$

et $h\left(x+\frac{1}{2}\right)=\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\right|=$

$\ln\left|x^2-\frac{9}{4}\right|$ alors $h\left(x-\frac{1}{2}\right) = h\left(x+\frac{1}{2}\right)$ donc la droite (d) d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

3. Continuité et la dérivabilité de h sur D_h :

h est continue et dérivable sur $]-\infty;-2[$, sur $]-2;1[$ et sur $]2;+\infty[$.

4. Limites de h sur D_h :

$\lim\limits_{x\mapsto -2^{\mp}} h(x) = \ln 0^+ = -\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto 1^{\mp}} h(x) = \ln 0^+ = -\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}[\ln|x^2|] = \ln|+\infty| = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}[\ln|x^2|] = \ln|+\infty| = +\infty$.

5. Sens de variation de h sur D_h :

$\forall\, x \neq \{-2;1\}$, $h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$.

x	$-\infty$ $\quad -2$		$\frac{-1}{2}$ $\quad 1$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2+x-2	$+$	$-$	$-$	$+$
$h'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\forall\, x \in]-\infty;-2[\cup \left[\frac{-1}{2};1\right[$, $h'(x) < 0$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $\left]\frac{-1}{2};1\right[$.

$\forall\, x \in \left]-2;\frac{-1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$, $h'(x) > 0$, alors h est strictement croissante sur $\left]-2;\frac{-1}{2}\right[$ et sur $]1;+\infty[$.

6. Tableau de variation de h sur D_h :

$h\left(\frac{-1}{2}\right) = 0{,}81$.

x	$-\infty$ $\quad -2$		$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$ $\quad -$		$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow\searrow -\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

7. Etudions les branches infinies de $\mathcal{C}_h$. Posons $t = -x$ alors $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}(-x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{\ln|x^2+x-2|}{x}\right] = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] =$

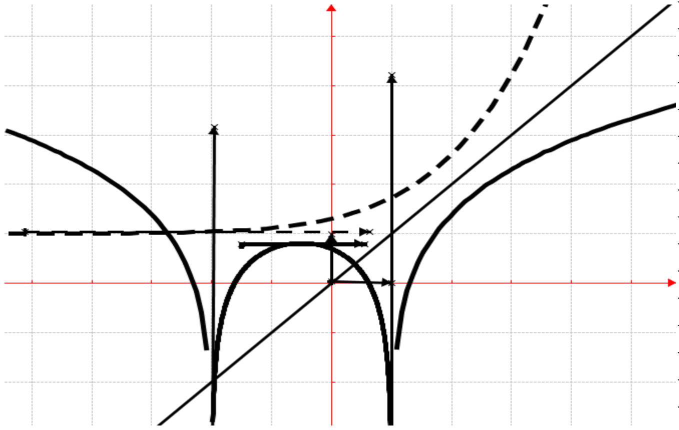
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{2\ln(-x)}{x}\right] = \lim\limits_{t\mapsto +\infty}\left[-\frac{2\ln t}{t}\right] = 0$; $\mathcal{C}_h$ admet branche parabolique de direction (Ox) en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{\ln|x^2+x-2|}{x}\right] = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] =$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{\ln|x^2|}{x}\right] = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[2\frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$ alors $\mathcal{C}_h$ admet branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

Donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.

8. $\mathcal{C}_h$ en trait plein.



9. Soit $I =]1;+\infty[$ et h_I la restriction de h à I.

a) Montrer que h_I est une bijection de I vers IR.

h_I est continue est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Donc h_I réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers IR.

b) $h(x) = y \Leftrightarrow |x^2+x-2| = e^y \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2+x-2 = e^y \\ x^2+x-2 = -e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2-e^y = 0 \\ x^2+x-2+e^y = 0 \end{cases}$, on considère que y est paramètre réel.

- $x^2+x-2-e^y = 0 \Leftrightarrow \Delta = 1-4(-2-e^y) = 9+4e^y$ donc $x' = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{9+4e^y}\right)$ et $x'' = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{9+4e^y}\right)$
- $x^2+x-2+e^y = 0 \Leftrightarrow \Delta = 1-4(-2+e^y) = 9-4e^y$ donc $x' = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{9-4e^y}\right)$ et $x'' = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{9-4e^y}\right)$.

$\forall\, x \in]-\infty;+\infty[$, $h_I^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{9+4e^x}\right)$.

Voir figure précédente, $\mathcal{C}_{h_I^{-1}}$ en trait discontinue.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\left(h_I^{-1}\right)'(x)$	$+$	
$h_I^{-1}(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

<u>Problème 39 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h : D_h?**
2. **Montrer que $\mathcal{C}_h$ admet pour centre de symétrie le point I de coordonnées $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$. Après avoir vérifier que I appartient à $\mathcal{C}_h$, écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ en ce point.**
3. **Etudier les limites de h sur D_h.**
4. **Etudier le sens de variation de h sur D_h.**
5. **Dresser le tableau de variation de h sur D_h.**
6. **Montrer que la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ à l'infinie. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (d).**
7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$, T_I et (d).**

Correction : $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|}$

1. $D_h = \left\{x/x \in IR, 1 + \frac{1}{x} \neq 0\right\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

2. **on vérifie que $h(a+h) + h(a-h) = 2b$ ou $h(2a-h) + h(h) = 2b$,**

$h(-1-x) + h(x) = \frac{-1-x+x}{2} + \ln\left[\left|\left|1 + \frac{1}{-1-x}\right|\right|.\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right] = -\frac{1}{2} + \ln\left[\left|\left|\frac{-1-x+1}{-1-x}\right|\right|.\left|\frac{x+1}{x}\right|\right] = -\frac{1}{2} + \ln\left[\left|\left|\frac{x}{1+x}\right|\right|.\left|\frac{x+1}{x}\right|\right] = -\frac{1}{2} + \ln[1] = -\frac{1}{2}$ et $2b = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{C}_h$ admet pour centre de symétrie le point I de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

<u>Montrons que $I \in \mathcal{C}_h$:</u> $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \ln\left|1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right| = -\frac{1}{4} + \ln|1-2| = -\frac{1}{4}$ alors $I \in \mathcal{C}_h$.

<u>Tangente au point I :</u> $T_I : y = h'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x + 2.$

3. **Limites de h sur D_h :**

$\lim\limits_{x \mapsto -1^{\mp}} h(x) = \frac{1}{2} + \ln 0^+ = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0^{\mp}} h(x) = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = -\ln 0^+ = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{1}{2}x + \ln|1|\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{2}x + \ln|1|\right] = +\infty$.

4. **Sens de variation de h sur D_h :** $\forall\, x \neq \{-1; 0\}$,

$h'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x-2}{2x(x+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{2x(x+1)}$.

x	$-\infty$ -2	-1	0	1	$+\infty$
$2x(x+1)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
x^2+x-2	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$h'(x)$	$+$	$-$ ‖	$+$ ‖	$-$	$+$

$\forall\, x \in]-\infty; -2[\cup]-1; 0[\cup]1; +\infty[$, $h'(x) > 0$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$; sur$]-1; 0[$ et sur $]1; +\infty[$.

$\forall\, x \in]-2; -1[\cup]0; 1]$, $h'(x) < 0$, alors h est strictement décroissante sur $]-2; -1[$ et sur $]0; 1]$.

5. **Tableau de variation de h sur D_h :** $h(-2) = -1{,}69$ et $h(1) = 1{,}19$.

x	$-\infty$ -2	-1		0		1 $+\infty$
$h'(x)$	$+$ $-$	‖	$+$	‖	$-$	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↗ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘↗ $+\infty$	

6. $h(x) - y = \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$.

$\lim\limits_{x \mapsto \mp\infty}[h(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \mp\infty}\left[\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right] = 0$, alors la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ à l'infinie.

Position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (d).

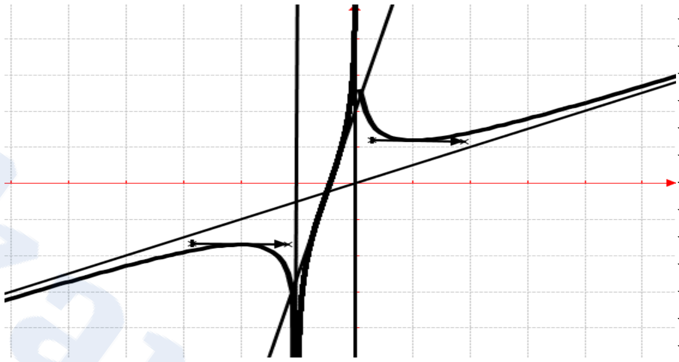
Posons $h(x) - y = \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| = \ln 1 \Leftrightarrow \left|1 + \frac{1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ 1 + \frac{1}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$ -1		$\frac{-1}{2}$		0 $+\infty$
$\ln\left\|1 + \frac{1}{x}\right\|$	$-$	‖	$-$	$+$ ‖	$+$

$\forall\, x \in]-\infty; -1[\cup \left]-1; \frac{-1}{2}\right]$, $h(x) - y < 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au dessous de la droite (d).

$\forall\, x \in \left[\frac{-1}{2}; 0\right[\cup]0; +\infty[$, $h(x) - y > 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au dessus de la droite (d).

7. **$\mathcal{C}_h$ en trait plein.**



<u>Problème 40 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = -1 + \frac{1}{x} + \ln|x|$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h : D_h?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**
3. **Etudier le sens de variation de h sur D_h.**
4. **Dresser le tableau de variation de h sur D_h.**
5. **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.**
6. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**
7. **Soit $I = [1; +\infty[$ et h_I la restriction de h à I.**

a) **Montrer que h_I est une bijection de I vers IR.**

b) **Représenter graphiquement la bijection réciproque h_I^{-1}.**

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{h(x) = -1 + \frac{1}{x} + \ln|x|}$

1. $D_h = \{x/x \in IR, x \neq 0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2. **Limites de h sur D_h :**

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-}\left[\frac{-1}{x}(-x\ln(-x)-1+x)\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left[\frac{1}{x}(x\ln(x)+1-x)\right] = +\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}[\ln|x|] = \ln|-\infty| = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}[\ln|x|] = \ln|+\infty| = +\infty$.

3. **Sens de variation de h sur D_h :**

$\forall\, x \neq 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$-$		$+$

$\forall\, x \in]-\infty;0[\cup]0;1[,\ h'(x) < 0$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$.

$\forall\, x \in]1;+\infty[,\ h'(x) > 0$, alors h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

4. **tableau de variation de h sur D_h :** $h(1) = 0$.

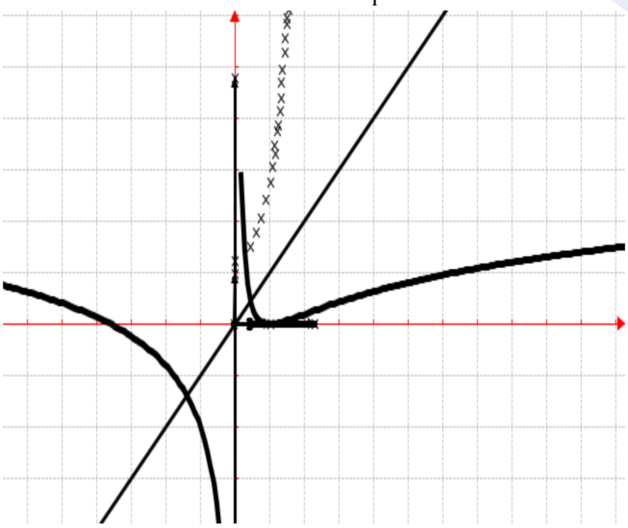
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$-$		$+$
	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow\ +\infty$

5. **Etudions les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

$\lim\limits_{x\mapsto \mp\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\mapsto \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto \pm\infty}\left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln|x|}{x}\right] = 0$

Donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.

6. $\mathcal{C}_h$ en trait continue et $\mathcal{C}_{h_I^{-1}}$ en trait discontinue



7. **Soit $I = [1;+\infty[$ et h_I la restriction de h à I.**

a) **Montrer que h_I est une bijection de I vers IR.**

h_I est continue est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

Donc h_I réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$.

b) Voir figure précédente, $\mathcal{C}_{h_I^{-1}}$ en trait discontinue.

Problème 41 : **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \ln|x|$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**

Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{1}{x}$. En déduire le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

3. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**
4. **Montrer que h admet deux bijections à déterminer leurs intervalles. Expliciter les fonctions h^{-1} réciproques de h de D_h vers $h(D_h)$ à déterminer. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et celle des réciproques de la fonction h.**
5. **Soit α est un réel appartenant à $]0;1[$.**

a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 1$ et $\mathcal{C}_h$.**

b) **Calculer $\lim\limits_{\alpha\mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) =$.**

6. **On considère une suite définie par :**

$u_n = \ln(n)$ avec l'entier naturel $n > 0$.

a) **Calculer u_1 et u_2.**

b) **Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.**

c) **Exprimer $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.**

7. **On pose, pour tout $n > 0$, $v_n = e^{-S_{1,n}}$.**

a) **Exprimer v_n en fonction de n.**

b) **Préciser le sens de variation de la suite $(v_n)_{n>0}$.**

Correction : **$h(x) = \ln|x|$**

1. **$D_h = \{x / x \in IR, x \neq 0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.**
2. **$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \ln(-x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln(x) = -\infty$;**

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \ln(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \ln(x) = +\infty$.

$\forall\, x \in]-\infty;0[,\ h'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ et

$\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{1}{x}$. donc $\forall\, x \neq 0,\ h'(x) = \frac{1}{x}$

alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

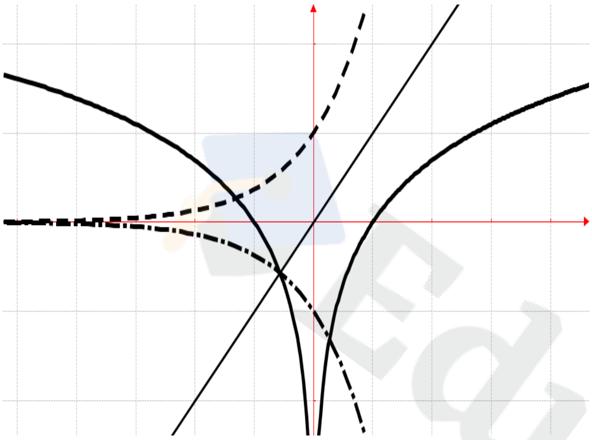
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3. **Etudions les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

- Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

- $\lim\limits_{x \mapsto \mp\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \mp\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$, $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) à l'infinie.

4. h est continue est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ d'une part et d'autre part elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc h réalise deux bijections, une de $]-\infty;0[$ vers IR et une autre de $]0;+\infty[$ vers IR. Alors $y = \ln|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y \\ x = -e^y \end{cases}$ donc
$\begin{cases} h^{-1}(x) = e^x \; si \; x \in \text{IR} \\ h^{-1}(x) = -e^x \; si \; x \in \text{IR} \end{cases}$
$\mathcal{C}_h$ en trait continue et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait discontinue



5. $\alpha \in]0;1[$.
a) $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_\alpha^1 \ln(x)\,dx = [-x\ln(x) + x]_\alpha^1 = 1 + \alpha\ln(\alpha) - \alpha$.
b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = 1$.
6. $u_n = \ln(n)$ avec l'entier naturel $n > 0$.
a) $u_1 = \ln(1) = 0$ et $u_2 = \ln(2) = 0{,}69$.
b) **la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.**
$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ or $1 + \frac{1}{n} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.
c) $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln(1) + \cdots + \ln(n) = \ln[1 \times 2 \times \ldots \times n] = \ln(n!)$.
7. $n > 0, v_n = e^{-S_{1,n}} = e^{-\ln(n!)}$.
a) $v_n = e^{-S_{1,n}} = e^{-\ln(n!)} = e^{\ln\left(\frac{1}{n!}\right)} = \frac{1}{n!}$.
b) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n! - (n+1)\times n!}{n!\times(n+1)!} = \frac{n!\times(1-n-1)}{n!\times(n+1)!} = \frac{-n}{(n+1)!} < 0$ car $n > 0 \Leftrightarrow (n+1)! > 0$
donc la suite $(v_n)_{n>0}$ est décroissante.

Problème 42 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 + \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$

1. **Donner l'expression de la fonction f sans valeur absolue sur D_f.**
2. **Montrer que : $\forall\, x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x^2-1}$ et $\forall\, x \in]-1;-1[$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{3}-x)(x+\sqrt{3})}{1-x^2}$. En déduire le sens de variation de f**
3. **Dresser le tableau de signe de f'.**
4. **Etudier la limite de h sur D_f.**
5. **Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infinie. Etudier la position relative de (d) par rapport à $\mathcal{C}_f$.**
6. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).**
7. **Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie Ω ; trouver les coordonnées de Ω.**

Correction : $f(x) = x + 2 + \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$

1. **expression de f sans valeur absolue sur D_f :**
$D_f = \text{IR} - \{-1;1\}$
$\forall\, x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) = x + 2 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
$\forall\, x \in]-1;-1[$, $f(x) = x + 2 + \ln\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)$
2. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{-2}{(x-1)^2}$ et $\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)' = \frac{2}{(-x+1)^2}$.
$\forall\, x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2-1-2}{x^2-1} = \frac{x^2-3}{x^2-1} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x^2-1}$, alors f est strictement croissante sur $]-\infty;-\sqrt{3}]$ et sur $[\sqrt{3};+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[-\sqrt{3};-1[$ et sur $]1;\sqrt{3}]$. et $\forall\, x \in]-1;-1[$, $f'(x) = 1 + \frac{2}{(-x+1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-x^2+2}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = \frac{(\sqrt{3}-x)(x+\sqrt{3})}{1-x^2}$, donc f est strictement croissante sur $]-1;1[$.
3. **Le tableau de signe de f' :**

x	$-\infty$ $-\sqrt{3}$ -1 1 $\sqrt{3}$ $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 - ‖ + ‖ - 0 +

4. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[x + 2 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = -\infty$;
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x + 2 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = +\infty$
$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) = +\infty$ car en posant $t = x + 1$ donc $x = t - 1$, $\lim\limits_{|x| \mapsto -1} (x+1) = |0|$,

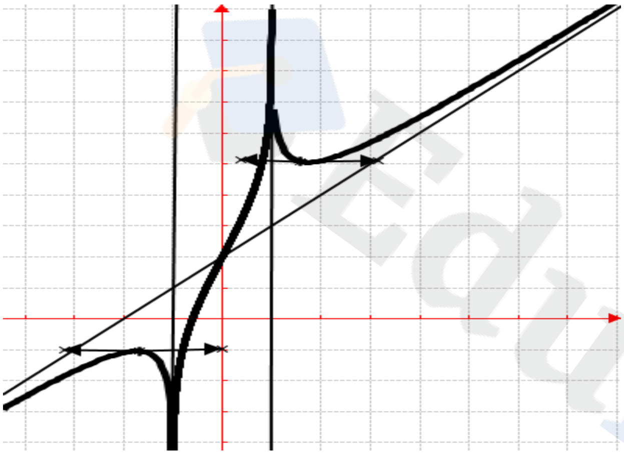
5. $f(x) - x - 2 = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - x - 2] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infinie.

$\forall\, x \in]-\infty; -1[$, $f(x) - x - 2 = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (d).

$\forall\, x \in]1; +\infty[$, $f(x) - x - 2 = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d).

6. **$\mathcal{C}_f$ et (d) :**



7. **Montrons que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie Ω ; trouver les coordonnées de Ω :**

$f(0) = 2$, on vérifie que $f(-h) + f(h) = 4$:

$f(-h) = -h + 2 + \ln\left(\frac{h+1}{-h+1}\right) + h + 2 + \ln\left(\frac{h+1}{-h+1}\right) = 4 + \ln\left(\frac{h+1}{-h+1} \times \frac{h+1}{-h+1}\right) = 4$, d'où $\Omega(0; 2)$ est un centre de symétrie.

Problème 43 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \ln|x+1|$

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**

Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{1}{x+1}$. En déduire le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

3. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**
4. **Montrer que h admet deux bijections à déterminer leurs intervalles. Expliciter les fonctions h^{-1} réciproques de h. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et celle des réciproques de la fonction h.**
5. **Soit α est un réel appartenant à $]-1; 0[$.**

a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_h$. (on rappelle $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).**

b) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers -1.**

6. **On considère une suite numérique définie par : $u_n = e^{h(n)}$ avec l'entier naturel $n \geq 0$.**

a) **Calculer u_1 et u_2.**

b) **Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.**

c) **Exprimer $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n. En déduire $S_{0,n}$.**

d) **Montrer que $\lim\limits_{n \mapsto 0} S_{0,n} = 1$.**

Correction : $h(x) = \ln|x+1|$

1. $D_h = \{x / x \in \text{IR}, x \neq -1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} \ln(-x-1) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \ln(x+1) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \ln(-x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

$\forall\, x \in]-\infty; -1[$, $h'(x) = \frac{-1}{-x-1} = \frac{1}{x+1}$ et

$\forall\, x \in]-1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1}{x+1}$. donc $\forall\, x \neq -1$, $h'(x) = \frac{1}{x+1}$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et h est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

3. **branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

Asymptote verticale d'équation : $x = -1$.

Branche parabolique de direction (Ox) car

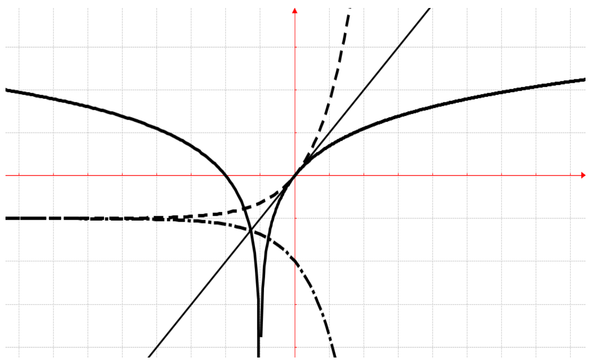
$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{\ln|x+1|}{x} = \lim\limits_{t \mapsto \pm\infty}\left[\frac{\ln|t|}{t} \times \frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right] = 0$, en posons $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$.

4. h est continue est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ **d'une part et d'autre part elle est** strictement croissante sur $]-1; +\infty[$. Donc h réalise deux bijections, une de $]-\infty; -1[$ vers IR et une autre de $]-1; +\infty[$ vers IR. Alors $y = \ln|x+1| \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = e^y - 1 \\ x = -e^y - 1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} h^{-1}(x) = e^x - 1 \;\; si\; x \in \text{IR} \\ h^{-1}(x) = -e^x - 1 \;\; si\; x \in \text{IR} \end{cases}$

$\mathcal{C}_h$ en trait plein et les $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait pointé



5. $\alpha \in]-1;0[$.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)\,dx = [x - x+1\ln x+1\alpha 1 = -\alpha + \alpha+1 \ln \alpha+1$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto -1} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{t \mapsto 0}[-t+1+t\ln(t)] = 1$, en posant $t = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = t - 1$ alors $\lim\limits_{\alpha \mapsto -1}(\alpha+1) = 0$.

6. $u_n = e^{h(n)} = e^{\ln(n+1)} = n+1$, avec l'entier naturel $n > 0$.

a) $u_1 = 1 + 1 = 2$ et $u_2 = 2 + 1 = 3$.

b) **la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.**

$u_{n+1} - u_n = n + 1 - n = 1 > 0$ alors

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

c) $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (1+1) + (2+1) + (3+1) + \cdots + (n+1) = (1+2+\cdots+n) + (1+1+\cdots+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$. On peut aussi remarquer que $(u_n)_{n>0}$ est une suite arithmétique de raison 1 et du 1^er terme 2.

$S_{0,n} = S_0 + S_{1,n} = u_0 + (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ or $u_0 = 1$, donc $S_{0,n} = 1 + \frac{n(n+3)}{2} = \frac{(2+n)(n+3)}{2}$. On peut aussi remarquer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison 1 et du 1^er terme 1.

d) $\lim\limits_{n \mapsto 0} S_{0,n} = 1 = \lim\limits_{n \mapsto 0}\left[\frac{2+n(n+3)}{2}\right] = \frac{2}{2} = 1$.

<u>Problème 44 :</u> Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x\ln|x|}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier l'imparité de f.

c) Etudier le signe de la fonction de h définie par $h(x) = x\ln|x|$. En déduire les limites de fonction de f sur D_f.

2.

a) Etudier le sens de variation de f sur D_f.

b) Dresser le tableau de signe de f' sur D_f.

c) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Soit λ est un réel strictement supérieur à e^2.

a) Montrer que $\forall\, x > 1$, $F(x) = \ln(\ln x)$.

b) En déduire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, la droite (d) et les droites d'équations $x = e^2$, $x = \lambda$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

<u>**Correction :**</u> D'unité graphique 2 cm. $f(x) = \frac{1}{x\ln|x|}$.

1.

a) $D_f = \mathrm{IR} - \{-1;0;1\}$

Expressions de g sans valeur absolue :

$\forall\, x \in]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;0[$, $f(x) = \frac{1}{x\ln(-x)}$

$\forall\, x \in]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

b) $f(-x) = \frac{1}{-x\ln|-x|} = -\frac{1}{x\ln|x|} = f(x)$, donc f est une fonction impaire.

c) **signe de $h(x) = x\ln|x|$.**

x	$-\infty$ -1	0	1 $+\infty$
$x\ln\|x\|$	$-$ 0 $+$		$-$ 0 $+$

Limites de fonction de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{1}{x\ln(-x)}\right] = \frac{1}{-\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{x\ln(x)}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-}\left[\frac{1}{x\ln(-x)}\right] = \frac{1}{-0^+} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}\left[\frac{1}{x\ln(-x)}\right] = \frac{1}{-0^-} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-}\left[\frac{1}{x\ln(x)}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}\left[\frac{1}{x\ln(x)}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-}\left[\frac{1}{x\ln(-x)}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\frac{1}{x\ln(x)}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$;

2.

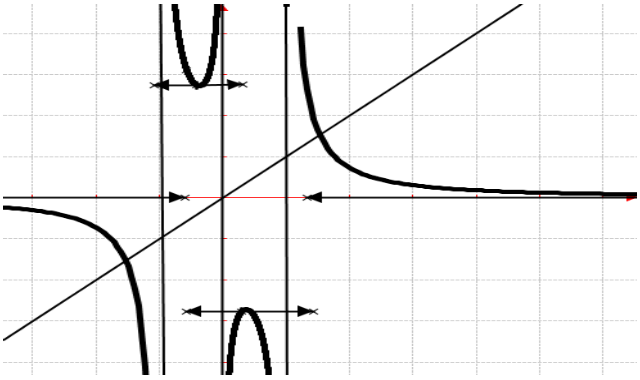
a) **sens de variation de f.**

$\forall\, x \in]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;0[$, $f'(x) = \frac{-\ln(-x)-1}{[x\ln(-x)]^2}$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;-e^{-1}[$ et f est strictement croissante sur $]-e^{-1};0[$. $\forall\, x \in]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-\ln(x)-1}{[x\ln(x)]^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0;e^{-1}[$ et f est strictement décroissante sur $]e^{-1};1[$ et sur $]1;+\infty[$.

b) **Le tableau de signe de f' :**

x	$-\infty$	-1	$-e^{-1}$	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-\ 0\ +$	||	$+\ 0\ -$	||	$-$

c) $\mathcal{C}_g$.



3. $\lambda > e^2$.

a) $\forall\, x > 1$, $\mathrm{F}'(x) = [\ln(\ln x)]' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$.

b) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{e^2}^{\lambda} f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_{e^2}^{\lambda} = \left[\frac{1}{x\ln(x)}\right]_{e^2}^{\lambda} =$

$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{1}{\lambda\ln(\lambda)} - \frac{1}{2e^2}$..

c) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{\lambda\ln(\lambda)} - \frac{1}{2e^2}\right] = -\frac{1}{2e^2}$.

<u>Problème 45 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{4}{3}x + 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que la fonction $f(x) - 2$ est une fonction impaire.

c) Etudier les limites de f.

d) Calculer $f'(x)$. Etudier son signe. En déduire le sens de variation de f.

2.

a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = \frac{4}{3}x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

b) Démontrer que le point $\mathrm{A}(0;2)$ de $\mathcal{C}_f$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

c) Déterminer la tangente T au point A.

d) Construire $\mathcal{C}_f$ et (d).

3. Soit λ est un réel tel que $\lambda > 3$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la droite (d), les droites d'équations $x = 3$, $x = \lambda$ et $\mathcal{C}_f$. (on rappelle $\frac{4x}{(x+2)^2} = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$).

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) =$.

4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3; +\infty[$.

On notera g^{-1} l'application réciproque de f.

a) Démontrer que g est une bijection de l'intervalle $[3; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g^{-1} au point $x = 3$.

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{4}{3}x + 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

1.

a) $\mathrm{D}_f = \mathrm{IR} - \{-2; 2\}$

b) $f(-x) - 2 = -\frac{4}{3}x + \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = -\frac{4}{3}x + \ln\left|\frac{1}{\frac{x-2}{x+2}}\right| = -\frac{4}{3}x - \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \left(\frac{4}{3}x + 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right) + 2 = 2 - f(x)$, donc $f(x) - 2$ est une fonction impaire.

a) **Etudier les limites de f**

b)

$\lim\limits_{x \mapsto \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto \mp\infty}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right] = \ln 1 = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{4}{3}x\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{4}{3}x\right] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^-} \ln\left(\frac{4}{0^+}\right) = -4\ln 0^+ = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^+} \ln\left(\frac{4}{0^+}\right) = -4\ln 0^+ = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto 2^-} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$.

c) $\forall\, x \in \mathrm{IR} - \{-2; 2\}$, $f'(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{4x^2-16+12}{3(x^2-4)} = \frac{4(x^2-1)}{3(x^2-4)}$. **Etudier son signe :**

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$-\ 0\ +$	$0\ -$	||	$+$

En déduire le sens de variation de f

$\forall\, x \in]-\infty; -2[\cup [-1; 1] \cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$, sur $[-1; 1]$ et sur $]1; +\infty[$.

$\forall\, x \in]-2; -1[\cup]1; 2[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement croissante sur $]-2; -1[$ et sur $]1; 2[$.

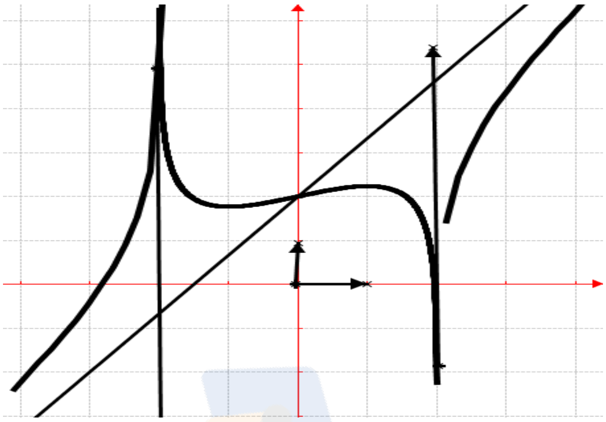
2.

a) $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right] = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = \frac{4}{3}x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infinie.

b) A partir $\begin{cases} f(2a-x) + f(x) = 2b \\ f(-x) - 2 = 2 - f(x) \end{cases}$, on retrouve $f(-x) + f(x) = 4 = 2b$, donc le point A(0; 2) de $\mathcal{C}_f$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

c) T : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{4}{3}x + 2$.

d) **Construire $\mathcal{C}_f$ et (d) :**



4. **λ est un réel tel que $\lambda > 3$**

$f(x) - y = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) < 0$.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_3^\lambda \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) dx = -\left[x \times \frac{x-2}{x+2}\right]_3^\lambda + \int_3^\lambda \frac{4x}{(x+2)^2} dx = \left[\frac{-x^2+2x}{x+2}\right]_3^\lambda + \int_3^\lambda \left[1 - \frac{4}{(x+2)^2}\right] dx = \left[\frac{-x^2+2x}{x+2} + x + \frac{4}{x+2}\right]_3^\lambda = \left[\frac{4(x+1)}{x+2}\right]_3^\lambda = \frac{4(\lambda+1)}{\lambda+2} - \frac{16}{5}$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \left[\frac{4(\lambda+1)}{\lambda+2} - \frac{16}{5}\right] = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$.

5. **g la restriction de f à l'intervalle $[3; +\infty[$. On notera g^{-1} l'application réciproque de f**

a) g est continue et strictement croissante sur $[3; +\infty[$. Donc g est une bijection de l'intervalle $[3; +\infty[$ sur un intervalle $J = [4; +\infty[$.

b) **équation de la tangente à la courbe représentative de g^{-1} au point $x = 3$: $g^{-1}(3) = 4$**

$(g^{-1})'(3) = \frac{1}{f'[g^{-1}(3)]} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{3}{5}$;

$y = (g^{-1})'(3)(x-3) + g^{-1}(3) = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$.

<u>Problème 46 :</u>

1. **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln|x-1|$.**

a) **Calculer $f'(x)$. Etudier son signe. En déduire le sens de variation de f.**

b) **Dresser le tableau de variation de f. Construire $\mathcal{C}_f$.**

c) **Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, calculer $I = \int_0^\alpha f(x)\, dx$. (on rappelle $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$).**

2. **Discuter graphiquement en fonction du paramètre réel m, le nombre et le signe des solutions en x réel de l'équation : $\ln|x-1| = m$.**

3. **Démontrer que la restriction f de h à l'intervalle $]-\infty; 1[$ admet une application réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.**

a) **Expliciter h^{-1}.**

b) **Expliciter $(h^{-1})'$.**

- **En utilisant l'expression de $h^{-1}(x)$ calculer au a).**
- **En utilisant le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque.**

c) **Montrer que $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$, d'équation à déterminer. Construire $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.**

4. **On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls et on considère l'application :**

F : $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto Z = F(z) = \ln|z-1|$ où $|z-1|$ désigne le module de $z-1$.

Quel est l'ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :

a) **$F(z) = 0$.**

b) **$F(z) = 1$.**

c) **$F(z) < 4$.**

d) **$F(z) \leq 9$.**

<u>Correction :</u>

1. $f(x) = \ln|x-1|$.

***f* sans le symbole de la valeur absolue**

$\forall\, x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = \ln(-x+1)$ et

$\forall\, x \in]1; +\infty[$, $f(x) = \ln(x-1)$

a) $\forall\, x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{-1}{-x+1} < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et

$\forall\, x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x-1} > 0$ alors f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

b) le tableau de variation de f. Construire $\mathcal{C}$.

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \ln(-x+1) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 1^+} \ln(x-1) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \ln(-x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

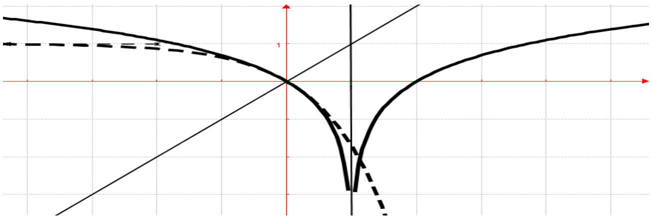
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗ $+\infty$

branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

Asymptote verticale d'équation : $x = 1$.

Branche parabolique de direction (OX) car $\lim\limits_{x\mapsto\mp\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto\mp\infty}\left[\frac{\ln|x-1|}{-x}\right]=0$. Branche parabolique de direction (OX) à l'infini.

$\mathcal{C}_h$ en trait plein et les $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait pointé



c) $\alpha\in\mathbb{R}, 0<\alpha<1$, calculer $\mathrm{I}=-\int_0^\alpha f(x)\,dx=-\int_0^\alpha[\ln(-x+1)]\,dx=[x-(x+1)\ln(-x+1)]_0^\alpha=\alpha-(\alpha+1)\ln(-\alpha+1)$.

2. on peut remarquer que **si $m>0$** et $f(x)<m$, il n'y a aucune solution et si $f(x)\leq m$, il y a deux solutions, une négative et l'autre positive.

Si $m<0$, , il y a deux solutions, une négative et l'autre positive.

3. f est continue est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$.

Donc f réalise une bijection de $]-\infty;-1[$ vers IR.

a) Expliciter h^{-1}.

$\ln|x-1|=y\Leftrightarrow|x-1|=e^y\Leftrightarrow\begin{cases}x=-e^y+1\\x=e^y+1\end{cases}$

$\forall x\in]-\infty;+\infty[$, $h^{-1}(x)=1-e^x$.

b) Expliciter $(h^{-1})'$.

- **En utilisant l'expression de $h^{-1}(x)$ calculer au a).** $\forall x\in\mathrm{IR}$, $[h^{-1}(x)]'=-e^x$.
- **En utilisant le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque.**

$[h^{-1}(x)]'=\frac{1}{\frac{-1}{-(1-e^x)+1}}=-e^x$.

c) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}h^{-1}(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[1-e^x]=1$ alors $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $-\infty$, d'équation. Voir fiche pour $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

4. **$\mathbb{C}^*/\ F(z)=\ln|z-1|$.**

Ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :

a) $F(z)=\ln|z-1|=0\Leftrightarrow|z-1|=1$, c'est le cercle de centre I d'affixe1 et de rayon 1.

b) $F(z)=\ln|z-1|=1\Leftrightarrow|z-1|=e$, c'est le cercle de centre I d'affixe1 et de rayon $e=2{,}71$.

c) $F(z)=\ln|z-1|<4\Leftrightarrow|z-1|<2\ln 2$, c'est le disque ouvert de centre I d'affixe1 et de rayon $2\ln 2=1{,}38$.

d) $F(z)=\ln|z-1|\leq 9\Leftrightarrow|z-1|\leq 2\ln 3$, c'est le disque fermé de centre I d'affixe1 et de rayon $2\ln 3=2{,}19$.

<u>Problème 47 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x)=x-\ln|x|$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier les limites de h sur D_h.**

Etudier le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

3. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**
4. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**
5. **Soit α est un réel appartenant à $]0;1]$.**

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x=\alpha$, $x=1$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

6. **On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls et on considère l'application :**

$F:\ \mathbb{C}^*\longrightarrow\mathbb{C}$

$z\longmapsto Z=F(z)=z-\ln|z|$ où $|z|$ désigne le module de z.

Quel est l'ensemble des nombres complexes vérifiant chacune des équations suivantes :

a) $F(z)=0$

b) $F(z)=z$

c) $F(z)=\bar{z}$.

<u>Correction :</u> $h(x)=x-\ln|x|$

1. $\mathrm{D}_h=\{x/x\in\mathrm{IR}, x\neq 0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
2. $\lim\limits_{x\mapsto 0^\mp}[x-\ln|x|]=\lim\limits_{x\mapsto 0^\mp}[0-\ln|0|]=+\infty$;

$\forall\, x\in]-\infty;0[$, $h(x)=x\left[1+\frac{\ln(-x)}{-x}\right]$ et

$\forall\, x\in]0;+\infty[$, $h(x)=x\left[1+\frac{\ln(x)}{x}\right]$.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}x\left[1+\frac{\ln(-x)}{-x}\right]=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\left[1-\frac{\ln(x)}{x}\right]=+\infty$.

$\forall\, x\neq 0$, $h'(x)=\frac{x-1}{x}$,

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	||	$-$	$+$

$\forall\, x\in]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$, $h'(x)>0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $[1;+\infty[$.

$\forall\, x\in]0;1[$, $h'(x)<0$, alors h est strictement décroissante sur $]0;1[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	||	$-$	$+$
$h(x)$	$-\infty\nearrow+\infty$	||	$-\infty\searrow 1$	$\nearrow+\infty$

3. **Etudions les branches infinies de $\mathcal{C}_h$.**

Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.
Branche parabolique de coefficient directeur 1 car

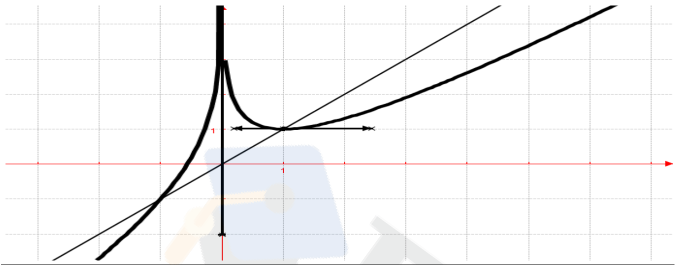
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[1 + \frac{\ln(-x)}{-x}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} [h(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-\ln(-x)] = -\infty$. Branche parabolique de coefficient directeur 1 car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[1 - \frac{\ln(x)}{x}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [h(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[-\ln(x)] = -\infty$

4. **$\mathcal{C}_h$ en trait plein.**



5. $\alpha \in]0; 1]$.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_\alpha^1 [x - \ln(x)]dx = \Big[x - x\ln(x) +$
$12x2\alpha1 = 32 - \alpha + \alpha\ln\alpha + 12\alpha2$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{3}{2}$.

9. $\mathbb{C}^* / \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z} - \ln|\boldsymbol{z}|$.

a) $F(z) = 0 \Leftrightarrow z = \ln|z|$, c'est la droite réelle d'équation $z = \ln|z|$.

b) $F(z) = z \Leftrightarrow \ln|z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$, c'est le cercle de centre O et rayon 1.

c) $F(z) = \bar{z} \Leftrightarrow \ln|z| = z - \bar{z} = 2iIm(z)$, posons $z = x + iy$ alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = \cos(2y) \\ \sin(2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = \cos(2y) \\ y = 0 \; ou \; y = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, c'est la réunion du cercle de centre O de rayon $\sqrt{\cos(2y)}$ avec $y \geq \frac{\pi}{4}$ et les équations polaires $y = 0 \; ou \; y = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

<u>Problème 48 :</u>

A. **Soit la fonction définie par :**
$\boldsymbol{f(x) = 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}}$.

1.

a) **Déterminer le domaine de définition D_f de f.**

b) **Calculer les limites de f aux bornes de D_f.**

c) **Etudier les variations et dresser le tableau de variation de f.**

2.

a) **Montrer que la courbe (T_1) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectives a et b avec $-2 < a < -1$ et $-1 < b < 0$.**

b) **Tracer (T_1).**

3.

a) **Etudier le signe de $f(x)$.**

b) **Montrer que a et b sont solutions de l'équation $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = \frac{1}{2(x+1)}$.**

B. **Soit $g(x) = x^2 \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$.**

1.

a) **Déterminer le domaine de définition D_g.**

b) **Montrer que l'on peut prolonger g par continuité à droite en 0 en attribuant à $g(0)$ la valeur 0.**

c) **Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = -\infty$.**

d) **Etudier les branches infinies de g (on montrera que (D) : $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de g. On admet que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[g(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[g(x) + x] = \frac{1}{2}$.**

2.

a) **Montrer que pour tout x de D_g, $g'(x) = xf(x)$.**

b) **En déduire le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g.**

c) **Montrer que $g(a) = \frac{a^2}{2(a+1)}$ et $g(b) = \frac{b^2}{2(b+1)}$.**

d) **Justifier que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.**

e) **Tracer (T_2) la courbe g.**

<u>NB</u> : on représentera (T_1) et (T_2) dans le même repère d'unité 1 cm.

<u>Correction :</u>

A. $\boldsymbol{f(x) = 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}}$.

1.

a) $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

b) $f(x) = 2\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 2\ln(1) - \frac{1}{+\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 2\ln|-1| - \frac{1}{-\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = -\infty$ car en posant

$t = x + 1$ donc $x = t - 1$, $\lim\limits_{|x| \mapsto -1} (x+1) = |0|$,

$\lim\limits_{t \mapsto 0^-} \left[\frac{-1}{t}(-t\ln(-t) + 1) - \ln|t-1|\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{t \mapsto 0^+} \left[\frac{1}{t}(t\ln(t) - 1) - \ln|t-1|\right] = -\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$.

c) $\forall\, x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2}{|x||x+1|} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{(x+2)}{x(x+1)^2}$,

car $\forall\, x \in]-\infty;-1[\, \cup\,]0;+\infty[$, $f(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et $f'(x) = -\frac{(x+2)}{x(x+1)^2}$.

$\forall\, x \in]-1;0[$, $f(x) = 2\ln\left(-\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et $f'(x) = -\frac{(x+2)}{x(x+1)^2}$. $f(2) = 1 - 2\ln 2 = -0{,}34$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	↘	-0,34	↗ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	0

2.

a) f est continue et strictement croissante sur $[-2;-1[$ et puis $f(a) \in [-0{,}34;+\infty[$, f est continue et strictement croissante sur $[-1;0[$ et puis $f(a) \in]-\infty;+\infty[$, donc la courbe (T_1) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectives a et b avec $-2 < a < -1$ et $-1 < b < 0$.

b) **(T_1) voir figure au trait plein ci-dessous.**

3.

a) **Etudions le signe de $f(x)$:** D'après le graphique : $\forall\, x \in]-\infty;a[\, \cup\,]-1;b[$, $f(x) < 0$ et $\forall\, x \in]a;-1[\, \cup\,]b;0[\, \cup\,]0;+\infty[$, $f(x) > 0$

b) on sait que $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$. En remplaçant dans la fonction $f(x)$ les valeurs de a ou b ou en laissant celle de x, on obtient $f(x) = 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x+1} = 2\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 0$, donc pour tout a et b avec $-2 < a < -1$ et $-1 < b < 0$ sont solutions de l'équation $\ln\left|\frac{+1}{x}\right| = \frac{1}{2(+1)}$.

C. $\boldsymbol{g(x) = x^2 \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$.

1.

a) $D_g =]-\infty;-1[\, \cup\,]-1;0[\, \cup\,]0;+\infty[$

b) $g(x) = x^2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = x^2\ln|x+1| - x^2\ln|x|$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[x^2\ln|x+1| - x^2\ln|x|] = 0$, c'est une limite finie qui indique le prolongement de f par continuité à droite en 0.

c) $g(t) = \frac{1}{t^2}\ln|1+t|$ avec $t = \frac{1}{x}$ et $g(u) = \frac{1}{(u-1)^2}\ln|u|$ avec $u = t+1$, on déduit $\lim\limits_{x \mapsto \infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{t \mapsto 0}(t+1) = 1$, donc

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{u \mapsto 1}\left(\frac{\ln(-u)}{-(-u+1)} \times \frac{1}{(u-1)}\right) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{u \mapsto 1}\left(\frac{\ln(u)}{(u-1)} \times \frac{1}{(u-1)}\right) = +\infty$.

d) $[g(x) - y] = x^2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - x + \frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[g(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[g(x) - x + \frac{1}{2}\right] = 0$ alors (T_2) admet une asymptote oblique à l'infinie.

2.

a) $\forall\, x \in D_g$, $g'(x) = 2x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{x}{x+1} = xf(x)$.

b) $g'(x) = xf(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty;a[$, sur $]-1;b[$ et sur $]0;+\infty[$.

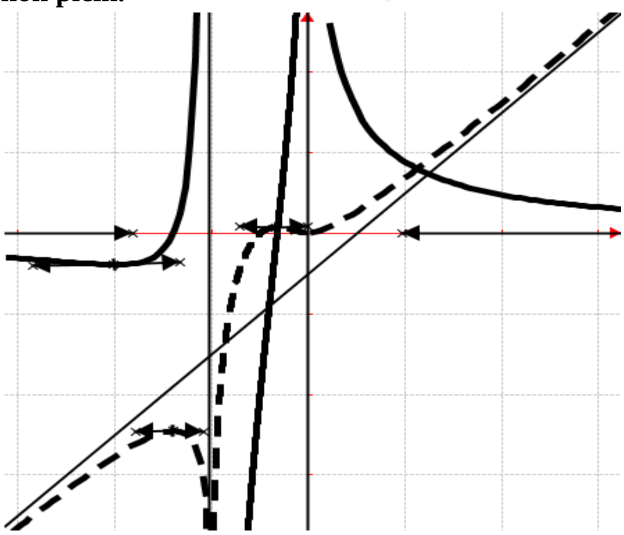
$\forall\, x \in]a;-1[\, \cup\,]b;0[$, donc $g'(x) = xf(x) < 0$ alors g est strictement décroissante sur $]a;-1[$et sur $]b;0[$.

x	$-\infty$		a		-1		b		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	$\|\|$	$+$		$-$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗		↘	0	↗	$+\infty$

c) $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| = \frac{1}{2(+1)}$ **:** $g(a) = a^2\ln\left|\frac{a+1}{a}\right| = \frac{a^2}{2(a+1)}$ et $g(b) = a^2\ln\left|\frac{b+1}{b}\right| = \frac{b^2}{2(b+1)}$.

d) $a \in]-2;-1[$, $g(a) = \frac{a^2}{2(a+1)} < 0$ et $\forall\, b \in]-1;0[$, $g(a) = \frac{b^2}{2(b+1)} > 0$.

e) **Traçons (T_2) la courbe g : voir fiche au trait non plein.**



Problème 49 :

1. **Soit f la fonction définie par :**

$f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}$.

a) **Déterminer le domaine de définition D_f de f.**

b) **Calculer les limites de f aux bornes de D_f.**

c) **Dresser le tableau de variation de f.**

d) **Calculer $f(0)$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.**

2. **Soit $g(x)=x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$.**

a) **Déterminer le domaine de définition D_g de g.**

b) **Vérifier que $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$.**

c) **Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{(x-1)}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right]=1$.**

d) **En déduire que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=1$ et interpréter graphiquement ce résultat.**

e) **Dresser le tableau de variation de g.**

f) **Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à $[0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$. Donner un encadrement d'ordre 1 de α.**

g) **Tracer $\mathcal{C}_g$.**

3. **Soit f la fonction définie par :**

$h(x)=(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.

a) **Montrer que h est dérivable sur $[0;1[$ et que pour tout $x\in[0;1[$, $h'(x)=g(x)$.**

b) **Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisse, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\alpha$.**

Correction :

1. $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}$

a) $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

b) $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{x}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=\ln 1-\frac{2}{+\infty}=0$; $\lim\limits_{x\mapsto-1^-}f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=\ln|1|-\frac{2}{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\mapsto-1^+}f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto1^-}f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto1^+}f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$.

c) $\forall x\in D_f$, $f'(x)=\frac{-2}{x^2-1}+\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}>0$, f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$, sur $]-1;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$0\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow\ 0$

c) **$f(0)=0$, signe de $f(x)$:**

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup[0;1[$, $f(x)>0$

$\forall x\in]-1;0]\cup]1;+\infty[$, $f(x)<0$.

2. **$g(x)=x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-1$**

a) $D_g=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

b) $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}$.

c) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{(x-1)}{2}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\frac{2}{x-1}}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$

Posons $t=\frac{2}{x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\mapsto+\infty\\ t\mapsto0\end{cases}$,

$\lim\limits_{t\mapsto0}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\lim\limits_{t\mapsto0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ (vraie).

d) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x.\frac{1}{\frac{2}{x-1}}\times\frac{2}{x-1}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)-1\right]$

Posons $t=\frac{2}{x-1}\Leftrightarrow x=\frac{2}{t}+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\mapsto+\infty\\ t\mapsto0\end{cases}$

$\lim\limits_{t\mapsto0}\left[(2+t)\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right]=2-1=1$, d'où

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=1$ donc **$\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale en** $+\infty$.

e) **tableau de variation de g :**

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[x.\frac{1}{\frac{2}{x-1}}\times\frac{2}{x-1}\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)-1\right]$

Posons $t=\frac{2}{x-1}\Leftrightarrow x=\frac{2}{t}+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\mapsto+\infty\\ t\mapsto0\end{cases}$

$\lim\limits_{t\mapsto0}\left[(2+t)\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right]=2-1=1$, d'où

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}g(x)=1$; $\lim\limits_{x\mapsto-1^-}f(x)=-\ln0^+=+\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto-1^+}f(x)=-\ln0^+=+\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto1^-}f(x)=\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)=-\ln0^+=+\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto1^+}f(x)=\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)=-\ln0^+=+\infty$.

$\forall x\in D_g$, $g'(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$,

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup[0;1[$, $f(x)>0$

$\forall x\in]-1;0]\cup]1;+\infty[$, $f(x)<0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$-$		$+$	‖	$+$
$g(x)$	$1\nearrow+\infty$	‖	$+\infty\searrow$	-1	$\nearrow+\infty$	‖	$+\infty\searrow1$

f) g est continue et strictement croissante sur $[0;1[$. Elle réalise une bijection de $[0;1[$ sur

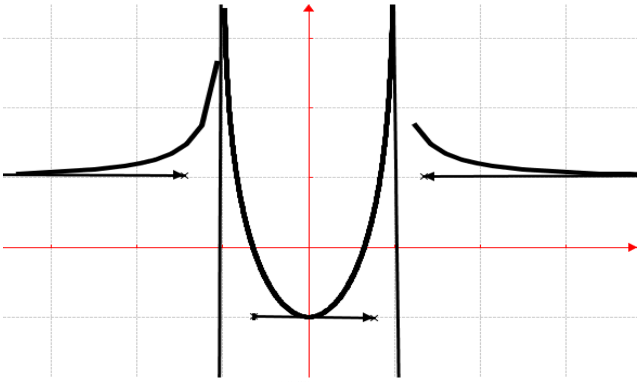
$[-1;+\infty[$. Et $g(0)\times g(1)<0$ donc il existe un réel α unique appartenant à $[0;1[$ tel que $g(\alpha)=0$.

encadrement d'ordre 1 de α

$g(0{,}6)=-0{,}1682$ et $g(0{,}7)=0{,}2142$

$g(0{,}6)\times g(0{,}7)<0$, d'où $\mathbf{0{,}6<\alpha<}0{,}7$.

g) Tracer $\mathcal{C}_g$:



4. $h(x)=(x^2-1)\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.

a) $\left(\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)'=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}$

$\forall\, x\in[0;1[$, $h'(x)=2x\ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}-\frac{x^2-1}{x^2-1}=$

$x\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-1=g(x)$

b) l'aire du domaine

$\Psi(\alpha)=-\int_0^{\alpha}g(x)dx=-[\,h(x)]_0^{\alpha}=-\Big[\,(x^2-$

$1\ln x+11-x0\alpha=1-\alpha2\ln\alpha+11-\alpha.$

Problème 50 :

1. On considère f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$.

a) Etudier la fonction f.

b) Construire $\mathcal{C}_f$.

2. g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=|f(x)|$. Déduire de la question précédente la construction de $\mathcal{C}_g$. Utiliser la courbe $\mathcal{C}_g$ pour établir le tableau de variation de g.

3. On donne la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x)=\ln\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right|$.

a) Démontrer que h est une fonction impaire.

b) Etudier la fonction h.

c) Construire $\mathcal{C}_h$.

4. On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel non nul n par : $u_n=\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$.

a) Calculer $u_1; u_2$.

b) Calculer la limite de u_n.

c) (S_n) est la suite définie par : pour tout entier naturel non nul. $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. Calculer S_n en fonction de n : en déduire la limite de S_n.

5. A tout nombre complexe z différent de $-\frac{1}{2}$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$Z=\frac{2z-1}{2z+1}$. on pose : $z=x+iy$; $Z=X+iY$.

a) Exprimer X et Y en fonction de x et de y.

b) Déterminer l'ensemble E des nombres complexes z tels que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble F des nombres complexes z tels que Z soit imaginaire pure.

Correction :

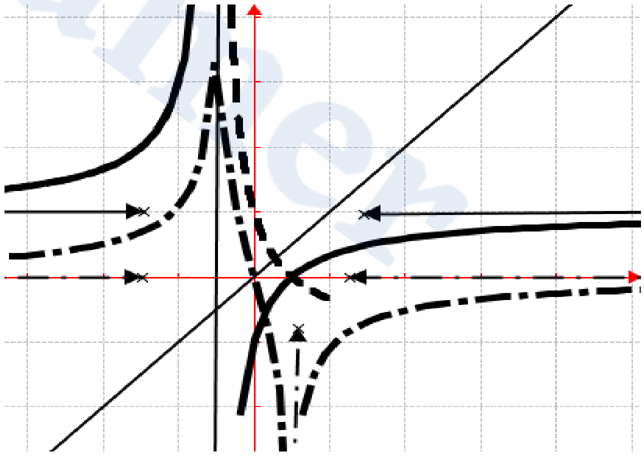
1. $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$

a) Etudier la fonction f.

$\forall\, x\in\mathrm{IR}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}>0$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}[f(x)]=1$; $\lim\limits_{x\mapsto-\frac{1}{2}^-}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\frac{1}{2}^+}f(x)=-\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1\ \nearrow\ +\infty$	‖	$-\infty\ \nearrow\ 1$

b) $\mathcal{C}_f$ en trait plein, $\mathcal{C}_h$ en trait point et tiré.



2. $g(x)=|f(x)|$.

$\forall\, x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $g(x)=\frac{1-2x}{2x+1}$

$\forall\, x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $g(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$-$	|	$+$
$g(\ )$	$1\ \nearrow\ +\infty$	‖	$+\infty\ \searrow$	0	$\nearrow\ 1$

3. $h(x)=\ln\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right|$

a) $h(-x)=\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|$ et $-h(x)=-\ln\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right|=\ln\left|\frac{1}{\frac{1-2x}{1+2x}}\right|=\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|=h(-x)$, donc h est une fonction impaire.

b) Etudier la fonction h.

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[,\ h(x)=\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$

$\forall\, x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[,\ h(x)=\ln\left(\frac{-1+2x}{1+2x}\right)$

$\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}[h(x)]=\ln 1=0$; $\lim\limits_{x\mapsto-\frac{1}{2}^-}h(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto-\frac{1}{2}^+}h(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{2}^-}h(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto\frac{1}{2}^+}h(x)=-\infty$.

$\forall\, x\in \mathrm{IR}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\},\ h'(x)=\frac{4}{4x^2-1}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	⊠	$-$	⊠	$+$
$h(x)$	$0\ \nearrow\ +\infty$	⊠	$+\infty\ \searrow\ -\infty$	⊠	$-\infty\ \nearrow\ 0$

c) $\mathcal{C}_h$ voir figure.

4. $(\boldsymbol{u_n})$ / $\boldsymbol{u_n}=\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$.

a) $u_1=\ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right)=-\ln 3$; $u_2=\ln\frac{3}{5}$.

b) $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}[u_n]=\ln 1=0$.

c) (S_n) / $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{7}+\cdots+\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)=\ln\left[\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\ldots\times\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\right]=\ln\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}[S_n]=-\infty$.

5. $z\neq-\frac{1}{2}$, / $\mathrm{Z}=\frac{2z-1}{2z+1}$. on pose : $z = x+iy$; $\mathrm{Z}=\mathrm{X}+i\mathrm{Y}$.

a) Exprimer X et Y en fonction de x et de y.

$\mathrm{Z}=\frac{2z-1}{2z+1}=\frac{2x-1+2iy}{2x+1+2iy}=\frac{4x^2+4y^2-1+4iy}{(2x+1)^2+4y^2}$, on en déduit que $\mathrm{X}=\frac{4x^2+4y^2-1}{(2x+1)^2+4y^2}$ et $\mathrm{Y}=\frac{4y}{(2x+1)^2+4y^2}$

b) **l'ensemble E des nombres complexes z tels que Z soit réel.** $\mathrm{Z}\in\mathrm{IR}\Leftrightarrow \mathrm{Im(Z)}=\frac{4y}{(2x+1)^2+4y^2}=0\Leftrightarrow y=0$, c'est une droite d'équation $y=0$.

c) **l'ensemble F des nombres complexes z tels que Z soit imaginaire pure.** . $z\neq-\frac{1}{2}$, $\mathrm{Z}\in i\mathrm{IR}\Leftrightarrow \mathrm{Re(Z)}=\frac{4x^2+4y^2-1}{(2x+1)^2+4y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{1}{4}$ donc F est un cercle de centre O et de rayon $\mathrm{R}=\frac{1}{2}$.

<u>Problème 51 :</u>

1. Etudier la fonction f définie par $f(x)=n(\ln x+1)$ avec $n\in\mathrm{IN}^*$.

2. On considère la fonction h définie par :

$\boldsymbol{h(x)}=\frac{(\ln x)^2+2\ln x+1}{|\ln x+1|-2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Donner les expressions de $h(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

c) Étudier le sens de variation de h.

d) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en e^{-1}. Interprétation graphique du résultat obtenu.

e) Étudier les limites de h sur D_h.

Donner le tableau de variation de h.

f) Trouver dans chaque cas, les réels non nuls a, b et c dans chacun des cas tels que : $\forall\, x\in\left]0;e^{-3}\right[\cup\left]e^{-3};e^{-1}\right]$, $h(x)=a\ln x+b+\frac{c}{-\ln x-3}$; $\forall\, x\in\left[e^{-1};e\right[\cup\left]e;+\infty\right[$, $h(x)=a\ln x+b+\frac{c}{\ln x-1}$.

Déterminer que la courbe de h admet une « asymptote parabolique » sur D_h.

Etudier sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_g$.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.

<u>Correction :</u>

1. $f(x)=n(\ln x+1)$ avec $n\in\mathrm{IN}^*$.

$\forall\, x\in\left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=\frac{n}{x}>0$, alors f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\mapsto 0}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0}[n(\ln x+1)]=-\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[n(\ln x+1)]=+\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty\ \nearrow$	$+\infty$

2. $h(x)=\frac{(\ln x)^2+2\ln x+1}{|\ln x+1|-2}=\frac{(\ln x+1)^2}{|\ln x+1|-2}$.

a) $\mathrm{D}_h=\{x/x\in IR, |\ln x+1|-2\neq 0\ \}$, posons $|\ln x+1|-2=0\Leftrightarrow|\ln x+1|=2\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x+1=2\\ \ln x+1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e\\ x=e^{-3}\end{cases}$, donc $\mathrm{D}_h=\mathrm{IR}-\{e^{-3};e\}\cap\left]0;+\infty\right[=\left]0;e^{-3}\right[\cup\left]e^{-3};e\right[\cup\left]e;+\infty\right[$.

b) les expressions de $h(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. $\forall\, x\in\left]0;e^{-3}\right[\cup\left]e^{-3};e^{-1}\right]$, $h(x)=\frac{(\ln x)^2+2\ln x+1}{-3-\ln x}=\frac{(\ln x+1)^2}{-3-\ln x}$

$\forall\, x\in\left[e^{-1};e\right[\cup\left]e;+\infty\right[$, $h(x)=\frac{(\ln x+1)^2}{\ln x-1}$

c) $\forall\, x\in\left]0;e^{-3}\right[\cup\left]e^{-3};e^{-1}\right]$, $h'(x)=\frac{(-\ln x-5)(\ln x+1)}{x(-\ln x-3)^2}$ alors h est strictement décroissante sur

$]0;e^{-5}]$ et h est strictement croissante sur $[e^{-5};e^{-3}[$ et sur $]e^{-3};e^{-1}]$.

$\forall\, x \in [e^{-1};e[\,\cup\,]e;+\infty[,\ \ h'(x) = \frac{(\ln x+1)(\ln x-3)}{x(\ln x-1)^2}$,

alors h est strictement décroissante sur $[e^{-1};e[$ et sur $]e^3;+\infty[$ et h est strictement croissante sur $]e;e^3]$.

d) Continuité de h en e^{-1} :

$\lim\limits_{x \mapsto (e^{-1})^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto (e^{-1})^-} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{-3-\ln x}\right] = 0$ et $hg(e^{-1}) = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto (e^{-1})^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto (e^{-1})^+} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{\ln x-1}\right] = 0$ et $hd(e^{-1}) = 0$ alors

h est continue en e^{-1}.

Dérivabilité de h en e^{-1}: $h'd(e^{-1}) = 0$ et $h'g(e^{-1}) = 0$ alors h est dérivable en e^{-1}.

e) les limites de h sur D_h.

$\lim\limits_{x \mapsto (e^{-3})^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto (e^{-3})^-} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{-3-\ln x}\right] = \frac{4}{0^+} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto (e^{-3})^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto (e^{-3})^+} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{-3-\ln x}\right] = \frac{4}{0^-} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto (e)^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto (e)^-} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{\ln x-1}\right] = \frac{4}{0^-} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto (e)^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto (e)^+} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{\ln x-1}\right] = \frac{4}{0^+} = +\infty$; posons $t = \ln x$,

on a : $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{-3-\ln x}\right] = \lim\limits_{t \mapsto -\infty} \left[\frac{(t+1)^2}{-3-t}\right] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{(\ln x+1)^2}{\ln x-1}\right] = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\frac{(t+1)^2}{t-1}\right] = +\infty$.

Donner le tableau de variation de h

x	0	e^{-5}		e^{-3}	e^{-1}		e	e^3	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$		$+$	$-$		$-$	$+$
$h(x)$		8			0			8	

f) Trouver dans chaque cas, les réels non nuls a, b et c dans chacun des cas tels que :

$\forall\, x \in]0;e^{-3}[\,\cup\,]e^{-3};e^{-1}],\ \ h(x) = a\ln x + b + \frac{c}{-\ln x-3} = \frac{-a(\ln x)^2-(b+3a)\ln x-3b+c}{-\ln x-3}$; par identification

on a : $a = -1$; $b = 1$ et $c = 4$.

$\forall\, x \in [e^{-1};e[\,\cup\,]e;+\infty[,\ \ h(x) = a\ln x + b + \frac{c}{\ln x-1} = \frac{a(\ln x)^2+(b-a)\ln x-b+c}{\ln x-1}$; par identification on a :

$a = 1$; $b = 3$ et $c = 4$.

« asymptote parabolique » à $\mathcal{C}_g$.

$\forall\, x \in]0;e^{-3}[\,\cup\,]e^{-3};e^{-1}],\ \ h(x) = -\ln x + 1 + \frac{4}{-3-\ln x}$, soit $n(x) = -\ln x + 1$, on calcule

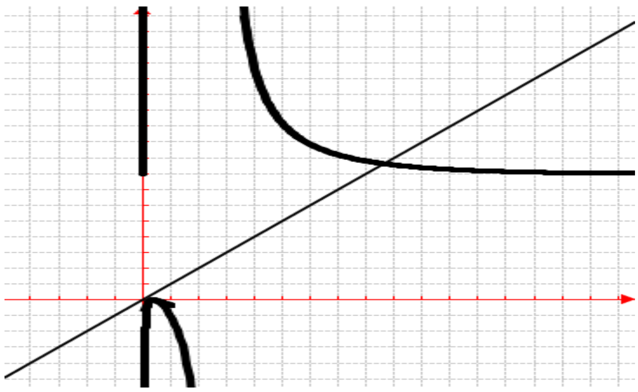
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h(x) - n(x)] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{4}{-3-\ln x}\right] = 0$; donc $\mathcal{C}_n$ est une « asymptote parabolique » à $\mathcal{C}_h$ telle que $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur $]0;e^{-3}[$ et $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de $\mathcal{C}_n$ sur $]e^{-3};e^{-1}]$.

$\forall\, x \in [e^{-1};e[\,\cup\,]e;+\infty[,\ \ h(x) = \ln x + 3 + \frac{4}{\ln x-1}$,

soit $m(x) = \ln x + 3$, on calcule

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h(x) - m(x)] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{4}{\ln x-1}\right] = 0$; donc $\mathcal{C}_m$ est une « asymptote parabolique » à $\mathcal{C}_h$ telle que $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de $\mathcal{C}_m$ sur $[e^{-1};e[$ et $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_m$ sur $]e;+\infty[$.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.



<u>Problème 52 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = x\ln|x-1|$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h : D_h?

2. Soit u la fonction définie par :

$u(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$.

a) Etudier les variations de u sur D_u.

b) Calculer $u(0)$. En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Etudier les limites de h sur D_h. Dresser le tableau de variation de h sur D_h.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

5. Soit (d_m) la droite passant par O et dont une équation est $y = mx$ ($m \in \mathrm{IR}^*$).

a) Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 qui sont les points d'intersection de $\mathcal{C}_h$ et (d_m) différent de O.

b) Déterminer le réel m tel que $A(y = 4)$ est le milieu du segment $[M_1;\ M_2]$.

6. Soit λ un réel tel que $\lambda \in]1;2]$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ vérifiant $\begin{cases} \lambda \le x \le 2 \\ h(x) \le y \le 0 \end{cases}$. (Rappelle $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$)

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto 1} \mathcal{A}(\lambda) =$.

Correction : $h(x) = x\ln|x-1|$

1. $D_h = \{x/x \in IR, x-1 \neq 0\} =$
$D_h =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

2. $u(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

a) $\forall x \neq 1, u'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$,

$\forall x \in]-\infty;1[\cup]1;2]$ $u'(x) < 0$ alors u est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;2]$.
$\forall x \in [2;+\infty[$, $u'(x) > 0$ alors u est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

$\lim_{x \mapsto -\infty} u(x) = +\infty$; $\lim_{x \mapsto +\infty} u(x) = +\infty$;

$\lim_{x \mapsto 1^-} u(x) = \lim_{x \mapsto 1^-}\left[\frac{x}{x-1} + \ln(1-x)\right] = \frac{1}{0^-} + \ln 0^- = -\infty$

$\lim_{x \mapsto 1^+} u(x) = \lim_{x \mapsto 1^+}\left[\frac{x}{x-1} + \ln(x-1)\right] = \frac{1}{0^+} = -\infty$ car $\frac{1}{0^+}$ est emporte sur $\ln 0^+$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	‖	$-$	$+$
$u(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2	↗ $+\infty$

b) $u(0) = 0$.
$\forall x \in]-\infty;0]\cup]1;+\infty[$ $u(x) > 0$
$\forall x \in [0;1[$ $u'(x) < 0$.

3. $\lim_{x \mapsto -\infty} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \mapsto 1^-} h(x) = \lim_{x \mapsto 1^-}[x\ln(1-x)] = \ln 0^- = -\infty$;

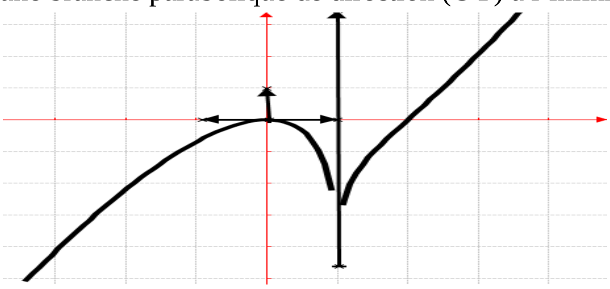
$\lim_{x \mapsto 1^+} h(x) = \lim_{x \mapsto 1^+}[x\ln(x-1)] = \ln 0^+ = -\infty$.

$\forall x \neq 1, h'(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1| = u(x)$,
$\forall x \in]-\infty;0]\cup]1;+\infty[$ $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $]1;+\infty[$.
$\forall x \in [0;1[$, $u'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $[0;1[$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$:

$\lim_{x \mapsto \mp\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \mapsto \mp\infty}[\ln|x-1|] = +\infty$, donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (OY) à l'infinie.



5. $(d_m) : y = mx$ $(m \in IR^*)$

a) $\mathcal{C}_h \cap (d_m) = \{M_1;M_2\} \Leftrightarrow \ln|x-1| = m$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^m + 1 \\ x = -e^m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} M_1[e^m+1; me^m+m] \\ M_2[-e^m+1; -me^m+m] \end{matrix}$.

b) **réel m / $A(y=4)$ est le milieu du segment $[M_1;M_2]$** $\Leftrightarrow y_A = \frac{y_{M_1}+y_{M_2}}{2} = \frac{2m}{2} = 4 \Leftrightarrow m = 4$.

6. Soit λ un réel tel que $\lambda \in]1;2]$.

c) $\mathcal{A}(\lambda) = -\int_\lambda^2 h(x)dx = -\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)\right]_\lambda^2 + \frac{1}{2}\int_\lambda^2 \frac{x^2}{x-1}dx = \left[\frac{-1}{2}x^2\ln(x-1)\right]_\lambda^2 + \frac{1}{2}\int_\lambda^2\left(x+1+\right.$
1x−1dx=1−12x2lnx−1+14x2+12xλ2=2−1−1 2λ2lnλ−1−14λ2−12λ.

d) $\lim_{\lambda \mapsto 1} \mathcal{A}(\lambda) = -\ln 0^+ = +\infty$.

Problème 53 : **On considère la fonction h définie par :** $h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\ln x}, si\ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Soit u la fonction définie par : $u(x) = \begin{cases} -x-1+x\ln x\ si\ x > 0 \\ -1\ si\ x = 0 \end{cases}$.
a) Etudier la continuité et la dérivabilité de u en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Étudier les variations de la fonction u sur son ensemble de définition.
c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution x_0, appartient à l'intervalle $[3,4;3,7]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.
d) En déduire le signe de $u(x)$ sur D_u.
4.
a) Etudier les limites de h sur son D_h.
b) Montrer que pour tout réel $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{u(x)}{x(\ln x)^2}$. En déduire le sens de variation de h.
c) Montrer que $h(x_0) = x_0$.
d) Dresser le tableau de variation de h.
5. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$ et celles de $\mathcal{C}_u$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et celle de $\mathcal{C}_u$.

Correction : $h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\ln x}, si\ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

1. $D_h = \{x/x \in IR, \ln x \neq 0\ et\ x > 0\} =$.
$D_h = [0;1[\cup]1;+\infty[$.

2. **Continuité de h en 0:** $\lim\limits_{x\mapsto 0} h(x)=\frac{0+1}{-\infty}=0$ et $h(0)=0$, alors h est continue en 0.

Dérivabilité de h en 0: $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{x+1}{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{0+1}{0^+}=+\infty$; alors h n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

3. $u(x)=\begin{cases}-x-1+x\ln x\ si\ x>0\\ -1\ si\ x=0\end{cases}$.

a) **Continuité de u en 0:** $\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x)=-1$ et $u(0)=-1$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0: $\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=-1+\ln x$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=-\infty$; alors u n'est pars dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x)=-1$ et

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[x\left(-1-\frac{1}{x}+\ln x\right)\right]=+\infty$

$\forall\ x\in]0;+\infty[$, $u'(x)=\ln x$; alors u est strictement décroissante sur $]0;1[$ et u est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de u.

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

c) u est continue et strictement croissante sur $[3{,}4;3{,}7]$. Elle réalise donc une bijection de $[3{,}4;3{,}7]$ sur $[u(3{,}4);u(3{,}7)]$. Or $u(3{,}4).u(3{,}7)<0$. Donc sur $[3{,}4;3{,}7]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $x_0\in[3{,}4;3{,}7]$ et $x_0=3{,}57$.

d) $\forall\ x\in]0;x_0[$, $u(x)<0$ et $\forall\ x\in]x_0;+\infty[$, $u(x)>0$

4.

a) $h(x)=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{x}}$, $\lim\limits_{x\mapsto 0} h(x)=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h(x)=+\infty$.

b) $\forall\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $h'(x)=\frac{\ln x-\frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x)^2}=\frac{u(x)}{x(\ln x)^2}$; alors h est strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $]1;x_0[$ et h est strictement croissante sur $]x_0;+\infty[$.

c) On sait que $u(x_0)=-x_0-1+x_0\ln x_0=0\Leftrightarrow x_0+1=x_0\ln x_0$ alors $h(x_0)=\frac{x_0+1}{\ln x_0}=x_0$.

d) **tableau de variation de h :**

x	0		1		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$h(x)$	0	$\searrow -\infty$		$+\infty$	$\searrow$ x_0	$\nearrow$	$+\infty$

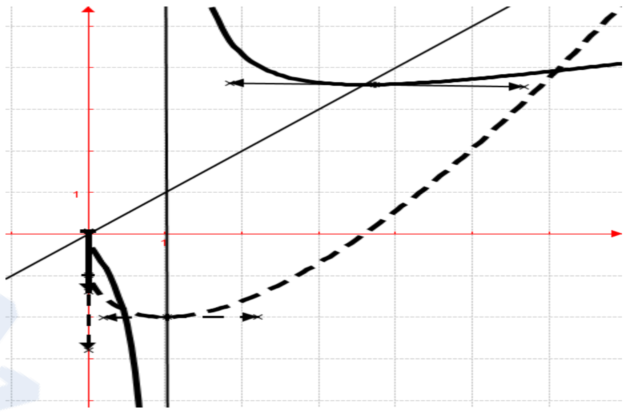
5. **branches infinies de $\mathcal{C}_u$.** $\frac{u(x)}{x}=-1-\frac{1}{x}+\ln x$.

Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\frac{u(x)}{x}=+\infty$.

branches infinies de $\mathcal{C}_h$. $\frac{h(x)}{x}=\frac{x+1}{x\ln x}=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

Branche parabolique de direction (Ox) car $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\frac{h(x)}{x}=0$.

$\mathcal{C}_h$, trait plein et $\mathcal{C}_u$, trait pointé.



Problème 54 : **On considère la fonction f définie par $f(x)=-x^2-2+2\ln x$.**

1. **Etudier les variations de f.**
2. **En déduire le signe de $f(x)$.**
3. **Soit h définie par : $h(x)=-x+5-2\frac{\ln}{x}$.**

a) **Etudier le sens de variation de h et ses limites en $+\infty$ et 0. Dresser le tableau de variation de h.**

b) **Montrons que $h(x)=0$ possède une solution unique α dans $[4,2;4,6[$.**

c) **En déduire le signe de $h(x)$.**

4. **Montrer que la droite (d) d'équation $y=-x+5$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (d).**
5. **Construire $\mathcal{C}_h$ et (d).**
6. **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la droite (d), les droites d'équations $x=\alpha$, $x=1$ et $\mathcal{C}_f$. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.**

Correction : $f(x) = -x^2 - 2 + 2\ln x$

1. **Etudions les variations de f:** $D_f =]0;+\infty[$

$\forall\, x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{x}$, f est strictement croissante sur $]0;1]$ et f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty}\left[-x^2\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}\right)\right] = -\infty$

$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = \lim_{x\mapsto 0}[-x^2 - 2 + 2\ln x] = -\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$+$		$-$	
$f(x)$	⊠	$-\infty$ ↗	-3	↘	$-\infty$

2. $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $f(x) < 0$, car $f(1) = -3$.

3. $h(x) = -x + 5 - 2\frac{\ln x}{x}$.

a) $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $h'(x) = \frac{-x^2-2+2\ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} < 0$, donc h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} h(x) = \lim_{x\mapsto+\infty}\left[-x+5-2\frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$

$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = \lim_{x\mapsto 0}\left[-x+5-2\frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$.

tableau de variation de h :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	
$h(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b) $h(4{,}46) = -0{,}13$ et $h(4{,}2) = 0{,}11$

h est continue et strictement décroissante sur $[4{,}2;4{,}6[$. De plus $h(4{,}46);h(4{,}2) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[4{,}2;4{,}6[$.

c) **Signe de $h(x)$:**

$\forall\, x \in]0;\alpha]$, $h(x) > 0$ et $\forall\, x \in [\alpha;+\infty[$, $h(x) < 0$.

4. $h(x) - (-x+5) = -2\frac{\ln x}{x}$, on calcule

$\lim_{x\mapsto+\infty}[h(x) - (-x+5)] = \lim_{x\mapsto+\infty}\left[-2\frac{\ln x}{x}\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = -x+5$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$.

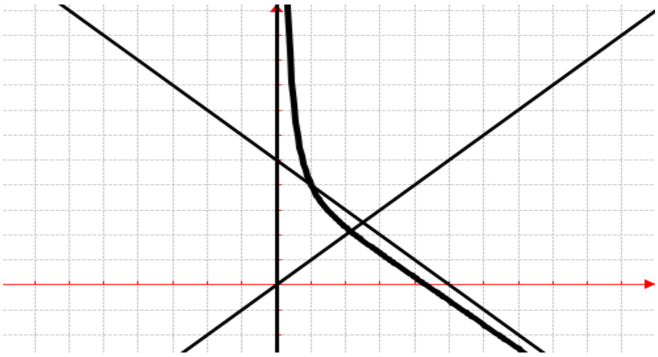
Position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à (d) :

$h(x) - (-x+5) = -2\frac{\ln x}{x}$

$\forall\, x \in]0;1]$, $[h(x) - (-x+5)] > 0$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de (d) et

$\forall\, x \in [1;+\infty[$, $[h(x) - (-x+5)] < 0$, $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de (d).

5. **$\mathcal{C}_h$ et (d) :**



6. $\forall\, x \in [1;+\infty[$, $[h(x) - (-x+5)] < 0$.

$\mathcal{A}(\alpha) = -\int_1^{\alpha}[h(x) - (-x+5)]dx =$

$\int_1^{\alpha}\left[+2\frac{\ln x}{x}\right]dx = [(\ln x)^2]_1^{\alpha} = (\ln\alpha)^2$.

$\lim_{\alpha\mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha\mapsto 0}[(\ln\alpha)^2] = +\infty$.

Problème 55 :

1. **Etudier les variations et en déduire le signe de $g(x)$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x$.**

2. **On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x}$.**

a) **Montrer que $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$.**

b) **Dresser le tableau de variation de f.**

c) **Montrer qu'une droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).**

d) **Déterminer le point A de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (D).**

e) **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.**

3.

a) **Calculer les valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : $0{,}3$; e^{-1} ; 1.**

b) **En déduire l'existence d'une valeur unique α comprise entre $0{,}3$ et e^{-1} telle que $f(\alpha) = 0$.**

4. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$, T et (D).**

5. **Calculer l'aire de l'ensemble des points M du plan compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (D) et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1$.**

6. **On considère les quatre réels a_1, a_2, a_3, a_4 définis par : a_1 est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de (D) ; a_2 est l'abscisse du point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente passe par l'origine du repère ; a_3 est l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de T ; a_4 est solution de l'équation $f''(x) = 0$, où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.**

a) Déterminer les réels a_1, a_2, a_3, a_4.

b) Montrer que ces réels sont des termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Correction :

1. $\forall\, x > 0, g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x} = \frac{(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)}{x}$, alors g est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ et $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2) > 0$ donc, $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

2. $f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x}$

a) $f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x} = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[x + \frac{1}{x}(1 + \ln x)\right] = \frac{1}{0^+}(1 - \infty) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$.

b) $\forall\, x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$, alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

c) $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$,

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = 0$, donc (D) est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. **Position relative :** il dépend du signe de $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x}$. Posons $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

- Si $x \in]0; e^{-1}[$ alors $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D).
- Si $x > e^{-1}$ alors $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D)
- Si $x = e^{-1}$ alors $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x} = 0$ le point $B(e^{-1}; e^{-1})$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et (D).

d) le point A de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (D): $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$, donc $A(1; 2)$ car La tangente $A(x_0; f(x_0))$ a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. Elle est parallèle à la droite D ssi $f'(x_0) = 1$ (coefficient directeur de D).

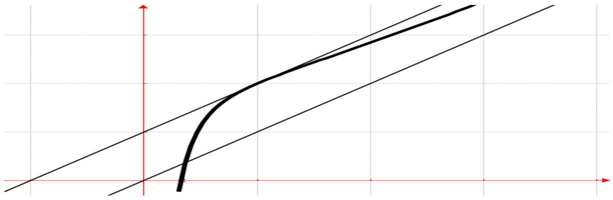
e) $\mathrm{T} : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x + 1$.

3. f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Elle est bijective de $]0; +\infty[$ sur IR.

x	$0{,}3$	e^{-1}	1
$f(x)$	$-0{,}38$	$0{,}37$	2

Sur $[0{,}3; e^{-1}]$, f est dérivable et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[0{,}3; e^{-1}]$ à $[f(0{,}3); f(e^{-1})]$. Comme $0 \in [f(0{,}3); f(e^{-1})] = [-0{,}38; 0{,}37]$ et que $f(e^{-1}) \times f(0{,}3) < 0$ alors elle admet un antécédent unique $\alpha \in [0{,}3; e^{-1}]$.

4.



5. $\int_{e^{-1}}^{1} [f(x) - x]dx = \int_{e^{-1}}^{1} \left(\frac{1+\ln x}{x}\right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

6.

a) **Déterminons les réels a_1, a_2, a_3, a_4 :** $\mathcal{C}_f \cap (D) \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} = e^{-1}$; **$a_2$ est l'abscisse du point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente passe par l'origine du repère :** $f'(a_2)(x - a_2) + f(a_2) \Leftrightarrow a_2 = e^{-1/2}$;
$\mathcal{C}_f \cap \mathrm{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_3} = 1$; $f''(a_4) = 0 \Leftrightarrow a_4 = e^{1/2}$.

b) $a_1 = e^{-1/2} \times e^{-1/2} = e^{-1}$, $a_2 = e^{-1/2}$, $a_3 = e^{-1/2} \times e^{1/2} = 1$ et $a_4 = e^{1/2}$, on remarque la raison est $q = e^{1/2}$; donc la forme récurrente est : $a_{n+1} = a_n e^{1/2}$.

Problème 56 :

1. Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$.

a) Montrer que, si $0 < x \leq 1$, on a $g(x) \geq 1$.

b) Etudier le sens de variation de g sur $[1, +\infty[$. Calculer (1) et $g(2)$.

c) Montrer que $g(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

d) Donner de la valeur approchée de α à 10^{-1}.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

a) Etudier la fonction f. (on montrera que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$).

b) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Correction :

1. $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$. $D_g =]0; +\infty[$

a) $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x) \geq 1 \Leftrightarrow$
$1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{1/2}$ ou $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$
or $e^{1/2}$ et 0 appartiennent à $]0; 1]$.

D'où $\forall\, x \in]0;1]$, $g(x) \geq 1$.

b) $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = -4x\ln x$.

$\forall\, x \in]0;1[$, $g'(x) > 0$, g est strictement croissante sur $]0;1[$.

$\forall\, x \in]1;+\infty[$, $g'(x) < 0$, g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

$g(1) = 2$ et $g(2) = (5 - 8\ln 2) = -0{,}54$.

c) La restriction g_1 de g à $[1;+\infty[$ est continue et strictement décroissante sur cet intervalle ; de plus, on a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = -\infty$, donc g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]-\infty;3]$. Comme $0 \in]-\infty;3]$, et aussi $g(2) \times g(1) < 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

d) Recherche de la valeur approchée de α à 10^{-1} : $g(1{,}7) = 0{,}82$; $g(1{,}8) = 0{,}43$ et $g(1{,}9) = -0{,}024$, or $g(1{,}8) \times g(1{,}9) < 0$ alors $1{,}8 \leq \alpha \leq 1{,}9$.

2. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}}$

a) Etudier la fonction f : $D_f =]0;+\infty[$.

$\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2(1-2\ln x)}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$.. $\forall\, x \in]0;\alpha[$, $f'(x) > 0$ f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$.

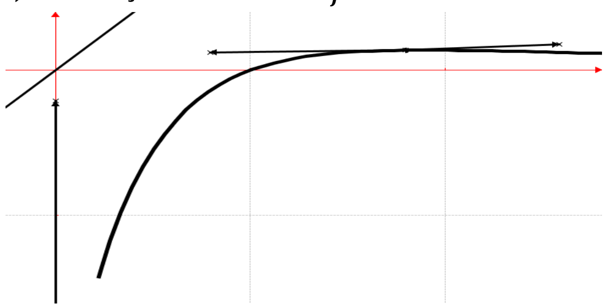
$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[$, $f'(x) < 0$ f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$, $alors\ f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

x	0			α		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\searrow$	0

b) $T_1 : y = x - 1$.

c) Traçons la courbe $\mathcal{C}_f$:



Problème 57 : **On considère les fonctions f et h définies respectivement par : $f(x) = \frac{x^2+x+2\ln(x+1)}{x+1}$ et $h(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$**

1.

a) Quel est le signe de h ?

b) Etudier les variations de f.

c) Etudier les branches infinies de f.

d) Démontrer qu'il existe un point unique A de $\mathcal{C}_f$ où $\mathcal{C}_f$ admet une tangente T parallèle à (D) la droite d'équation $y = x$.

Déterminer les coordonnées de A.

e) Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

2. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m, du nombre de solutions de l'équation : $f(x) = x + m$

Placer ces solutions par rapport à 0 et $e - 1$.

3.

a) Justifier que f est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Construire la courbe de f^{-1}.

Correction :

1.

a) $h(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$

$\forall\, x \in]-1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{2[(x+1)^2-1]}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1} h(x) = +\infty$.

Tableau de variation de h sur $]-1;+\infty[$:

x	-1			0		$+\infty$
$h'(x)$	⊠		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	⊠	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de h est $3 > 0$, donc sur $]-1;+\infty[$ on a $h(x) > 0$.

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+x+2\ln(x+1)}{x+1} = x + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}}$

$\forall\, x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2+2x+1+2-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1} f(x) = -\infty$.

x	-1			$+\infty$
$f'(x)$	⊠		$+$	
$f(x)$	⊠	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) branches infinies de f :

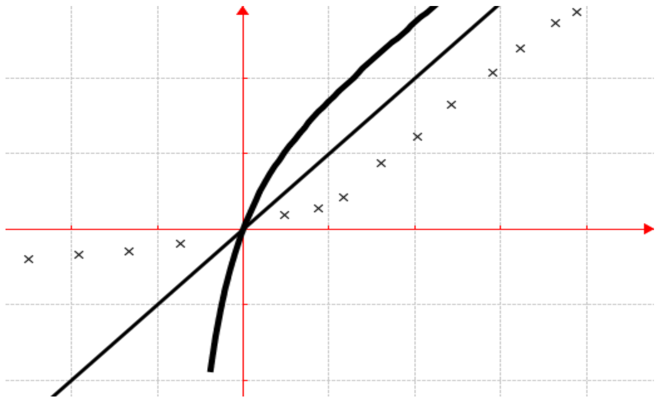
$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+x+2\ln(x+1)}{x^2+x} = 1 + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{x}$, on déduit que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[1 + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{x}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

d) $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = e - 1 = 1{,}71$.

$A\left[(e-1);\left(e - 1 + \frac{4}{e}\right)\right]$.

e) $\mathcal{C}_f$ en trait plein et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en trait pointé.



2. $f(x) = x + m$.

- Si $m \in]1; +\infty[$, aucune solution.
- Si $m \in]0; 1[$, deux solutions.
- Si $m \in]-\infty; 0[$, une seule solution.

3.

a) f est continue et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$. elle réalise une bijection de $]-1; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$.

b) $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ **en trait pointé.**

<u>Problème 58 :</u> unité graphique 2 cm

1. Soit g définie par : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en $+\infty$ et 0.

b) Dresser le tableau de variation de g. En déduire le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$.

a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer qu'une droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D)

d) Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (D).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $2 \leq \alpha \leq 3$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. Soit λ est un réel supérieur à 3.

a) Calculer $I = \int_e^\lambda \frac{\ln(x)}{x} dx$.

b) En déduire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, la droite (D) et les droites d'équations $x = e$, $x = \lambda$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

<u>Correction :</u>

1. $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[x^2 + 1 - \ln x] = -\ln 0^+ = +\infty$.

b) $\forall x > 0, g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)}{x}$.

Sens de variation de g sur $]0; +\infty[$:

$\forall x \in \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.

Tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$+\infty$ ↘	1,83	↗ $+\infty$

Signe de g sur $]0; +\infty[$: Le minimum de g est $0{,}83 > 0$, donc sur $]0; +\infty[$ on a $g(x) > 0$.

2. $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}\right] = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Position relative : posons $f(x) - y = \frac{\ln x}{x} = 0$.

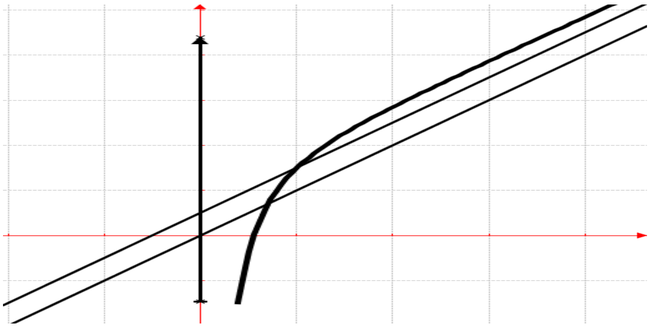
- Si $x \in]0; 1[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D).
- Si $x > 1$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D).
- Si $x = 1$ alors le point $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et (D).

d) $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

Construisons $\mathcal{C}_f$:



3. La fonction f est dérivable et strictement croissante sur [2 ; 3], donc elle réalise une bijection de [2 ; 3] sur $[f(2)\,;\,f(3)] = [2{,}84; 3{,}86]$. Le nombre trois (3) est compris entre $f(2)$ et $f(3)$, et que $[f(2)-3]\times[f(3)-3] < 0$ donc l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans [2 ; 3].

Encadrement d'amplitude 10^{-2} de α :

Avec une calculatrice : $f(2{,}14) - 3 \approx -0{,}00034$ et $f(2{,}15) - 3 \approx 0{,}0006$. $2{,}14 \leq \alpha \leq 2{,}15$.

Calculons $I = \int_1^e f(x)dx$:

$I = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}\right] dx = \left[\frac{x^2+x+(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2+e-1}{2}$.

4. Soit λ est un réel supérieur à 3.

a) $I = \int_e^\lambda \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}\int_e^\lambda 2\frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}[(\ln x)^2]_e^\lambda$

$I = \frac{1}{2}[(\ln x)^2]_e^\lambda = \frac{1}{2}(\ln \lambda)^2 - \frac{1}{2}$.

b) $\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_e^\lambda [f(x) - y]dx\, cm^2 = 4\int_e^\lambda \left[\frac{\ln x}{x}\right] dx\, cm^2 = 4\,I\, cm^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = 2}(\ln \lambda)^2 - 2$$

c) $\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty}[2(\ln\lambda)^2 - 2] = +\infty$.

Problème 59 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Etudier les limites de h sur D_h.

3. Soit u la fonction définie par $u(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

a) Etudier le sens de variation de u sur D_u.

b) Calculer $u(1)$ et $u(2)$.

c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

d) Trouver un encadrement de α à 10^{-1}.

e) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$.

4. Montrer que :

$\forall\, x \in D_h$, $h'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times u(x)$. En déduire le sens de variation de h sur D_h.

5. Montrer que $h(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

6. Dresser le tableau de variation de h.

7. Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.

<u>**Correction :**</u> $h(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$.

1. $D_h = \{x / x \in IR, x > 0\} =]0; +\infty[$.

2. Etudions les limites de h sur D_h :

$\lim\limits_{x\mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{2\ln x}{x^2+x}\right] = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[2\frac{\ln x}{x^2}\right] = 0$.

3. $u(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$: $D_u =]0; +\infty[$

a) sens de variation de u sur D_u : $\forall\, x \in]0; +\infty[$,

$u'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-(x+1)(4x+1)}{x(2x+1)^2} < 0$, alors u est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) $u(1) = \frac{2}{3} = 0{,}66$ et

$u(2) = \frac{3}{5} - \ln 2 = -9{,}31.10^{-2}$.

c) Pour $x \in]0; +\infty[$: u est continue (puisque dérivable), strictement décroissante et prend des valeurs négatives ($\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = -\infty$) et positives ($\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x) = +\infty$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

d) Trouver un encadrement de α à 10^{-1} :

$u(1{,}8) = 2{,}09.10^{-2}$ et $u(1{,}9) = -3{,}76.10^{-2}$.

on trouve, $u(1{,}8) \times u(1{,}9) < 0$ donc $1{,}8 \leq \alpha \leq 1{,}9$.

e) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$:

$\forall\, x \in]0; \alpha[$, $u(x) > 0$;

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[$, $u(x) < 0$;

$si\ x = \alpha$, $u(\alpha) = 0$.

4. $\forall\, x > 0$, $h'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - 2(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{2(x+1) - 2(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)\left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln x\right]}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times u(x)$.

$\forall\, x \in]0; \alpha[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]0; \alpha[$.

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

5. Montrer que $h(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

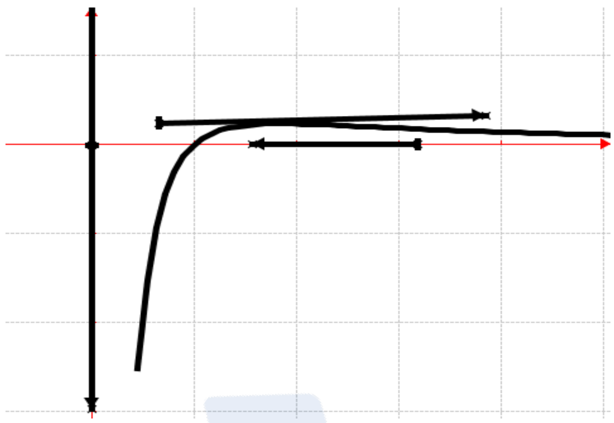
$u(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} = \ln\alpha$

$h(\alpha) = \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha} = \frac{2\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha^2+\alpha} = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

6. tableau de variation de h :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$	$\searrow$	0

7. Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.



Problème 60 :

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$.

a) Etudier les limites de g sur $]0;+\infty[$.

b) Etudier les variations de g.

En déduire le signe de $g(x)$ en fontion de x.

c) On note $\mathcal{C}'$ la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \ln x$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1;e]$, on a : $g(x) \le \ln x$. On ne demande pas de construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

d) Calculer $\mathrm{J} = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx$.

e) Soit le domaine plan défini par :
$\Delta = \{M(x;y)\ 1 \le x \le e \text{ et } g(x) \le y \le \ln x\}$.
Déterminer, l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2}.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$.

a) Etudier les limites de f sur D_f.

b) Etudier les variations de f.

c) Tracer $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

d) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution, notée α, et que $3,5 < \alpha <$ 3,6.

3. On considère la fonction h définie sur $]1;+\infty[$ par : $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

a) Montrer que α est une solution de $h(x) = x$.

b) Etudier le sens de variation de h.

Correction :

1. $g(x) = x\ln x - x + 1$

Ensemble de définition : $D_g =]0;+\infty[$.

a) $\lim\limits_{x\mapsto 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x) = +\infty$

b) $\forall\, x \in]0;+\infty[\ \ g'(x) = \ln x$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $g(1) = 0$ qui est aussi l'ordonnée du point minimum, alors de ce fait on en déduit que : $\forall\, x \in]0;+\infty[\ \ g(x) > 0$.

c) On sait que $x \longmapsto \ln x$ et $g(x)$ sont strictement croissante sur $[1;e]$. Pour $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$ et $g'(1) = \ln 1 = 0$. Pour $g(e) = e\ln e - e + 1 = 1$ et $g'(e) = \ln e = 1$. Vérifions cette hypothèse,

$\forall\, x \in [1;e],\ g(x) \le \ln x \Leftrightarrow g(x) - \ln x \le 0$

$g(x) \le \ln x \Leftrightarrow x\ln x - x + 1 - \ln x \le 0$

$g(x) \le \ln x \Leftrightarrow \ln x\,(x-1) - (x-1) \le 0$

$g(x) \le \ln x \Leftrightarrow (x-1)(\ln x - 1) \le 0$

$\forall\, x \in [1;e],\ (x-1)(\ln x - 1) \le 0$..

$posons\ (x-1)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases}$ (vraie).

d) Calculons $\mathrm{J} = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx$:

$\mathrm{J} = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \int_1^e x\ln x\,dx - \int_1^e \ln x\,dx$

$\mathrm{J} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 - x\ln x + x\right]_1^e = \frac{e^2-3}{4}$.

e) $\Delta = \int_1^e (\ln x - g(x))\,dx =$

$\Delta = \int_1^e [-(x-1)\ln x + x - 1]\,dx = -\mathrm{J} + \int_1^e (x-1)\,dx = -\mathrm{J} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^e = \frac{e^2-4e+5}{4}$

2. $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$. Ensemble de définition D_f de f : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

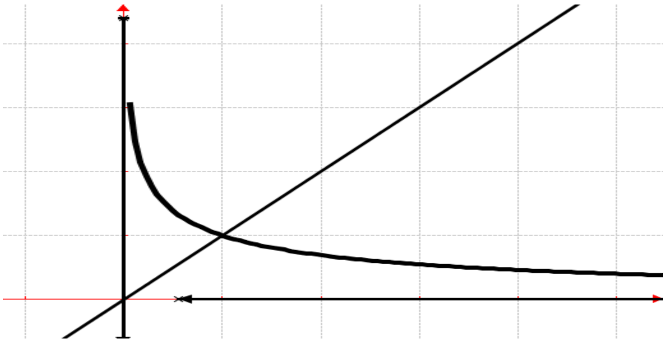
$\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{1}{x-1}\ln x\right] = \frac{-\infty}{0-1} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right] = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto 1} f(x) = 1$.

b) Etudions les variations de f : $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(1-x)^2} = -\frac{x\ln x - x + 1}{x(1-x)^2} = \frac{-g(x)}{x(1-x)^2} < 0$.

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$-$		⊠	$-$		
$f(x)$	⊠	$+\infty$ $\searrow$	1	⊠	1	$\searrow$	0

c) Traçons $\mathcal{C}_f$:



d) $f(3{,}5) = 0{,}501$ et $f(3{,}6) = 0{,}492$

f est dérivable et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc sur $]3{,}5; 3{,}6[$. On remarque que $\frac{1}{2}$ appartient à $]f(3{,}5); f(3{,}6)[=]0{,}492; 0{,}501[$. Il a un unique antécédent pour f sur $]f(3{,}5); f(3{,}6)[=]0{,}492; 0{,}501[$. L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a donc une seule solution $\alpha \in]3{,}5; 3{,}6[$.

3. $\boldsymbol{h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

a) $f(\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$. On déduit $h(\alpha) = \ln\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$ (vraie).

b) $\forall\, x \in]0; +\infty[,\ h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{x+2}{2x} > 0$, donc h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

<u>Problème 61 :</u> On appelle f la fonction définie sur l'intervalle I $=]-2; +\infty[$ par

$\boldsymbol{f(x) = 1 + x\ln(x+2)}$. **(unité graphique 4 cm).**

1. **Etudier les variations de la fonction f'.**
2. **Montrer que sur l'intervalle $]-2; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $[-0,6; -0,5]$.**
3. **En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.**
4. **Etudier la limite de f sur D_f.**
5. **Montrer que pour α appartenant à $[-0,6; -0,5]$, $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)(\alpha+1)}{\alpha+2}$.**
6. **Dresser le tableau de variation de f et étudier les branches infinies.**
7. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.**

<u>Correction :</u> (unité graphique 4 cm).

$\boldsymbol{f(x) = 1 + x\ln(x+2)}$.

1. les variations de la fonction f' :

$\forall\, x > -2,\ f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$

$\forall\, x > -2,\ f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{(x+2)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

Posons $t = x + 2 \Leftrightarrow x = t - 2$,

$\lim\limits_{x \mapsto -2} f'(x) = \lim\limits_{t \mapsto 0} \left[\ln(t) + 1 - \frac{2}{t}\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\ln(x+2) + \frac{x}{x+2}\right] = +\infty$

x	-2	$+\infty$
$f''(x)$		$+$
$f'(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. f' est continue et strictement croissante sur $[-0{,}6; -0{,}5]$. Elle réalise donc une bijection de $[-0{,}6; -0{,}5]$ sur $[f'(-0{,}6); f'(-0{,}5)] = [-0{,}92; 072]$. Or $f'(-0{,}6).f'(-0{,}5) < 0$ et $0 \in [-0{,}92; 072]$. Donc sur $[-0{,}6; -0{,}5]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-0{,}6; -0{,}5]$.

3. signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x

$\forall\, x \in]-2; \alpha],\ f'(x) < 0$

$\forall\, x \in [\alpha; +\infty[,\ f'(x) > 0$

4. $\lim\limits_{x \mapsto -2} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2} [1 + x\ln(x+2)] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [1 + x\ln(x+2)] = +\infty$

5. $\forall\, \alpha \in [-0{,}6; -0{,}5],\ f'(\alpha) = \ln(\alpha+2) + \frac{\alpha}{\alpha+2} = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+2) = -\frac{\alpha}{\alpha+2}$.

$\forall\, \alpha \in [-0{,}6; -0{,}5],\ f(\alpha) = 1 + \alpha\ln(\alpha+2) = 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha+2} = -\frac{\alpha^2-\alpha-2}{\alpha+2} = \frac{(2-\alpha)(\alpha+1)}{\alpha+2}$.

6. tableau de variation de f :

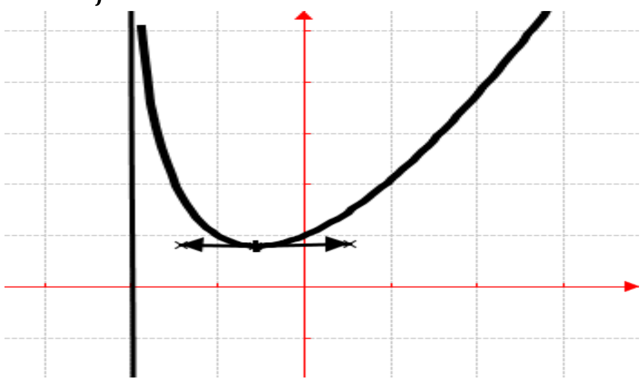
x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

Étudions les branches infinies :

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + \ln(x+2)$, on peut déterminer :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(x+2)\right] = +\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

4. $\mathcal{C}_f$:



Problème 62 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x\ln\frac{x+2}{x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier la continuité au point 0.

c) Etudier la dérivabilité au point 0 et interpréter ce résultat.

2. Montrer que, pour tout, $x > 0, f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$. En déduire que f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3. Montrer que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

6. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{2x}{x+2}$.

a) Dresser le tableau de variation de h sur $[0; +\infty[$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f(x) - h(x) = xf'(x)$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_h$.

c) Déterminer une équation de la tangente T_B à $\mathcal{C}_h$ au point B d'abscisse 2.

d) Construire la courbe de la fonction h et la tangente T_B.

Correction : $f(x) = \begin{cases} x\ln\frac{x+2}{x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1.

a) $D_f = [0; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[x\ln(x+2) - x\ln x] = 0$ et $f(0) = 0$ alors f est continue au point 0.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] = +\infty$, f n'est pas dérivable au point 0 alors $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale.

2. $\forall\, x > 0, f'(x) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$.

$\forall\, x > 0, f''(x) = \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{-2x-4+2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2} < 0$, alors f' est strictement strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right] = \ln(1) = 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

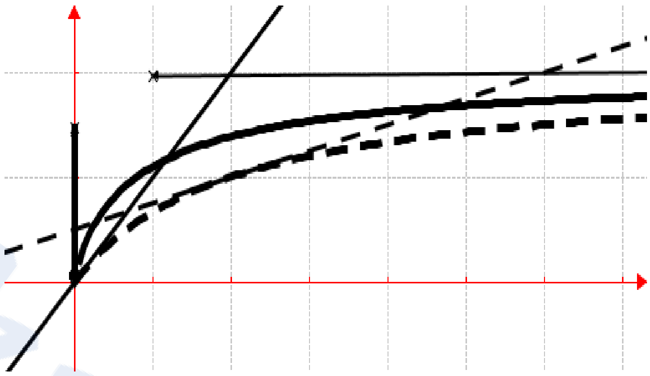
$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f'(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = -\ln 0^+ = +\infty$; posons

$\begin{cases} t = 1+\frac{2}{x} \\ x = \frac{2}{t-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto +\infty \\ t \mapsto 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto 1}\left[2\frac{\ln t}{t-1}\right] = 2$;.

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	2

4. $T_A : y = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)x + 1$.

5. $\mathcal{C}_f$ **en trait plein ;** $\mathcal{C}_h$ **en trait pointé et** T_B



6. sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{2x}{x+2}$.

a) tableau de variation de h sur $[0; +\infty[$.

$\forall\, x \in [0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$, alors h est croissante sur $[0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{2x}{x+2}\right] = 2$ et $h(0) = 0$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	2

b) $\forall\, x > 0$, **on a** $f(x) - h(x) = xf'(x)$ **:**

$xf'(x) = x\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right]$ et $f(x) - h(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2x}{x+2} = x\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right] = xf'(x)$.

position relative de $\mathcal{C}_f$ **et de** $\mathcal{C}_h$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $xf'(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \frac{2x}{x+2} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_h$.

c) $T_B : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

d) **Voir figure.**

Problème 44 : **On considère la fonction f définie par : d'unité graphique 5 cm**

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1, & si\ x>0\\ 1, & si\ x=0\end{cases}.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprétation graphique du résultat obtenu.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $[4,4;4,8]$.

Encadrer α d'amplitude 10^{-2} près.

4. Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Soit h la fonction définie par $h(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.

c) Etudier le sens de variation de h' et en déduire le signe de $h'(x)$.

Etudier le sens de variation de h.

d) Montrer que h admet un prolongement par continuité à droite de 0. Etudier la limite de h en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de h.

e) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A à déterminer son coordonnée.

6. Construire $\mathcal{C}_f$; $\mathcal{C}_h$ et T_1.

Correction : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1, & si\ x>0\\ 1, & si\ x=0\end{cases}.$

1. Continuité de f en 0:

$\lim_{x\mapsto 0} f(x)=\lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x+1\right]=1$ et $f(0)=1$,

alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{3}{2}x-x\ln x$

$\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{3}{2}x-x\ln x\right]=0$; alors f est dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente à droite de 0.

2. variations de la fonction f :

$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right]=-\infty.$

$\forall\ x\in[0;+\infty[,\ f'(x)=2x(1-\ln x)$;

$\forall\ x\in[0;e]$, alors f est croissante sur $[0;e]$

$\forall\ x\in[e;+\infty[$, f est décroissante sur $[e;+\infty[$.

x	0				$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2$	$\searrow$	$-\infty$

3. $f(4{,}8)=-5{,}08$ et $f(4{,}4)=1{,}35$.

f est continue et strictement décroissante sur $[4{,}4;4{,}8]$. De plus $f(4{,}8).f(4{,}4)<0$ et $0\in[-5{,}08;1{,}35]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[4{,}4;4{,}8]$. **Encadrons α d'amplitude 10^{-2} près :** par l'utilisation de la calculatrice, on remarque que $[f(4{,}71)=-0{,}102]\times[f(4{,}69)=6{,}6.10^{-4}]<0$ alors $4{,}69\le\alpha\le 4{,}71$.

4. $T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)=2x+\frac{1}{2}$.

5. $h(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$.

a) $D_h=\{x/x\in IR,\ x>0\}=]0;+\infty[$.

b) $\forall\ x>0, h(x)=\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x-2x+\frac{1}{2}$

$\forall\ x>0, h'(x)=2x(1-\ln x)-2=2(x-x\ln x-1$ et $\forall x>0, h''x=-2\ln x$.

c) sens de variation de h' :

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$+$		$-$	

$\forall\ x\in]0;1[$, h' est strictement croissante sur $]0;1[$ et $\forall\ x\in]1;+\infty[$, h' est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. **Déduction du signe de $h'(x)$:** $h'(1)=0$,

$\lim_{x\mapsto +\infty} h'(x)=\lim_{x\mapsto +\infty}[2x(1-\ln x)-2]=-\infty$;

$\lim_{x\mapsto 0^+} h'(x)=\lim_{x\mapsto 0^+}[2(x-x\ln x-1)]=-2$.

x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$+$		$-$	
$h'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

donc $\forall\ x>0$, $h'(x)<0$.

sens de variation de h : $\forall\ x>0$, $h'(x)<0$, alors h strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

d) h admet un prolongement par continuité à droite de 0 :

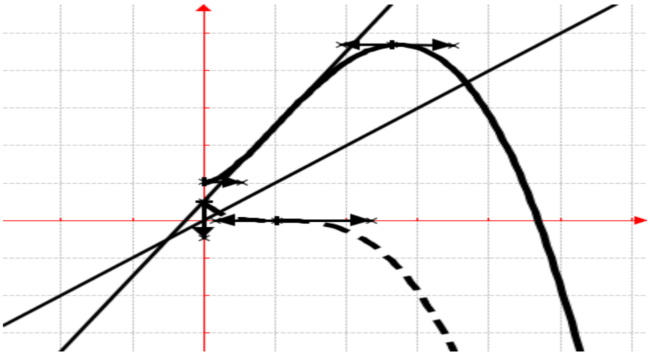
$\lim_{x\mapsto 0} h(x)=\lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x-2x+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$.

$\lim_{x\mapsto +\infty} h(x)=-\infty$. **tableau de variation de h**

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$1/2$	$\searrow$	$-\infty$

e) $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A à déterminer son coordonnée : $h''(x)=-2\ln x=0\Leftrightarrow x=1$, c'est le point $A(1;0)$.

6. $\mathcal{C}_f$ en trait plein ; $\mathcal{C}_h$ en trait pointé et T_1.



Problème 64 : **Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$.**

1. Soit u la fonction définie par :
$u(x)=x^3-1+2\ln x$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

2.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (Δ).

3. On note λ un nombre réel tel que $\lambda>1$ et on désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x=1$ et $x=\lambda$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathcal{A}(\lambda)=1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}$.

b) Déterminer la limite ℓ de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que $\ell=\mathcal{A}(\frac{1}{e})$.

Correction :

1. $u(x)=x^3-1+2\ln x$.

a) $\forall\, x>0\ \ u'(x)=3x^2+\frac{2}{x}=\frac{3x^3+2}{x}>0$,
donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) $u(1)=2\ln 1=0$ et u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc

- Si $0<x<1$, alors $u(x)<u(1)$ donc $u(x)<0$.
- Si $x=1$, $u(1)=0$ et
- Si $x>1$ alors $u(x)>u(1)$ donc $u(x)>0$.

2. $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x-\frac{\ln x}{x^2}\right]=+\infty$ et
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left[x-\frac{\ln x}{x^2}\right]=-\frac{-\infty}{0^+}=+\infty$

b) **Dressons le tableau de variation de f :**
$\forall\, x\in\,]0;+\infty[,\ f'(x)=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{u(x)}{x^3}>0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

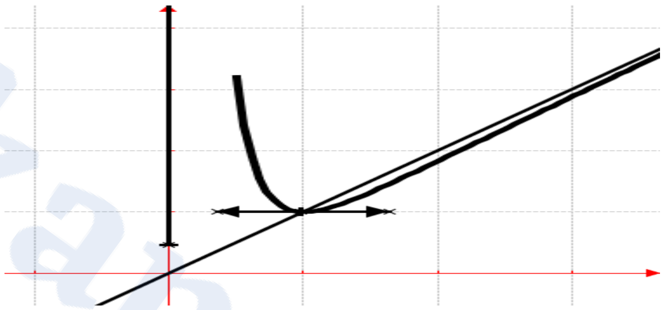
c) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln x}{x^2}\right]=0$ donc la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

Déterminons la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) :

Elle dépend du signe de $f(x)-y=\frac{\ln x}{x^2}$.

- Si $x\in\,]0;1[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (Δ).
- Si $x>1$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (Δ).
- Si $x=1$ alors le point $B(1;1)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et Δ.

d) **Traçons la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (Δ) :**



3.

a) **Démontrons que : $\mathcal{A}(\lambda)=1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}$:**

Sur $[1;+\infty[$, la droite (Δ) est au dessus de $\mathcal{C}_f$, donc

$\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^\lambda\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda\frac{-1}{x^2}dx=$
$\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda=1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}$.

$\mathcal{A}(\lambda)=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda\frac{-1}{x^2}dx=1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}$.

b) $\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty}\left[1-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right]=1$.

c) $\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}}-\frac{1}{\frac{1}{e}}=1-\frac{-1}{\frac{1}{e}}-\frac{1}{\frac{1}{e}}=1$.

Problème 65 :

A. On considère la fonction f définie par $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

1. Etudier les branches infinies de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[e^{-1}; 1]$ qu'on note α. Encadrer α d'amplitude 10^{-2}.

4. En déduire le signe de $f(x)$.

5. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

6. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

B.

2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = -x^2 + x + \ln x$.

a) Etudier les variations et le signe de h.

b) Montrer que, $\forall\, x > 0$, $f(x) - x = \frac{h(x)}{x}$.

c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

C. **Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]e^{-1}; \alpha[$. On note M_0 le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0.**

1. Donner une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de T_0 avec l'axe des abscisses.
Ecrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

3. On considère la fonction g définie sur $]e^{-1}; \alpha]$ par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a) Montrer que $g(x_0) = x_1$. Calculer $g'(x)$.

b) Etudier le signe de $f''(x)$ sur $]e^{-1}; \alpha]$.

c) En déduire que g est strictement croissante sur $]e^{-1}; \alpha]$ puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d) Etudier le signe de $g(x) - x$ sur $]e^{-1}; \alpha[$. En déduire que $e^{-1} < x_0 < x_1 < \alpha$.

4. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]e^{-1}; \alpha]$, $g(x) \in]e^{-1}; \alpha]$.

Correction :

A. $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$. $D_f =]0; +\infty[$

1. $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale.

2. $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. $f(e) = 1 + \frac{1}{e} \approx 1{,}36$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		−	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	1,36	↘	1

3. f est continue, strictement croissante sur $[e^{-1}; 1]$, $f(e^{-1}) \approx -1{,}72$ et $f(1) = 1$, or $f(e^{-1}) \times f(1) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[e^{-1}; 1]$.

Encadrement de α d'amplitude10^{-2} :

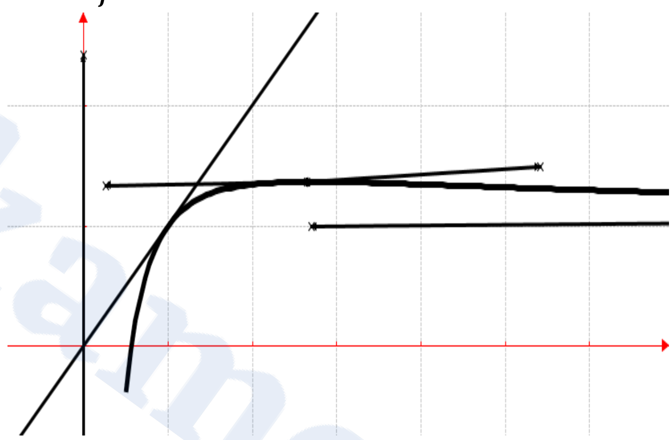
Avec la calculatrice, on trouve $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.

4. Comme $f(\alpha) = 0$, et $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$:
Si $x \in]0; \alpha[$, $f(x) < 0$. Si $x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) > 0$. Si $x = \alpha$, $f(\alpha) = 0$.

5. Montrons que $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x$:

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = \frac{2\ln x}{2x} + 1 = f(x)$, d'où la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

6. $\mathcal{C}_f$ **:**



B.

1. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$, donc T : $y = x$

2. $h(x) = -x^2 + x + \ln x$, $D_h =]0; +\infty[$

a) $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{-2x^2+x+1}{x} = \frac{(x-1)(-2x-1)}{x}$. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = -\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	+		−	
$h(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	$-\infty$

Comme h admet un maximum 0, alors $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h(x) < 0$.

b) $f(x) - x = 1 + \frac{\ln x}{x} - x = \frac{1}{x}(-x^2 + x + \ln x = hxx$.

c) $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h(x) < 0$, alors $f(x) - x = \frac{h(x)}{x} < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de T.

C. $x_0 \in]e^{-1}; \alpha[$, **on note $M_0(x_0; f(x_0))$:**

1. $T_0 : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
2. x_1 s'obtient en remplaçant y par 0 dans T_0 et comme $f'(x_0) \neq 0$, alors $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
3. $\boldsymbol{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, D_g =]e^{-1}; \alpha]}$.

a) On se réfère à la question 2., $g(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$. $\forall\, x \in]e^{-1}; \alpha]$, $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ avec $f''(x) = \frac{-3+2\ln 2}{x^3}$.

b) $\forall\, x \in]e^{-1}; \alpha]$, $f''(x) = \frac{-3+2\ln 2}{x^3} < 0$.

c) $\forall\, x \in]e^{-1}; \alpha]$, $f(x) < 0$ et $f''(x) < 0$ alors g est strictement croissante sur $]e^{-1}; \alpha]$.

Montrons que $x_1 < \alpha$:
Comme $x_0 < \alpha$ et g est strictement croissante sur $]e^{-1}; \alpha]$ alors $g(x_0) < g(\alpha)$ donc $x_1 < \alpha$.

d) $\forall\, x \in]e^{-1}; \alpha[$, $g(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)} > 0$.

En déduire que $e^{-1} < x_0 < x_1 < \alpha$: $g(x) > x \Leftrightarrow e^{-1} < x_0 < g(x_0) < \alpha \Leftrightarrow e^{-1} < x_0 < x_1 < \alpha$.

4. g est strictement croissante sur $]e^{-1}; \alpha]$ donc $e^{-1} < x \leq \alpha \Leftrightarrow g(e^{-1}) < g(x_0) \leq g(\alpha)$ or $g(e^{-1}) > e^{-1}$ alors $g(x) \in]e^{-1}; \alpha]$.

<u>Problème 66 :</u>

1. **Soit u définie par : $u(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.**

a) **Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.**

b) **Etudier le sens de variation de u.**

c) **Dresser le tableau de variation de u. Calculer $u(1)$. En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$.**

a) **Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.**

c) **Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

3. **Déterminer l'aire I, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g définie par $g(x) = \ln x$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.**

4. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et celle $\mathcal{C}_g$.**

<u>Correction :</u>

1. $\boldsymbol{u(x) = x^2 - 1 + 2\ln x}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} + 2\frac{\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$
$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x^2 - 1 + 2\ln x] = -\infty$.

b) $\forall\, x > 0$, $u'(x) = 2x + \frac{2}{x} = 2\frac{x^2+1}{x} > 0$, donc, u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) **Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:**

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	☒	+	
$u(x)$	☒ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$u(1) = 0$. **Signe de u sur $]0; +\infty[$:** $\forall\, x \in]0; 1[$, $u(x) < 0$ et $\forall\, x \in]1; +\infty[$, $u(x) > 0$.

2. $\boldsymbol{f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2} = \ln x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\ln x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\ln x - \frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$; posons $g(x) = \ln x$, on remarque que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - (\ln x)] = 0$, donc $\mathcal{C}_g$ d'équation $g(x) = \ln x$ est une parabolique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Position relative : posons $f(x) - g(x) = -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Si $x \in]0; 1[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.
- Si $x > 1$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{C}_g$.
- Si $x = 1$ alors le point A$(1; 0)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

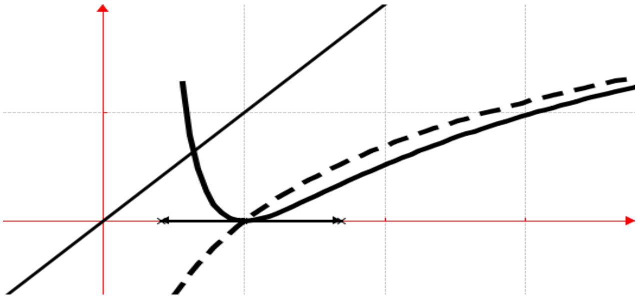
c) $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x^2 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$, donc f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	☒	−		+	
$f(x)$	☒ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f(x) - g(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$. **Calculons** I $= \int_1^e [\ln x - f(x)]dx = \int_1^e \left[\frac{\ln x}{x^2}\right] dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{-1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - 2e^{-1}$.

4. **Branche infinie :** $\frac{g(x)}{x} = \frac{\ln x}{x}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$, comme $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont parabolique et évoluent simultanément alors $\mathcal{C}_g$ ou $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox). $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **en trait plein et $\mathcal{C}_g$ en trait pointé :**



Problème 67 :

1. Soit u définie par : $u(x) = x^2 - 4 + 2\ln x$.
a) Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.
b) Etudier le sens de variation de u.
c) Dresser le tableau de variation de u.
d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $1 < \alpha < 2$.
e) En déduire le signe de $u(x)$.
2. On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$.
a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. En déduire la position relative entre (d) et $\mathcal{C}_f$.
c) Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$. En déduire le sens de variation de f.
d) Dresser le tableau de variation de f.
e) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha+1)(\alpha-2)}{\alpha}$.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).
4. Calculer l'aire I du plan délimité par la droite (d), $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Correction :

1. $u(x) = x^2 - 4 + 2\ln x$.

a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x^2\left(1 - \frac{4}{x^2} + 2\frac{\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}[x^2 - 4 + 2\ln x] = -\infty$.

b) $\forall\, x > 0$, $u'(x) = 2x + \frac{2}{x} = 2\frac{x^2+1}{x} > 0$, donc, u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) **Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:**

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	⊠	$+$	
$u(x)$	⊠	$-\infty$ ↗	$+\infty$

d) La fonction u est continue et strictement croissante sur $]1; 2[$, donc elle réalise une bijection de $]1; 2[$ sur $]u(1)\,;\, u(2)[=]-3; 1{,}38[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $u(1)$ et $u(2)$, et que $u(1) \times u(2) < 0$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$.

e) **Signe de u sur $]0; +\infty[$:** $\forall\, x \in]0; \alpha[$, $u(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[$, $u(x) > 0$.

2. $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$.

a) $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}\left[x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right] = +\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0.

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right] = +\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. **Position relative :**

$f(x) - y = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 2\frac{1-\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = e$.

- Si $x \in]0; e[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (d).
- Si $x > e$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (d).
- Si $x = e$ alors le point A$(e; 1{,}71)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et (d).

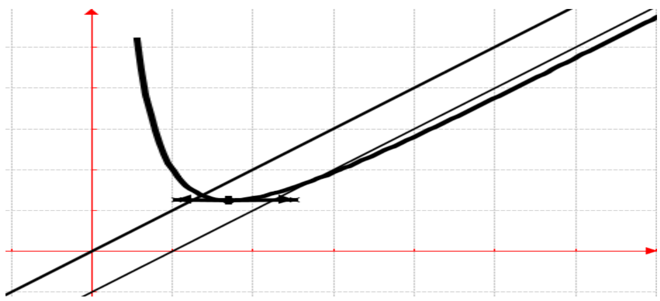
c) $\forall\, x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - 2\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-2-2+2\ln x}{x^2} = \frac{x^2-4+2\ln x}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$, donc f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ et f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$-$		$+$	
$f(x)$	⊠	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

e) $u(\alpha) = \alpha^2 - 4 + 2\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\ln\alpha = 4 - \alpha^2$ et $f(\alpha) = \alpha - 1 + \frac{2}{\alpha} - \frac{2\ln\alpha}{\alpha} = \alpha - 1 + \frac{2}{\alpha} - \frac{4-\alpha^2}{\alpha} = 2\alpha - 1 + \frac{2}{\alpha} - \frac{4}{\alpha} = \frac{2\alpha^2-\alpha-1}{\alpha} = \frac{(2\alpha+1)(\alpha-2)}{\alpha}$.

3. $\mathcal{C}_f$:



4. $f(x) - y = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$. **Calculons** $\mathrm{I} = \int_1^\alpha [f(x) - y]dx = \int_1^\alpha \left[\frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right]dx = [2\ln x - (\ln x)^2]_1^\alpha = 2\ln\alpha - (\ln\alpha)^2$.

Problème 68 :

1. **Soit u définie par :**

$u(x) = \begin{cases} x + 1 - x\ln x, si\ x > 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$.

a) **Après avoir déterminé l'ensemble des définitions de u, étudier la continuité et la dérivabilité de u en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Etudier la limite de u en $+\infty$. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_u$.**

c) **Etudier le sens de variation de u.**

d) **Dresser le tableau de variation de u.**

e) **Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $\alpha \in [3,5; 3,6]$.**

f) **En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction f définie par :**

$f(x) = \frac{\ln x}{x+1-\ln x}$ **et $f(0) = -1$.**

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.**

c) **Montrer que $\forall\ x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x(x+1-\ln x)^2}$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

e) **Montrer que $\forall\ \alpha \in [3,5; 3,6]$, $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.**

3. **Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une solution et une seule β et que l'on a : $1,5 < \beta < 2$. Donner encadrement d'amplitude 10^{-2} de β.**

4. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$**

Correction :

1. $u(x) = \begin{cases} x + 1 - x\ln x, si\ x > 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$.

a) $D_u = [0; +\infty[$. **Continuité de u en 0:**

$\lim_{x \mapsto 0} u(x) = \lim_{x \mapsto 0}[x + 1 - x\ln x] = 1$ et $u(0) = 1$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0: $\frac{u(x)-u(0)}{x-0} = 1 - \ln x$

$\lim_{x \mapsto 0} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = \lim_{x \mapsto 0}[1 - \ln x] = +\infty$; alors u n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(1 + \frac{1}{x} - \ln x\right)\right] = -\infty$

$\lim_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim_{x \mapsto +\infty}[-x\ln x] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_u$ en $+\infty$.

c) $\forall\ x > 0$, $u'(x) = -\ln x$, donc, u est strictement croissante sur $]0; 1]$ et u est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:**

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	⊠	+		−	
$u(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

e) La fonction u est continue et strictement décroissante sur $[3,5; 3,6]$, donc elle réalise une bijection de $[3,5; 3,6]$ sur $[u(3,6)\ ;\ u(3,5)] =]-0,0113; 0,115[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $u(3,6)$ et $u(3,5)$, et que $u(3,6) \times u(3,5) < 0$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[3,5; 3,6]$.

f) **Signe de u sur $]0; +\infty[$:** $\forall\ x \in]0; \alpha[$, $u(x) > 0$ et $\forall\ x \in]\alpha; +\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x+1-\ln x} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}-1}$ **et** $f(0) = -1$

a) $D_f = [0; +\infty[$. **Continuité de f en 0:**

$\lim_{x \mapsto 0} f(x) = \lim_{x \mapsto 0}\left[\frac{1}{\frac{x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}-1}\right] = -1$ et $f(0) = -1$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+1}{x^2+x-x\ln x}$

$\lim_{x \mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \mapsto 0}\left[\frac{x+1}{x^2+x-x\ln x}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{\ln x}+\frac{1}{\ln x}-1}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

c) $\forall\ x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x}{(x+1-\ln x)^2} = \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}-\ln x+\frac{\ln x}{x}}{(x+1-\ln x)^2} = \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1-\ln x)^2} = \frac{u(x)}{x(x+1-\ln x)^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	+		−	
$f(x)$	-1	↗	$f(\alpha)$	↘	0

e) $\forall\ \alpha \in [3,5; 3,6]$, $u(\alpha) = \alpha + 1 - \alpha\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 = \alpha\ln\alpha$

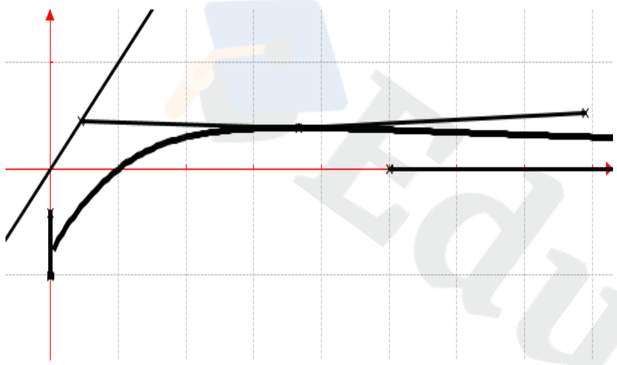
$\forall\, \alpha \in [3{,}5; 3{,}6]$, $f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{\alpha+1-\ln\alpha} = \frac{\ln\alpha}{\alpha\ln\alpha-\ln\alpha} = \frac{\ln\alpha}{\ln\alpha(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha-1}$.

3. La fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]1{,}5; 2[$, donc elle réalise une bijection de $]1{,}5; 2[$ sur $]f(1{,}5)\,;\ f(2)[=]0{,}193; 0{,}30[$. Le nombre un quart (1/4) est compris entre $f(1{,}5)$ et $f(2)$, et que $f(1{,}5)\times f(2) < \frac{1}{4}$ donc l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une solution unique β dans $]1{,}5; 2[$.

Encadrement d'amplitude 10^{-2} de β :

Avec une calculatrice : $f(1{,}72) = 0{,}249$ et $f(1{,}72) = 0{,}251$ or $f(1{,}72)\times f(1{,}72) < \frac{1}{4}$, donc $1{,}72 < \beta < 1{,}73$.

4. $\mathcal{C}_f$ **:**



Problème 69 : **On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de g ?**

2. **Etudier les limites de g sur D_g.**

3. **Etudier la fonction h, définie par $h(x) = 2 - \ln x$. En déduire le signe de $h(x)$.**

4. **Montrer que pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{h(x)\ln x}{x^2}$. En déduire le sens de variation de g.**

5. **Dresser le tableau de variation de g.**

6. **Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution, notée α, appartient à $]2; 3[$.**

7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.**

8. **A l'aide d'une intégration par parties ou par primitive, déterminer $\int_1^x g(t)dt$, avec $x > 1$.**

9. **On considère la suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 0$ et pour tout tout nombre entier naturel n non nul, par $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$.**

a) **Placer les points u_1 et u_2.**

b) **Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.**

c) **Montrer que la suite $(v_n)_{n>0}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et son 1^er^ terme.**

d) **Exprimer $S_{1,n} = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ en fonction de n.**

e) **Déterminer $\lim\limits_{n\mapsto-\infty} S_{1,n} =$.**

<u>Correction :</u> $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\left[\ln(\sqrt{x})^2\right]^2}{(\sqrt{x})^2} = 4\left[\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]^2$

1. $D_g = \{x / x \in \mathrm{IR}, x > 0\} =]0; +\infty[$.

2. Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = 0$ et comme $\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\mapsto 0} g(x) = +\infty$.

3. $h(x) = 2 - \ln x$, $\lim\limits_{x\mapsto 0} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x) = -\infty$. $\forall\, x > 0$, $h'(x) = \frac{-1}{x}$; alors h est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

On résout : $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2$.

$\forall\, x \in]0; e^2]$, $h(x) > 0$.

$\forall\, x \in]e^2; +\infty]$, $h(x) < 0$.

4. $\forall\, x > 0$, $g'(x) = \frac{2\frac{\ln x}{x}.x-(\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2} = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2} = \frac{h(x)\ln x}{x^2}$;

x	0		1		e^2		$+\infty$
$h(x)$		$+$		$+$		$-$	
$\ln x$		$-$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	

alors g est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $[e^2; +\infty[$ et g est croissante sur $[1; e^2]$.

5. **Dressons le tableau de variation de g.**

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$		$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$	$0{,}27$	$\searrow$	0

6. g est strictement croissante sur $]2; 3[$. Elle réalise donc une bijection de $]2; 3[$ sur $\left]\left[g(2) - \frac{1}{4}\right]; \left[g(3) - \frac{1}{4}\right]\right[=]-0{,}01; 0{,}15[$ Or $\left[g(2) - \frac{1}{4}\right]\times\left[g(3) - \frac{1}{4}\right] < 0$. Donc sur $]2; 3[$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $g(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution $\alpha \in]2; 3[$.

7. $\mathcal{C}_g$

8. $\int_1^x g(t)dt = \int_1^x \left[\frac{(\ln t)^2}{t}\right] dt = [(\ln t)^3]_1^x - 2\int_1^x \left[\frac{(\ln t)^2}{t}\right] dt = \frac{1}{3}[(\ln t)^3]_1^x = \frac{1}{3}(\ln x)^3$.

9. $u_n = n(\ln n)^2$ avec l'entier naturel $n > 0$.

a) $u_1 = 1(\ln 1)^2 = 0$ et $u_2 = 2(\ln 2)^2 = 0{,}96$.

b) **la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.**

$u_{n+1} - u_n = (n+1)[\ln(n+1)]^2 - n[\ln(n)]^2 = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\ln[n(n+1)] + [\ln(n+1)]^2$ or $1+\frac{1}{n} > 1 \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$; $n(n+1) > n \Leftrightarrow \ln[n(n+1)] > 0$ et le carré d'un nombre réel est toujours positif, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.

Problème 70 :

1. Soit u définie par :
$u(x) = -x^4 + 1 - 3\ln x$.

a) Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.

b) Etudier le sens de variation de u.

c) Dresser le tableau de variation de u. Calculer $u(1)$. En déduire le signe de $u(x)$.

2. On considère la fonction f définie par :
$f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x^3}$.

a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. En déduire la position relative entre (d) et $\mathcal{C}_f$.

d) Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^4}$. En déduire le sens de variation de f.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer l'aire I, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (d) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

4. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).

Correction :

1. $u(x) = -x^4 + 1 - 3\ln x = x^4\left(-1 + \frac{1}{x^4} - 3\frac{\ln x}{x^4}\right)$.

a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x^4\left(-1+\frac{1}{x^4} - 3\frac{\ln x}{x^4}\right)\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}[-x^4 + 1 - 3\ln x] = +\infty$.

b) $\forall\, x > 0, u'(x) = -4x^3 - \frac{3}{x} = -\frac{4x^4+3}{x} < 0$, donc, u est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

c) Tableau de variation de u sur $]0;+\infty[$:

x	0			$+\infty$
$u'(x)$	⊠		$-$	
$u(x)$	⊠	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$u(1) = 0$. **Signe de u sur $]0;+\infty[$:** $\forall\, x \in]0;1[$, $u(x) > 0$ et $\forall\, x \in]1;+\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x^3} = 3 - x\left(1 - \frac{\ln x}{x^4}\right)$.

a) $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}\left[3 - x + \frac{\ln x}{x^3}\right] = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0.

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[3 - x\left(1 - \frac{\ln x}{x^4}\right)\right] = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{\ln x}{x^3}\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = -x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. **Position relative :** posons $f(x) - y = \frac{\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Si $x \in]0;1[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (d).
- Si $x > 1$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (d).
- Si $x = 1$ alors le point A(1; 2) est commun à $\mathcal{C}_f$ et (d) .

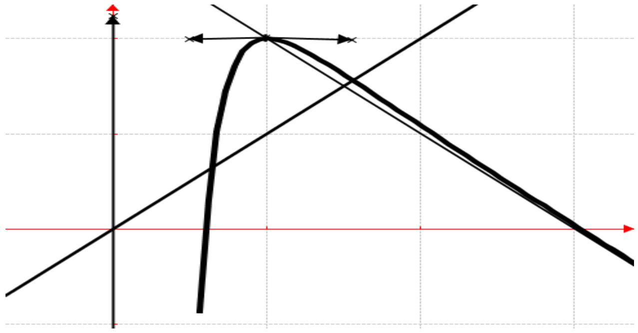
d) $\forall\, x > 0, f'(x) = -1 + \frac{x^2 - 3x^2\ln x}{x^6} = -1 + \frac{1 - 3\ln x}{x^4} = \frac{-x^4 + 1 - 3\ln x}{x^4} = \frac{u(x)}{x^4}$, donc f est strictement croissante sur $]0;1[$ et f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

e) Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$+$		$-$	
$f(x)$	⊠	$-\infty$ $\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. $f(x) - y = \frac{\ln x}{x^3}$. **Calculons** $\mathrm{I} = \int_1^e [f(x) -$ *ydx=1e*ln*xx3dx=12*−ln*xx21e*−*121e*−*1x3dx=12*−ln*xx2*−*12x21e=*−*3e*−*24+12.*

4. **$\mathcal{C}_f$ en trait plein :**



Problème 71 :

1. Soit u définie par :

$$u(x)=\begin{cases}1-x(\ln x)^2, \text{ si } x>0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}.$$

a) Après avoir déterminé l'ensemble des définitions de u, étudier la continuité et la dérivabilité de u en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Etudier la limite de u en $+\infty$.

c) Etudier le sens de variation de u.

d) Dresser le tableau de variation de u.

e) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $\alpha\in[2;2,3]$.

f) En déduire le signe de $u(x)$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x\ln x}.$$

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que $\forall\, x>0$, $f'(x)=\frac{u(x)}{x(1+x\ln x)^2}$. En déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que $\forall\, \alpha\in[2;2,3]$, $f(\alpha)=\frac{(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1}$.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$

Correction :

1. $u(x)=\begin{cases}1-x(\ln x)^2, \text{ si } x>0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}.$

a) $D_u=[0;+\infty[$. **Continuité de u en 0:**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[1-\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2\right]=1$ et $u(0)=1$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0: $\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=(\ln x)^2$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto 0}[(\ln x)^2]=+\infty$; alors u n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[1-x(\ln x)^2]=-\infty$

c) $\forall\, x>0$, $u'(x)=-\ln x\,(\ln x+2)$, donc, u est strictement décroissante sur $]0;e^{-2}]$ et sur $[1;+\infty[$ et u est strictement croissante sur $[e^{-2};1]$.

d) **Tableau de variation de u sur $]0;+\infty[$:**

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$u'(x)$	⊠ $-$	$+$	$-$	
$u(x)$	1 ↘	$0{,}46$ ↗	1 ↘	$-\infty$

e) La fonction u est continue et strictement décroissante sur $[2;2{,}3]$, donc elle réalise une bijection de $[2;2{,}3]$ sur $[u(2{,}3)\,;\,u(2)]=[-0{,}595;0{,}039]$. Le nombre zéro (0) est compris entre $u(2{,}3)$ et $u(2)$, et que $u(2)\times u(2{,}3)<0$ donc l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α dans $[2;2{,}3]$.

f) **Signe de u sur $]0;+\infty[$:** $\forall\, x\in]0;\alpha[$, $u(x)>0$ et $\forall\, x\in]\alpha;+\infty[$, $u(x)<0$.

2. $f(x)=\frac{\ln x}{1+x\ln x}=\frac{1}{\frac{1}{\ln x}+x}$, $D_f=[0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{\ln x}+x}\right]=\frac{1}{+\infty}=0$; la droite d'équation $y=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{1}{\frac{1}{\ln x}+x}\right]=\frac{1}{0^-}=-\infty$; la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0.

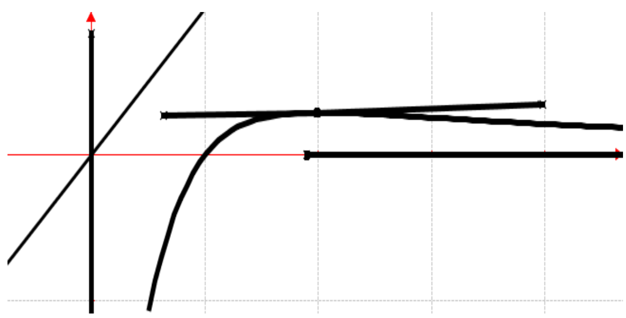
b) $\forall\, x>0$, $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)\ln x}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-\ln x-(\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{1-x(\ln x)^2}{x(x+1-\ln x)^2}=\frac{u(x)}{x(1+x\ln x)^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$ et f est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) **Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$:**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	⊠ $+$	$-$	
$f(x)$	⊠ $-\infty$ ↗	$f(\alpha)$ ↘	0

d) $\forall\, \alpha\in[2;2{,}3]$, $u(\alpha)=1-\alpha(\ln\alpha)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{(\ln\alpha)^2}$ et $\forall\, \alpha\in[2;2{,}3]$, $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha}{1+\alpha\ln\alpha}=\frac{\ln\alpha}{1+\frac{\ln\alpha}{(\ln\alpha)^2}}=\frac{\ln\alpha}{\frac{\ln\alpha+1}{\ln\alpha}}=\frac{(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1}$.

3. $\mathcal{C}_f$:



Problème 72 :

1. Soit u définie par :
$u(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.
a) Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.
b) Etudier le sens de variation de u.
c) Dresser le tableau de variation de u. Calculer $u(1)$. En déduire le signe de $u(x)$.
2. On considère la fonction f définie par :
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.
a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. En déduire la position relative entre (d) et $\mathcal{C}_f$.
d) Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$. En déduire le sens de variation de f.
e) Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β que l'on a : $\alpha < \beta$.
4. Déterminer l'aire I, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (d) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).

Correction :

1. $u(x) = -x^2 + 1 - \ln x = x^2\left(-1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x^2\left(-1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[-x^2 + 1 - \ln x] = +\infty$.

b) $\forall\, x > 0$, $u'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{2x^2+1}{x} < 0$, donc, u est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c) **Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:**

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	⊠	$-$	
$u(x)$	⊠ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$u(1) = 0$. **Signe de u sur $]0; +\infty[$:** $\forall\, x \in]0; 1[$, $u(x) > 0$ et $\forall\, x \in]1; +\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} = 1 + x\left(-\frac{1}{2} + \frac{\ln x}{2x^2}\right)$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}\right] = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[1 + x\left(-\frac{1}{2} + \frac{\ln x}{2x^2}\right)\right] = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{2x}\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. **Position relative :** posons $f(x) - y = \frac{\ln x}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Si $x \in]0; 1[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (d).
- Si $x > 1$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (d).
- Si $x = 1$ alors le point $A(1; 1/2)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et (d) .

d) $\forall\, x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{2x^2} = \frac{u(x)}{2x^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0; 1]$ et f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

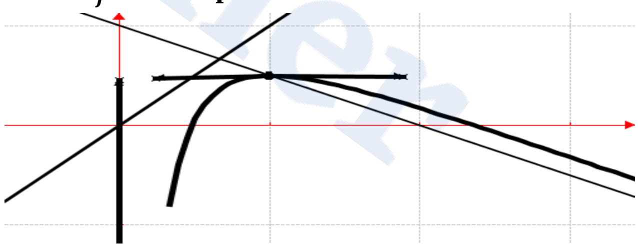
e) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$+$		$-$	
$f(x)$	⊠ $-\infty$	$\nearrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$-\infty$

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$ et est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0; 1]$ sur $]f(0) ; f(1)] =]-\infty; 0{,}5]$ et une autre de $[1; +\infty[$ sur $]f(+\infty) ; f(1)] =]-\infty; 0{,}5]$. Or $0 \in]-\infty; 0{,}5]$. donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β que l'on a : $\alpha < \beta$.

4. $f(x) - y = \frac{\ln x}{2x}$. **Calculons** $\mathrm{I} = \int_1^e [f(x) -$ ydx=1eln$x$2$x$dx=14ln$x$21e=14.

5. **$\mathcal{C}_f$ en trait plein :**



Problème 73 :

1. Etudier les variations et construire la représentation graphique de la fonction polynôme p définie par : $p(x) = 3x^3 - x - 2$.
Calculer $p(1)$. En déduire le signe de $p(x)$.
2. Soit u définie par :
$u(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.
a) Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.
b) Montrer que $\forall\, x > 0$, $u'(x) = \frac{p(x)}{x}$. En déduire le sens de variation de u.

c) Dresser le tableau de variation de u.

d) En déduire le signe de $u(x)$.

3. On considère la fonction f définie par :

$f(x) = x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2}$.

a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. En déduire la position relative entre (d) et $\mathcal{C}_f$.

d) Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$. En déduire le sens de variation de f.

e) Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer l'aire I, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (d) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (d).

Correction :

1. $p(x) = 3x^3 - x - 2$

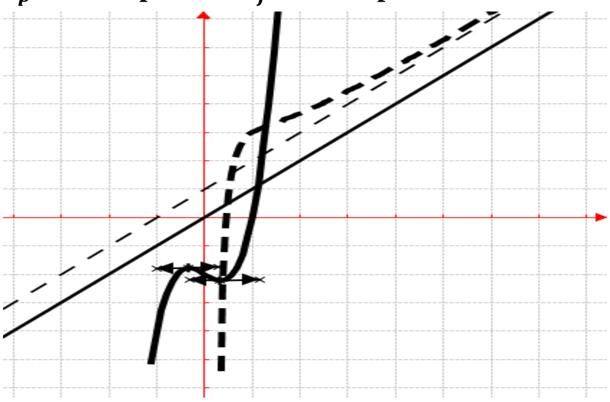
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} p(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[3x^3 - x - 2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} p(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[3x^3 - x - 2] = +\infty$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 9x^2 - 1 = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$p'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$p(x)$	$-\infty$ ↗ $-1{,}55$	↘ $-2{,}44$	↗ $+\infty$	

$\mathcal{C}_p$ en trait plein et $\mathcal{C}_f$ en trait pointé :



$p(1) = 0$. **Signe de p sur IR :** $\forall\, x \in]-\infty; 1]$, $p(x) < 0$ et $\forall\, x \in [1; +\infty[$, $p(x) > 0$.

2. $u(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x = x^3\left(1 - \frac{1}{x^2} +\right.$

1x3−2lnxx3.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - 2\frac{\ln x}{x^3}\right)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x^3 - x + 1 - 2\ln x] = +\infty$.

b) $\forall\, x > 0$, $u'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{p(x)}{x}$, donc, u est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et u est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

c) Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	‖ $-$	$+$	
$u(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$

d) signe de $u(x)$: comme le minimum 1 est positif, alors $\forall\, x > 0$, $u(x) > 0$.

3. $f(x) = x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2} = 1 + x\left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3}\right)$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2}\right] = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en 0.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[1 + x\left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3}\right)\right] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. **Position relative :** posons $f(x) - y = \frac{x+\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x + \ln x = 0$, appliquons le théorème des valeurs intermédiaire en considérant : $\forall\, x > 0$, $h(x) = x + \ln x$ et $h'(x) = \frac{x+1}{x} > 0$, alors la fonction h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]h(0)\,; h(+\infty)[=]-\infty; +\infty[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $h(0)$ et $h(+\infty)$, et que $h(+\infty) \times h(0) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $]0; +\infty[$. Ainsi $x_0 + \ln x_0 = 0$.

- Si $x \in]0; x_0[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (d).
- Si $x > x_0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (d).
- Si $x = x_0$ alors le point $A\left(x_0; h(x_0)\right)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et (d) .

d) $\forall\, x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2x(x+\ln x)}{x^4} = 1 + \frac{-x+1-2\ln x}{x^3} = \frac{x^3-x+1-2\ln x}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

e) Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

4. $f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

Calculons $\mathrm{I} = \int_1^e [f(x) - y]dx = \int_1^e \left[\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\right]dx = \left[\ln x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$.

5. **Voir fiche.**

Problème 74 :

1. **Soit u la fonction définie par $u(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$.**

a) **Montrer que u est une fonction paire. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Calculer $u'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction u sur $[0;\ +\infty[$.**

c) **Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\ \sqrt{e^2-1}\right]$, tel que $u(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale 10^{-2} près par défaut de α.**

d) **En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.**

2. **On considère la fonction h définie par**

$$\begin{cases} \forall\, x \neq 0 \quad h(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}. \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur IR. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Calculer les limites de h.**

c) **Montrer que $h(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ et en déduire le signe de $h(\alpha)$. En déduire un encadrement de $h(\alpha)$.**

d) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = \frac{u(x)}{x^2(x^2+1)}$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.**

3. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

Correction : **unité graphique 2 cm.**

1. $\boldsymbol{u(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}$.

a) $u(-x) = 2(-x)^2 - ((-x)^2+1)\ln((-x)^2+1) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1) = u(x)$ alors u est une fonction impaire. Par conséquent $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On peut l'étudier sur $[0;\ +\infty[$.

b) $\forall\, x \in [0;\ +\infty[\ u'(x) = 2x[1 - \ln(x^2+1)]$.

Posons $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \mp\sqrt{e-1}$

$u(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = -\infty$ $\quad \sqrt{e-1} = 1,31$

x	0	$\sqrt{e-1}$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$		$-$
$u(x)$	0 ↗	$0,718$	↘ $-\infty$

c) $\boldsymbol{u(\sqrt{e-1}) = 0,718}$ **et** $\boldsymbol{u(\sqrt{e^2-1}) = -1,96}$

u est continue et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{e-1};\ \sqrt{e^2-1}\right]$.

De plus $\begin{cases} u(\sqrt{e-1}) \times u(\sqrt{e^2-1}) < 0 \\ ou\ 0 \in]-1,96; 0,718[\end{cases}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, telle **que $u(\alpha) = 0$.**

l'approximation 10^{-2} près par défaut de α :

$u(1,99) = -2,30.10^{-2}$ et $u(1,98) = 6,84.10^{-4}$

$u(1,99) \times u(1,98) < 0$ donc α par défaut à 10^{-2} est $\alpha = 1,98$.

d) **En déduire le signe de $u(x)$ sur IR**

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$
$u(x)$	$-$	$+$		$-$

$\forall\, x \in]-\alpha;\ \alpha[$, $u(x) > 0$.

$\forall\, x \in]-\infty;\ -\alpha[\ \cup\ ]\alpha; +\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $\begin{cases} \forall\, x \neq 0 \quad h(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}. \\ h(0) = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \times x\right] = 0$ d'où h est continue sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right] = 0$ d'où h est dérivable sur IR

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-\frac{\ln(x^2)}{-x}\right] = \mathbf{0}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[2\frac{\ln(x)}{x}\right] = \mathbf{0}$.

c) $u(\alpha) = 2\alpha^2 - (\alpha^2+1)\ln(\alpha^2+1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2+1)} = \ln(\alpha^2+1)$.

Or $h(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha} = \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2+1)} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

$1,98 < \alpha < 1,99 \Leftrightarrow 3,96 < 2\alpha < 3,98$

$4,92 < \alpha^2 + 1 < 4,96 \ \Leftrightarrow 0,202 < \frac{1}{\alpha^2+1} < 0,203$

$0,79 < \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} < 0,80 \Leftrightarrow 0,79 < h(\alpha) < 0,80$.

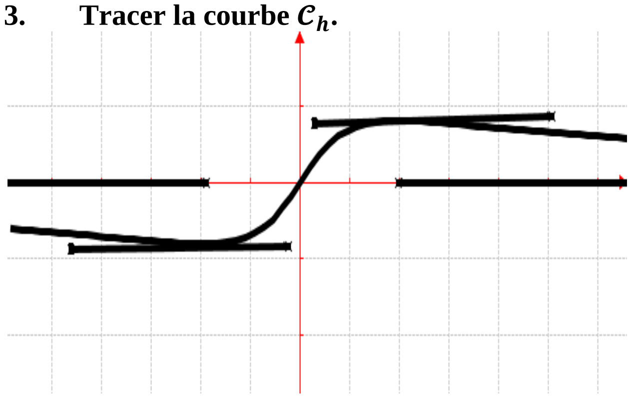
d) $\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = \dfrac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{u(x)}{x^2(x^2+1)}$.

$\forall\, x \in]-\alpha;\ \alpha[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-\alpha;\ \alpha[$.

$\forall\, x \in]-\infty;\ -\alpha[\ \cup\ ]\alpha; +\infty[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;\ -\alpha[$ et sur $]\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$		$-$
$h(x)$	0 ↘	$\frac{-2\alpha}{\alpha^2+1}$ ↗	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$	↘ 0

3. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**



Problème 75 : unité graphique 2 cm.

1. Soit u la fonction définie par $u(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

a) Calculer $u'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction u.

b) Calculer $u(0)$. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par $\alpha \in [-0,72;\ -0,71]$.

c) Donner le signe de $u(x)$, pour $x \in]-1;\ +\infty[$.

2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

a) Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptote à $\mathcal{C}_h$.

b) Montrer que $\forall\, x > -1, h'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que $h(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ et en déduire le signe de $h(\alpha)$. En déduire une valeur approchée de $h(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0{,}715$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

4. Soit λ est un réel strictement supérieur à 0.

On pose $\mathrm{I}(\lambda) = \int_1^\lambda h(x)dx$

a) Donner, suivant les valeurs de λ, une interprétation géométrique du réel $\mathrm{I}(\lambda)$.

b) En remarquant que, pour x appartenant à $]0;\ +\infty[$: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, calculer $\mathrm{I}(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathrm{I}(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathrm{I}(\lambda)$.

Correction : unité graphique 2 cm.

1. $u(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

a) $\forall\, x > -1, u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left[\frac{x}{x+1}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [1 - 2\ln(x)] = -\infty$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$		$-$
$u(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$0,386$	$\searrow$ $-\infty$

b) $u(0) = 0$; $u(-0{,}72) = -2{,}55.10^{-2}$ **et** $u(-0{,}71) = 2{,}74.10^{-2}$ **. or** $u(-0{,}72) \times u(-0{,}71) < 0$.

On remarque à partir du tableau de variation et de ces données ci-dessus. Donc l'équation $u(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α tel que $\alpha \in [-0{,}72;\ -0{,}71]$.

c) Donner le signe de $u(x)$, pour $x \in]-1;\ +\infty[$.

x	-1	α	0	$+\infty$
$u(x)$		$-$	$+$	$-$

$\forall\, x \in [\alpha;\ 0], u(x) \geq 0$

$\forall\, x \in]-1;\ \alpha] \cup [0; +\infty[, u'(x) \leq 0$.

2. $\forall\, x \in]-1;\ 0[\cup]0;\ +\infty[, h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \frac{-\infty}{1} = -\infty$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x^2}\right] = 0$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

b) $\forall\, x > -1, h'(x) = \frac{\frac{x^2}{x-1} - 2x\ln(x+1)}{x^4} = x\frac{\frac{x}{x-1} - 2\ln(x+1)}{x^4} = \frac{\frac{x}{x-1} - 2\ln(x+1)}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$

x	-1	α	0	$+\infty$
x^3		$-$	$-$	$+$
$u(x)$		$-$	$+$	$-$
$h'(x)$		$+$	$-$	$-$

$\forall\, x \in]-1;\ \alpha[, h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-1;\ \alpha[$.

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

dresser son tableau de variations.

x	-1	α	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$		$-$
$h(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$h(\alpha)$ $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 0

c) On sait que $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2\alpha+2} = \ln(\alpha+1)$ et que $h(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{2\alpha+2} \times \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$.

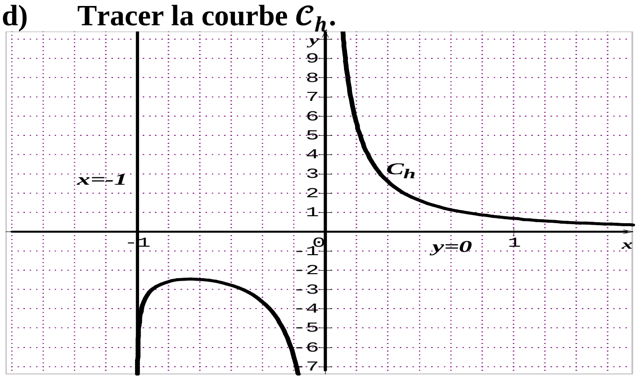
$-0{,}72 \leq \alpha \leq -0{,}71 \Leftrightarrow -1{,}44 \leq 2\alpha \leq -1{,}42$

$-0{,}72 \leq \alpha \leq -0{,}71 \Leftrightarrow 0{,}28 \leq \alpha + 1 \leq 0{,}29$

$-0{,}4 \leq 2\alpha(\alpha+1) \leq -0{,}41 \Leftrightarrow -2{,}5 \leq \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \leq -2{,}4$ donc $h(\alpha) < 0$.

En prenant $\alpha = -0{,}715$ alors $h(\alpha) = -2{,}453$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.



5. Soit $\lambda > 0$ on pose $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} h(x)dx$

a) $I(\lambda)$ est continue sur $[1; \lambda]$ avec $\lambda > 0$.

b) $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} h(x)dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^{\lambda} + \int_1^{\lambda} \frac{1}{x(x+1)}dx = \left[\ln x - \ln(x+1) - \frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^{\lambda}$

$I(\lambda) = \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^{\lambda}$

$I(\lambda) = \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) - \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} + 2\ln 2$

c) $\lim_{\lambda \mapsto +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \mapsto +\infty} \left[\ln(1) - \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} + 2\ln 2\right] = 2\ln 2$

et $\lim_{\lambda \mapsto 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \mapsto 0} \left[\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) - \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} + 2\ln 2\right] = -\infty$.

<u>Problème 76 :</u> unité graphique 1 $cm \times 4$ cm

1. Soit u la fonction définie par $u(x) = \ln x + x - 3$.

a) Etudier les variations de u.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$. Montrer que $2,20 \leq \alpha \leq 2,21$.

c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2. On considère la fonction h définie par : $h(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$

a) Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptote à $\mathcal{C}_h$.

b) Montrer que $h(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $h(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

c) Montrer que $\forall\, x > 0$ $h'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$. En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de h.

3. Soit $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction d'équation $y = \ln x - 2$.

a) Calculer la limite de $h(x) - (\ln x - 2)$ quand x tend vers l'infini. Que peut- on en déduire pour les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Etudier les positions relatives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_h$.

c) Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_h$. Étudier le signe de $h(x)$.

4. Soit λ est un réel tel que $\lambda \in]1; 6]$ et on note $d(x) = h(x) - (\ln x - 2)$.

a) Montrer que la fonction D définie sur $]0;\ e^2[$ par $D(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de d sur $]0;\ e^2[$.

b) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_h$; $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = \lambda$.

c) Calculer $\lim_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

<u>Correction :</u>

1. $u(x) = \ln x + x - 3$.

a) Etudier les variations de u.

$\forall\, x > 0$ $u'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0$ alors u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$\lim_{x \mapsto 0^+} u(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} [\ln x + x - 3] = -\infty$ et

$\lim_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} [\ln x + x - 3] = +\infty$

x	0	$+\infty$
$u'(x)$	||	$+$
$u(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

b) $u(2) = -0,306$ et $u(3) = 1,098$.

u est continue et strictement croissante sur$[2; 3]$. De plus $u(2) \times u(2) < 0$ ou $u(x) = 0 \in [-0,306; 1,098]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.

Montrer que $2,20 \leq \alpha \leq 2,21$.

$u(2,20) = -1,15.10^{-2}$ et $u(2,21) = 3.10^{-3}$

$u(2,20) \times u(2,21) < 0$ alors $2,20 \leq \alpha \leq 2,21$

c) $\forall\, x \in]0;\ \alpha]$, $u(x) \leq 0$ et $\forall\, x \in [\alpha; +\infty[$, $u(x) \geq 0$.

2. $h(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$

a) $\lim_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} \left[\left(-\frac{1}{x}\right)(\ln x)\right] = \frac{-1}{0^+}(-\infty) = +\infty$

alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} [(1)(\ln x)] = +\infty$ on calcule

$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \left[(1)\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = 0$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

b) On sait que $u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 3 - \alpha$ donc

$h(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(3 - \alpha - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1 - \alpha) = -\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(\alpha - 1) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

encadrement de $h(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

$2,20 \leq \alpha \leq 2,21 \Leftrightarrow -2,21 \leq -\alpha \leq -2,20$

$-2,21 \leq -\alpha \leq -2,20 \Leftrightarrow -0,4545 \leq \frac{-1}{\alpha} \leq -0,4524$

$2,20 \leq \alpha \leq 2,21 \Leftrightarrow 1,44 \leq (\alpha - 1)^2 \leq 1,46$

$-0,660 \leq -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \leq -0,654$ ou

$-0,660 \leq h(\alpha) \leq -0,654$.

$\alpha = -\frac{0,660+0,654}{2} = -0,65$ à 10^{-2}.

c) $\forall\, x > 0$ $h'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$ son signe dépend de $u(x)$.

$\forall\, x \in]0;\ \alpha[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]0;\ \alpha[$.

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Dresser le tableau de variation de h.

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$		$+$	
$h(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$	↗	$+\infty$

3. $\mathcal{P}\,/y = \ln x - 2.$

a) $h(x) - y = \left(1 - \frac{1}{x} - 1\right)(\ln x - 2) = \frac{2-\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} [h(x) - y] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = 0$ alors les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_h$ sont plus proche de façon les unes sur les autres à former une asymptote en $+\infty$.

b) $h(x) - y = \frac{2-\ln x}{x}$ son signe dépend de celui de $\ln x - 2$. Posons $\ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = e^2$

$\forall\, x \in]0;\ e^2[,\ h(x) - y = \frac{2-\ln x}{x} > 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au dessus de $\mathcal{P}$ sur $]0;\ e^2[$.

$\forall\, x \in]e^2; +\infty[,\ h(x) - y = \frac{2-\ln x}{x} < 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au dessous de $\mathcal{P}$ sur $]e^2; +\infty[$.

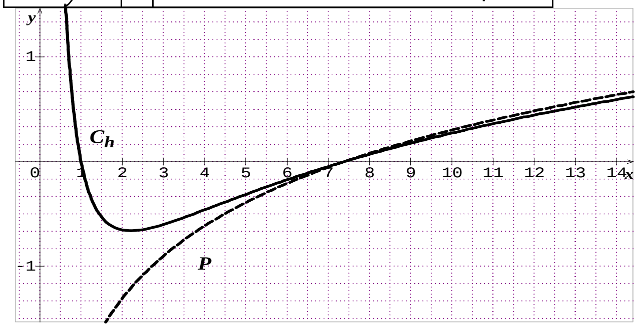
c) **Tracer $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_h$. Étudier le signe de $h(x)$.**

$\forall\, x > 0\ y' = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0$ alors y est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} y = \lim\limits_{x\mapsto 0^+}[\ln x - 2] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} y = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}[\ln x - 2] = +\infty$

x	0		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



$h(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in [1;\ e^2]\ \ h(x) \le 0 \\ \forall\, x \in]0;\ 1] \cup [e^2; +\infty[\ h(x) \ge 0 \end{cases}.$

3. **λ est un réel tel que $\lambda \in]1; 6]$ et on note**

$\forall\, x \in]0;\ e^2[\ \ \boldsymbol{d(x) = h(x) - (\ln x - 2)} = \frac{2-\ln x}{x}.$

a) $\forall\, x \in]0;\ e^2[\ \ \mathrm{D}'(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{2-\ln x}{x} = \boldsymbol{d(x)}$

alors la fonction D définie sur $]0;\ e^2[$ par $\mathrm{D}(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$est une primitive de d sur $]0;\ e^2[$.

b) $\mathrm{U} = \int_1^\lambda d(x)dx = [\mathrm{D}(x)]_1^\lambda = 2\ln\lambda - \frac{1}{2}(\ln\lambda)^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = 4\,\mathrm{U}\,cm^2 = 4\ln\lambda - 2(\ln\lambda)^2$

c) $\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty}\mathcal{A}(\lambda) = -\infty.$

Problème 77 :

1. **Soit u définie par : $u(x) = (\ln x + 1)^2$.**

a) **Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.**

b) **Dresser le tableau de variation de u.**

c) **En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction f définie par :**

$f(x) = x[1 + (\ln x)^2]$ et $f(0) = 0$.

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Déterminer la limite de f en $+\infty$.**

c) **Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = u(x)$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

3. **Donner une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point A, d'abscisse 1.**

4. **Déterminer l'aire I, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_1et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.**

5. **Etudier les branches infinies de f en $+\infty$.**

6. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et T_1.**

Correction :

1. $\boldsymbol{u(x)} = (\ln x + 1)^2.$

a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[(\ln x + 1)^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}[(\ln x + 1)^2] = (-\infty)^2 = +\infty.$

b) $\forall\, x > 0,\ u'(x) = 2\frac{\ln x+1}{x}$, donc, u est strictement décroissante sur $]0; e^{-1}]$ et u est strictement croissante sur $[e^{-1}; +\infty[$.

Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$u'(x)$	⊠	$-$		$+$	
$u(x)$	⊠	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

c) **signe de $u(x)$:** comme $u(e^{-1}) = 0$, alors $\forall\, x > 0,\ u(x) > 0.$

2. $\boldsymbol{f(x) = x[1 + (\ln x)^2] = x + \left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2}$ **et** $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

a) **Continuité de f en 0 :**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}\left[x + \left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2\right] = 0$ et $f(0) = 0$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + (\ln x)^2$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0}[1 + (\ln x)^2] = +\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x[1 + (\ln x)^2]] = +\infty$

c) $\forall\, x > 0,\ f'(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2\ln x = (\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = (\ln x + 1)^2 = u(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

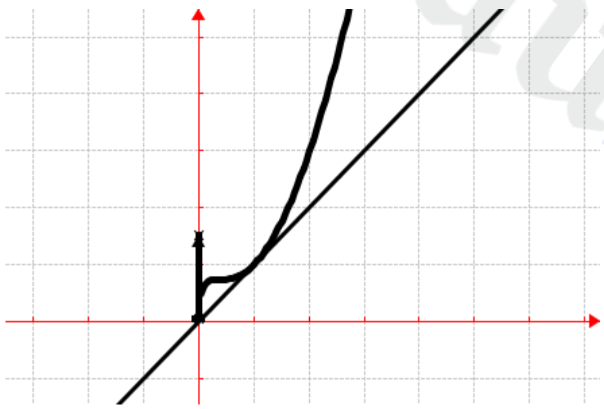
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. **T_1** : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x$

4. $f(x) - y = x(\ln x)^2$. **Calculons** $\mathrm{I} = \int_1^e [f(x) - y]dx = \int_1^e [x(\ln x)^2]dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e [x\ln x]dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

5. **Branches infinies en $+\infty$:** $\frac{f(x)}{x} = 1 + (\ln x)^2$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[1 + (\ln x)^2] = +\infty$; alors C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

6. **C_f en trait plein et T_1**



Problème 78 :

1. **Soit u définie par : $u(x) = x + 1 - x\ln x$.**

a) **Etudier les limites de u en $+\infty$ et .**

b) **Etudier le sens de variation de u.**

c) **Dresser le tableau de variation de u.**

d) **Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $3 < \alpha < 4$.**

e) **En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.**

a) **Etudier les limites de f en $+\infty$ et 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x(x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.**

c) **Dresser le tableau de variation de f.**

d) **Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.**

3. **Construire la courbe C_f.**

Correction :

1. $u(x) = x + 1 - x\ln x$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[1 + x(1 - \ln x)] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x + 1 - x\ln x] = 1$.

b) $\forall\, x > 0,\ u'(x) = -\ln x$, donc, u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) **Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:**

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	⊠	$+$		$-$	
$u(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$

d) La fonction u est continue et strictement croissante sur $]3; 4[$, donc elle réalise une bijection de $]3; 4[$ sur $]u(4)\ ;\ u(3)[=]-0{,}545; 0{,}70[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $u(4)$ et $u(3)$, et que $u(4) \times u(3) < 0$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]3; 4[$.

e) **Signe de u sur $]0; +\infty[$:** $\forall\, x \in]0; \alpha[,\ u(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[,\ u(x) < 0$.

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{\ln x}{x+1}\right] = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C_f en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right] = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

b) $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{u(x)}{x(x+1)^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

c) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

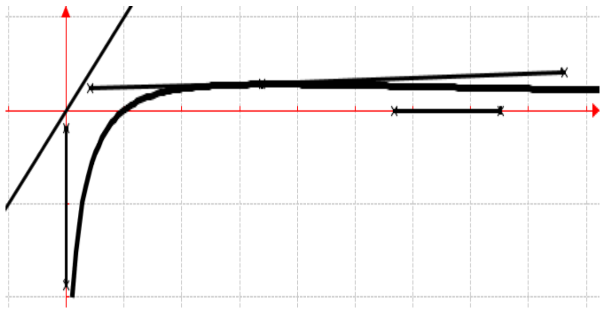
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	⊠	$+$		$-$	
$f(x)$	⊠	$-\infty$ $\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

d) $u(\alpha) = \alpha + 1 - \alpha\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 = \alpha\ln\alpha$ et $f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{\alpha+1} = \frac{\ln\alpha}{\alpha\ln\alpha} = \frac{1}{\alpha}$.

Encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} :

$3 < \alpha < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3}$ ou $0{,}25 < f(\alpha) < 0{,}33$

3. C_f:



l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1,7; 1,8[$.

e) Signe de u sur $]0; +\infty[$: $\forall\, x \in\,]0; \alpha[$, $u(x) > 0$ et $\forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{\ln x}{x+1}\right] = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C_f en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(x-1)(1-\ln x)] = -\infty$; $\frac{f(x)}{x} = \left(1-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)$, on déduit que

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right] = -\infty$, alors C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

b) $\forall\, x > 0$, $f'(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x}(x-1) = 1 - \ln x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \ln x = u(x)$, donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

c) Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	╳	$+$		$-$	
$f(x)$	╳	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

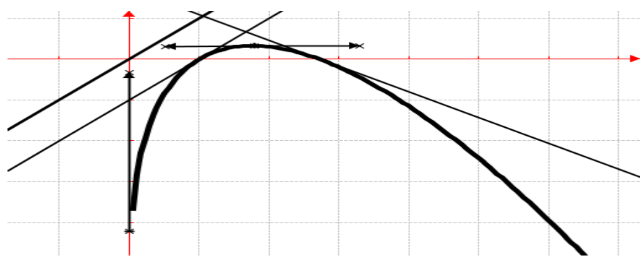
d) $u(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$ et $f(\alpha) = (\alpha-1)(1-\ln\alpha) = (\alpha-1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha-1)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. **Encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} :** $1,7 < \alpha < 1,8 \Leftrightarrow (0,7)^2 < (\alpha-1)^2 < (0,8)^2$ ou $0,49 < (\alpha-1)^2 < 0,64$ et $0,55 < \frac{1}{\alpha} < 0,58$, en multipliant membre à membre on aura : $0,49 \times 0,55 < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < 0,64 \times 0,58$ ou $0,27 < f(\alpha) < 0,37$.

3. $C_f \cap (Ox) \Leftrightarrow (x-1)(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$.

T_1 : Tangente au point d'abscisse $x = 1$:
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$

T_e : Tangente au point d'abscisse $x = e$:
$y = f'(e)(x-e) + f(e) = (e^{-1}-1)x - 1 + e$

4. C_f ; T_1 et T_e :



Problème 79 :

1. Soit u définie par : $u(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

a) Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.

b) Etudier le sens de variation de u.

c) Dresser le tableau de variation de u.

d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $1,7 < \alpha < 1,8$.

e) En déduire le signe de $u(x)$.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$.

a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = u(x)$. En déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

3. Donner les équations de la tangente, points d'intersections de C_f avec l'axe des abscisses.

4. Construire la courbe C_f et les tangentes.

Correction :

1. $u(x) = \frac{1}{x} - \ln x = \frac{1}{x}(1 - x\ln x)$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{x} - \ln x\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{1}{x}(1 - x\ln x)\right] = +\infty$.

b) $\forall\, x > 0$, $u'(x) = -\frac{x+1}{x^2} < 0$, donc, u est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c) Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	╳	$+$	
$u(x)$	╳	$+\infty$ ↘	$-\infty$

d) La fonction u est continue et strictement décroissante sur $]1,7; 1,8[$, donc elle réalise une bijection de $]1,7; 1,8[$ sur $]u(1,8)\,;\, u(1,7)[=]-0,032; 0,057[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $u(1,8)$ et $u(1,7)$, et que $u(1,8) \times u(1,7) < 0$ donc

Problème 80 :

1. **Soit u définie par :**

$$u(x)=\begin{cases}\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}, si\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ 0\ \ si\ \ x=0\end{cases}.$$

a) **Après avoir déterminé l'ensemble des définitions de u, étudier la continuité et la dérivabilité de u en 0. Interpréter graphiquement ces résultats.**

b) **Etudier la limite de u sur D_u.**

c) **Etudier le sens de variation de u.**

d) **Dresser le tableau de variation de u.**

e) **Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution et une seule α et que l'on a : $\alpha\in[2,7;3]$. En déduire la valeur exacte de α.**

f) **En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction f définie par :**
$f(x)=\frac{-x}{\ln x}$ **et $f(0)=0$.**

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Déterminer la limite de f sur D_f. Interpréter graphiquement ces résultats.**

c) **Montrer que $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=u(x)$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

e) **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$**

Correction :

1. $u(x)=\begin{cases}\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}, si\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ 0\ \ si\ \ x=0\end{cases}$

a) $D_u=[0;1[\cup]1;+\infty[$. **Continuité de u en 0:**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}\right]=\frac{1}{+\infty}=0$ et $u(0)=0$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0: $\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{u(x)-u(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{x\ln x}\right]=+\infty$; alors u n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}\right]=0$, posons $t=\ln x$, $x\mapsto 1$ alors $t\mapsto 0$.

$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} u(x)=\lim\limits_{t\mapsto 0^-}\left[\frac{1-t}{t^2}\right]=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} u(x)=\lim\limits_{t\mapsto 0^+}\left[\frac{1-t}{t^2}\right]=\frac{1}{(0^+)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

c) $\forall\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $u'(x)=\frac{\ln x-2}{x(\ln x)^3}=\frac{1}{x(\ln x)^2}\times\frac{\ln x-2}{\ln x}$, le signe de dépend de celui de $\frac{\ln x-2}{\ln x}$, donc, u est strictement croissante sur $]0;1[$et sur $[e^2;+\infty[$ et u est strictement décroissante sur $]1;e^2]$.

d) **Tableau de variation de u sur $]0;+\infty[$:**

x	0	1		e^2	$+\infty$
$u'(x)$	+	‖	−		+
$u(x)$	$0\nearrow+\infty$	‖	$+\infty\searrow$		$\nearrow\ 0$

e) On pouvait appliquer aussi le théorème des valeurs intermédiaires, mais la résolution de $u(x)=0$ semble simple et cohérente :

$u(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{(\ln x)^2}=\frac{1}{\ln x}\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow\alpha=e$

f) **Signe de u sur $]0;+\infty[$:** $\forall\ x\in]0;1[\cup]1;e]$, $u(x)>0$ et $\forall\ x\in[e;+\infty[$, $u(x)<0$.

2. $f(x)=\frac{-x}{\ln x}=\frac{-1}{\frac{\ln x}{x}}$ **et $f(0)=0$**

a) $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$. **Continuité de f en 0 :**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{-x}{\ln x}\right]=\frac{-1}{-\infty}=0$ et $f(0)=0$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-1}{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[\frac{-1}{x\ln x}\right]=\frac{-1}{0^+}=-\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{-1}{\frac{\ln x}{x}}\right]=\frac{-1}{0^+}=-\infty$; possibilité d'avoir une branche infinie : $\frac{f(x)}{x}=\frac{-1}{\ln x}$, alors

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{-1}{\ln x}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

$\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\left[\frac{-x}{\ln x}\right]=\frac{-1}{0^-}=+\infty$; la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ à gauche de 1.

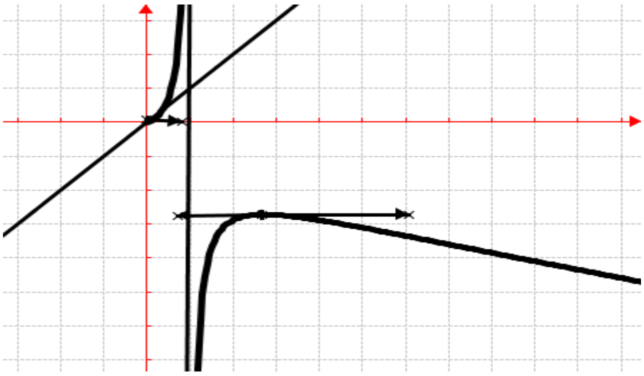
$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\left[\frac{-x}{\ln x}\right]=\frac{-1}{0^+}=-\infty$; la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ à droite de 1.

c) $\forall\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-\ln x+1}{(\ln x)^2}=\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}=u(x)$, donc f est strictement croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;e]$ et f est strictement décroissante sur $]e;+\infty[$.

d) **Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$:**

x	0		1		e	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$		$-$
$f(x)$	‖ $0 \nearrow +\infty$		‖	$+\infty \nearrow$		$\searrow -\infty$

e) $\mathcal{C}_f$ **:**



Problème 81 :

1. **Soit u définie par :**

$$u(x) = \begin{cases} x - (x+1)\ln(x+1), \; si \; x > -1 \\ -1 \; si \; x = -1 \end{cases}.$$

a) **Après avoir déterminé l'ensemble des définitions de u, étudier la continuité et la dérivabilité de u en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Etudier la limite de u en $+\infty$.**

c) **Etudier le sens de variation de u.**

d) **Dresser le tableau de variation de u.**

e) **En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction f définie par :**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, \; si \; x \in]-1;0[\, \cup \,]0;+\infty[\\ 1 \quad si \; x = 0 \end{cases}.$$

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.**

c) **Montrer que $\forall \, x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2(x+1)}$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

e) **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$**

Correction :

1. $u(x) = \begin{cases} x - (x+1)\ln(x+1), si \; x > -1 \\ -1 \; si \; x = -1 \end{cases}$.

a) $D_u = [-1;+\infty[$. **Continuité de u en -1:** posons $t = x+1 \Leftrightarrow x = t-1$

$\lim\limits_{x \mapsto -1} u(x) = \lim\limits_{t \mapsto 0}[t - 1 - t\ln t] = -1$ et $u(-1) = -1$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en -1: $\frac{u(x)-u(-1)}{x+1} = (\ln x)^2$

$\lim\limits_{x \mapsto -1} \frac{u(x)-u(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1}[1 - \ln(x+1)] = +\infty$; alors u n'est pas dérivable en -1, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(x+1)\right)\right] = -\infty$

c) $\forall \, x > 0$, $u'(x) = -\ln(x+1)$, donc, u est strictement croissante sur $]-1;0]$ et u est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

d) **Tableau de variation de u sur $]0;+\infty[$:**

x	-1		0		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$+$		$-$	
$u(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

e) **Signe de u sur $]-1;+\infty[$:** comme le maximum est 0, ainsi $\forall \, x \in]-1;+\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, si \; x \in]-1;0[\, \cup \,]0;+\infty[\\ 1 \quad si \; x = 0 \end{cases}$,

$D_f =]-1;+\infty[$.

a) **Continuité de f en 0 :**

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 1$ et $u(1) = 1$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\right] = -\frac{1}{2}$; alors f nest dérivable en 0.

b) Posons $t = x+1 \Leftrightarrow x = t-1$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln t}{t-1}\right] = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln t}{t} \times \frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right] = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

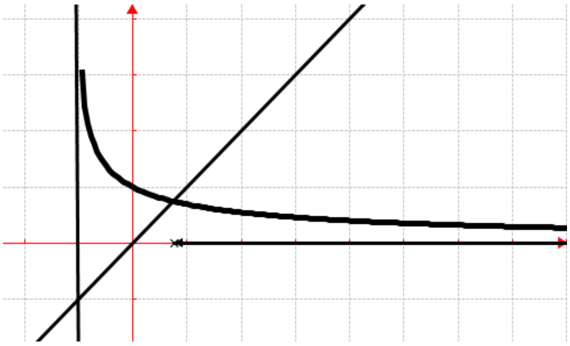
c) $\lim\limits_{x \mapsto -1} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = +\infty$; la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en -1.

d) $\forall \, x \in \cup\,]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{u(x)}{x^2(x+1)}$, donc f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$.

e) **Tableau de variation de f sur $]-1;+\infty[$:**

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

f) $\mathcal{C}_f$ **:**



Problème 82 :

1. **Soit u définie par :** $u(x) = \begin{cases} x - x\ln x, si\ x > 0 \\ 0\ \ si\ \ x = 0 \end{cases}$.

a) Après avoir déterminé l'ensemble des définitions de u, étudier la continuité et la dérivabilité de u en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Etudier la limite de u en $+\infty$. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_u$.

c) Etudier le sens de variation de u.

d) Dresser le tableau de variation de u.

e) Résoudre dans IR, $u(x) = 0$.

f) En déduire le signe de $u(x)$.

2. **On considère la fonction f définie par :** $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ **et $f(0) = -1$.**

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Montrer que $\forall\ x > 0$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x(x-\ln x)^2}$. En déduire le sens de variation de f.

d) Dresser le tableau de variation de f.

3. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$**

Correction :

1. $u(x) = \begin{cases} x - x\ln x, si\ x > 0 \\ 0\ \ si\ \ x = 0 \end{cases}$.

a) $D_u = [0; +\infty[$. **Continuité de u en 0:**

$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x - x\ln x] = 0$ et $u(0) = 0$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0: $\frac{u(x)-u(0)}{x-0} = 1 - \ln x$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0}[1 - \ln x] = +\infty$; alors u n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x(1 - \ln x)] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[-x\ln x] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_u$ en $+\infty$.

c) $\forall\ x > 0$, $u'(x) = -\ln x$, donc, u est strictement croissante sur $]0; 1]$ et u est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de u sur $]0; +\infty[$:**

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$	$\boxtimes$	+		−	
$u(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

e) $u(x) = x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$, donc $S_{IR} = \{e\}$.

f) **Signe de u sur $]0; +\infty[$:** $\forall\ x \in\ ]0; e[$, $u(x) > 0$ et $\forall\ x \in\ ]e; +\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$ **et** $f(0) = -1$

a) $D_f = [0; +\infty[$. **Continuité de f en 0:**

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}\right] = -1$ et $f(0) = -1$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+1}{x^2 - x\ln x}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{x+1}{x^2 - x\ln x}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

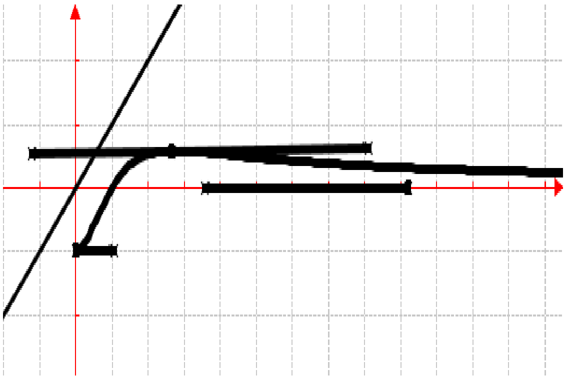
b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

c) $\forall\ x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x}{(x1 - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - x\ln x}{x(x - \ln x)^2} = \frac{u(x)}{x(x - \ln x)^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0; e[$ et f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$.

d) **Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:**

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\boxtimes$	+		−	
$f(x)$	−1	↗	0,58	↘	0

3. $\mathcal{C}_f$:



Problème 83 :

1. **Soit u définie par :**
$u(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1.$
a) **Etudier les limites de u en $+\infty$ et 0.**
b) **Dresser le tableau de variation de u.**
c) **En déduire le signe de $u(x)$.**
2. **On considère la fonction f définie par :**
$f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$ **si** $x > 0$ **et** $f(0) = 0$.
a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**
b) **Déterminer la limite de f en $+\infty$.**
c) **Montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) = u(x)$. En déduire le sens de variation de f.**
d) **Dresser le tableau de variation de f.**
3. **Donner une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point A, d'abscisse 1.**
4. **Etudier les branches infinies de f en $+\infty$.**
5. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et T_1.**

Correction :

1. $u(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1.$
$u(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1$

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1\right] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1} - 1\right] = +\infty.$

b) $\forall\, x > 0$, $u'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-x^2-2x-1+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$, donc, u est strictement décroissante sur $]0;+\infty]$.

Tableau de variation de u sur $]0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	$\boxtimes$	$-$	
$u(x)$	$\boxtimes$ $+\infty$	$\searrow$	0

c) **signe de $u(x)$:** $\forall\, x > 0$, $u(x) > 0$.
2. $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$ **si** $x > 0$ **et** $f(0) = 0$.

a) **Continuité de f en 0 :**
$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x\ln(x+1) - x\ln x] = 0$ et $f(0) = 0$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, on a :
$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$; alors f n'est pas dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$

c) $\forall\, x > 0$, $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x} = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1 = u(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

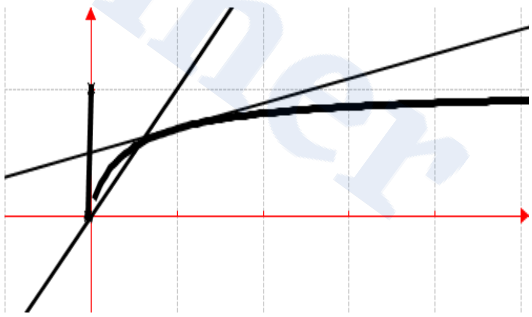
d) **Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$:**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\boxtimes$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. $T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}$

4. **Branches infinies en $+\infty$:** $\frac{f(x)}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$,
on calcule $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = 0$; alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

5. **$\mathcal{C}_f$ en trait plein et T_1**



Problème 84 :

1. **Etudier les variations et construire la représentation graphique de la fonction polynôme p définie par : $p(x) = x^2 - 6x + 5$.**
2. **On considère la fonction g définie par :**
$$g(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5$$
a) **En déduire le tableau de variation de g.**
b) **Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.**
3.
a) **Calculer les dérivées de g', g'' de g.**

b) Quelle est la valeur x_0 de x pour laquelle $g''(x_0) = 0$?

c) Soit le point M d'abscisse de x_0, tracer la tangente à cet point.

4. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{\ln x}{x^2+x}$.

et f définie par : $f(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$.

a) Calculer la dérivée f' et f''.

b) Étudier le sens de variation de f'.

c) En déduire le sens de variation de f.

d) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

e) Démontrer qu'il existe un et un seul nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$ tel que $\alpha \in]1,8; 1,9[$ et justifier que 1,83 est une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} par défaut.

f) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

g) Vérifier que $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$.

h) Étudier les variation de h.

i) Donner la tangente T au point d'abscisse 1.

j) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T.

<u>Correction :</u>

1. $p(x) = x^2 - 6x + 5$; $D_p = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, p(x)' = 2x - 6 = 2(x-3)$.

$\forall\, x \in]-\infty; 3], p(x)' < 0$; p est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$.

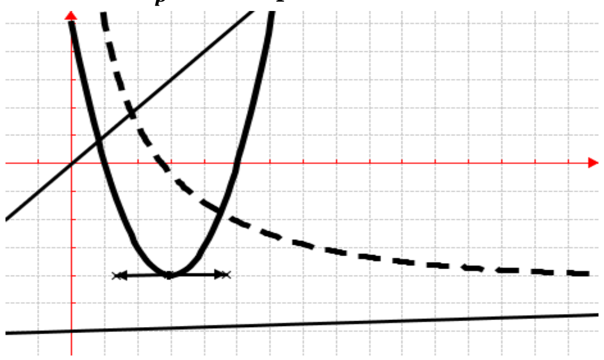
$\forall\, x \in [3; +\infty[, p(x)' > 0$; p est strictement croissante sur $[3; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}(x^2 - 6x + 5) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}(x^2 - 6x + 5) = +\infty$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$p(x)'$		$-$		$+$	
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Construction de $\mathcal{C}_p$: $\frac{p(x)}{x} = x - 6 + \frac{5}{x}$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\frac{p(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[x - 6 + \frac{5}{x}\right] = \pm\infty$, donc $\mathcal{C}_p$ admet une branche parabolique à l'infinie de direction axe des ordonnées. **$\mathcal{C}_p$ en trait plein**



2.

a) Déduisons le tableau de variation de g.

$D_g =]0; +\infty[$.

x	0			e^3		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		$+$	
$g(x)$		$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\mathcal{C}_g$: voir figure ci-dessus en trait pointé

3.

a) Calculons les dérivées de g', g'' de g :

$\forall\, x \in]0; +\infty[, g'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{6}{x}$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, g''(x) = \frac{2(4-\ln x)}{x^2}$.

b) $\forall\, x \in]0; +\infty[, g(x)'' = \frac{2(4-\ln x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = e^4$

c) $T_M: y = 2xe^{-4} - 6$.

4. $h(x) = \frac{\ln x}{x^2+x} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ et $f(x) = x + 1 - (2x+1)\ln x$.

a) Calculer la dérivée f' et f''.

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{-x-2x\ln x - 1}{x}$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f''(x) = \frac{1-2x}{x^2}$.

b) f' est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ et f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

c) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}613 < 0$, $\forall\, x \in]0; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

d) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x + 1 - (2x+1)\ln x] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x + 1 - (2x+1)\ln x] = -\infty$.

e) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]1{,}8; 1{,}9[$, donc elle réalise une bijection de $]1{,}8; 1{,}9[$ sur $]f(1{,}9)\,;\ f(1{,}8)[=]-0{,}18; 0{,}096[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $f(1{,}9)$ et $f(1{,}8)$, et que $f(1{,}9) \times f(1{,}8) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1{,}8; 1{,}9[$. $f(1{,}83) \times f(1{,}8) < 0$ donc 1,83 est une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} par défaut.

f) Signe de f sur $]0; +\infty[$: $\forall\, x \in]0; \alpha], f(x) > 0$ et $\forall\, x \in [\alpha; +\infty[, f(x) < 0$.

g) On sait $f(\alpha) = \alpha + 1 - (2\alpha+1)\ln\alpha \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, alors $h(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha} = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha^2+\alpha} = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$.

h) $\forall\, x \in]0; +\infty[, h'(x) = \frac{x+1-(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{f(x)}{(x^2+x)^2}$, donc f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ et f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

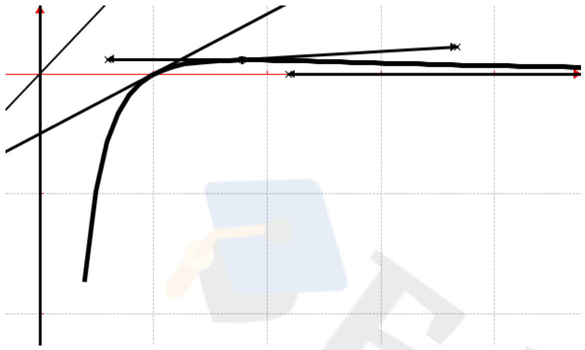
$\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right] = 0.$

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$	
$h(x)$		$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$	$\searrow$	0

i) $T_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$

j) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T.



Problème 85 :

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$

a) Etudier le sens de variation de f.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en 0.

c) Donner le tableau de variation de f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$

a) Déterminer la fonction dérivée de g. Déduire de la question 1., le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$.

b) Vérifier que $g = h0k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $k(x) = \frac{1}{x}$. En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.

c) Donner le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$.

3. Soit un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $\mathcal{A}(\alpha)$l'aire du domaine « ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $1 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$ ».

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

b) Déterminer la limite $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.

Correction :

1. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$

a) $\forall\, x > 0 f'(x) = \frac{-1}{x} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] = +\infty$

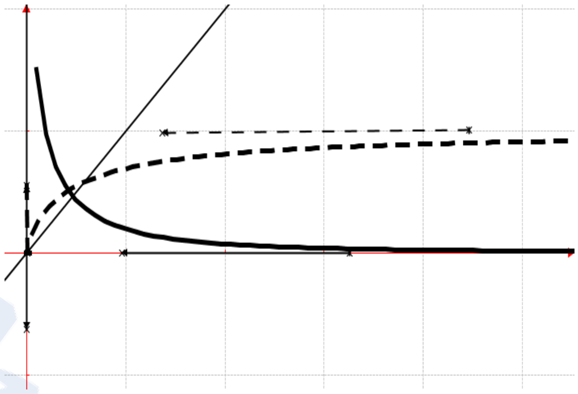
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] = 0$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$+\infty$ $\searrow$	0

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f(x) > 0.$

d) $\mathcal{C}_f$ en trait plein et $\mathcal{C}_g$ en trait pointé :



2. $g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\ln(x+1) - x\ln(x).$

a) $\forall\, x \in]0; +\infty[, g'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x} \times \frac{1}{x+1} = f(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b) $g = h0k \Leftrightarrow g(x) = h[k(x)] = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$, posons $t = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} g(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{t}\ln(1+t)\right] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{t \mapsto 0} \left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1.$

c)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

3. est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)dx = [g(x)]_1^\alpha = \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \ln(2).$

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 1 - \ln(2).$

4. **$\mathcal{C}_g$ en trait pointé : voir figure.**

Problème 86 :

1. Soit le polynôme tel que $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$
Vérifier que $p(x) = (x-1)(3x^2 + x + 1)$ puis étudier le signe de $p(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. Soit $g(x) = x^3 - x^2 + 1 - \ln x$. Etudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

3. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x + 3$.

a) Etudier les limites de f en zéro et en l'infini.

b) Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]1,5;1,6[$ une solution unique α ; déterminer la valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

4. Soit $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$.

a) Calculer la limite de $f(x) - (\frac{1}{2}x^2 - x + 3)$ quand x tend vers l'infini. Que peut- on en déduire pour les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_f$.

b) Etudier les positions relatives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_f$.

c) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1

d) Tracer , T et $\mathcal{C}_f$.

5.

a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto 2\frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{P}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

Correction :

1. $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$;
$p(x) = (x-1)(3x^2 + x + 1) = 3x^3 + x^2 + x - 3x^2 - x - 1 = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Comme $p(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} p(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[3x^3 - 2x^2 - 1] = +\infty$. $\forall\, x \in]0;1]$, $p(x) < 0$ et $\forall\, x \in [1;+\infty[$, $p(x) > 0$.

2. $g(x) = x^3 - x^2 + 1 - \ln x = x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \right.$ $\ln xx3+1$.

$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x} = \frac{p(x)}{x}$, donc g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Or $g(1) = 1$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^3}\right) + 1\right] = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x^3 - x^2 + 1 - \ln x] = +\infty$. Comme $g(1) = 1$ donc $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

3. $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x + 3$.

a) Etudier les limites de f en zéro et en l'infini.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^3}\right) + 3\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 - x + 3\right] = -\infty$

b) $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,3;0,4[$, donc elle réalise une bijection de $]0,3;0,4[$ sur $]f(0,3);\, f(0,4)[=]-1,27;0,39[$. Le nombre zéro (0) est compris entre $f(0,3)$ et $f(0,4)$, et que $f(0,3) \times f(0,4) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,3;0,4[$ et $\alpha = 0,39$.

4. $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$
$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $y' = x - 1$.

x	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	3 $\nearrow$	$+\infty$

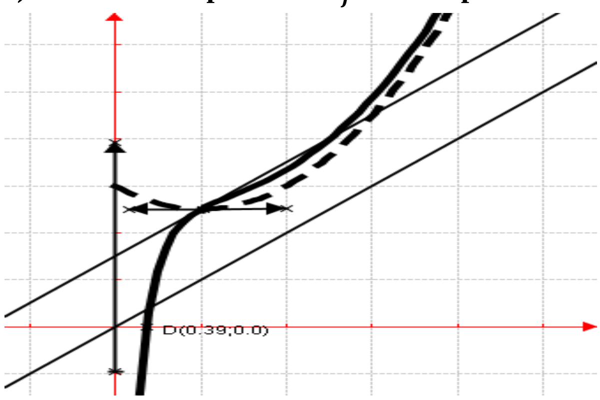
a) $f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 3\right) = \frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$ donc $\mathcal{P}$ est une courbe « asymptote oblique » à $\mathcal{C}_f$.

b) $\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow x = 1$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{P}$ sur $]0;1]$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ sur $[1;+\infty[$.

c) $T_1 : y = x + \frac{3}{2}$.

d) **$\mathcal{P}$ en trait pointé et $\mathcal{C}_f$ en trait plein et T**



5.

a) La primitive de la fonction $x \mapsto 2\frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est $(\ln x)^2$ sur $]0;+\infty[$.

b) $\int_1^3 [f(x)-y]dx = \int_1^3 \left[\frac{\ln x}{x}\right] dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{2\ln x}{x}\right] dx = \frac{1}{2}[(\ln x)^2]_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$.

<u>Problème 87 :</u> Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

1. **Dresser le tableau de variation de f_1.**
2. **Déterminer une équation de la tangente T_1 en $x = 1$, à la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$.**
3. **Dresser le tableau de variation de f_2.**
4. **Que peut- on en déduire pour $\mathcal{C}_{f_2}$.**
5. **Etudier le signe de $f_2(x) - f_1(x)$; en déduire la position relative de $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$.**
6. **Tracer $\mathcal{C}_{f_1}$; $\mathcal{C}_{f_2}$ et T_1.**
7. **n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$.**

a) On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. calculer $F'(x)$, en déduire I_1.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

c) Calculer I_2 puis l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

d) Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$.

e) En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1;e]$, démontrer que, pour tout n entier naturel non nul : $0 \le I_n \le 1$.

f) En déduire $\lim_{+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$.

<u>Correction :</u> $\forall n > 0 \,/\, f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

$\forall x > 0,\ f'_n(x) = \frac{(\ln x)^{n-1}(n-2\ln x)}{x^3}$.

1. **Dresser le tableau de variation de f_1.**

$\forall x > 0,\ f'_1(x) = \frac{(1-2\ln x)}{x^3}$.

$\lim_{x\mapsto 0} f_1(x) = \lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{(\ln x)^1}{x^2}\right] = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ et

$\lim_{x\mapsto +\infty} f_1(x) = \lim_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{(\ln x)^1}{x^2}\right] = 0$.

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f'_1(x)$	‖	$+$		$-$	
$f_1(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

2. $T_1 : y = x - 1$.

3. **Dresser le tableau de variation de f_2.**

$\forall x > 0,\ f'_2(x) = \frac{\ln x(2-2\ln x)}{x^3}$.

$\lim_{x\mapsto 0} f_2(x) = \lim_{x\mapsto 0}\left[\frac{(\ln x)^2}{x^2}\right] = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ et

$\lim_{x\mapsto +\infty} f_2(x) = \lim_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x^2}\right] = 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'_2(x)$	‖	$-$		$+$		$-$	
$f_2(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

4. $\mathcal{C}_{f_2}$ est une asymptote parabolique à $\mathcal{C}_{f_1}$.

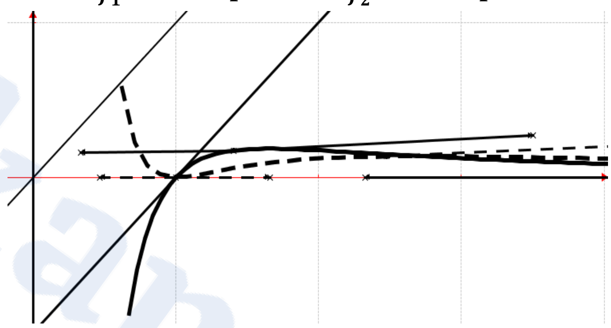
5. $f_2(x) - f_1(x) = \frac{(\ln x)^2 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x(\ln x - 1)}{x^2} \Leftrightarrow$ $x = 1$ et $x = e$; $\forall x \in [1;e],\ f_2(x) - f_1(x) \le 0$ et $\forall x \in]0;1] \cup [e;+\infty[,\ f_2(x) - f_1(x) \ge 0$.

La position relative de $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$:

$\forall x \in [1;e],\ f_2(x) - f_1(x) \le 0$, $\mathcal{C}_{f_2}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_{f_1}$ sur $[1;e]$.

$\forall x \in]0;1] \cup [e;+\infty[,\ f_2(x) - f_1(x) \ge 0$, $\mathcal{C}_{f_2}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{f_1}$ sur $]0;1]$ et sur $[e;+\infty[$.

6. **$\mathcal{C}_{f_1}$ en trait plein et $\mathcal{C}_{f_2}$ en trait pointé :**



7. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

a) $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. calculer $F'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$, en déduire $I_1 = \int_1^e f_1(x)dx = -\int_1^e \frac{-\ln x}{x^2}dx = -\left[\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e}$.

b) $I_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x)dx = \int_1^e \left[\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\right]dx = \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \left[\frac{(\ln x)^n}{x^2}\right]dx = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

c) Calculer $I_2 = I_{1+1} = -\frac{1}{e} + (1+1)I_1 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = \frac{-3}{e}$ puis l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$: $I_1 - I_2 = \frac{2}{e}$.

d) $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$.

- Pour $n = 1$ alors $\frac{1}{1!}I_1 = 1 - \frac{1}{e} + 1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{-1}{e}$

- Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{n!}\mathrm{I}_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ est vraie montrons que $\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{I}_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right)$
$\frac{1}{(n+1)!}\mathrm{I}_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right)$
- $\frac{1}{n!}\mathrm{I}_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

e) $1 \le \ln x \le e \Leftrightarrow 1 \le (\ln x)^n \le e^n \Leftrightarrow \frac{1}{e^{2e}} \le \frac{(\ln x)^n}{x^2} \le e^{n-2} \Leftrightarrow \int_1^e \left(\frac{1}{e^{2e}}\right) dx \le \int_1^e \left[\frac{(\ln x)^n}{x^2}\right] dx \le \int_1^e [e^{n-2}] dx \Leftrightarrow \left[\frac{x}{e^{2e}}\right]_1^e \le \mathrm{I}_n \le [xe^{n-2}]_1^e \Leftrightarrow 0 \le \mathrm{I}_n \le 1.$

f) $0 \le \mathrm{I}_n \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{n!}\mathrm{I}_n \le \frac{1}{n!} \Leftrightarrow 0 \le 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \le \frac{1}{n!} \Leftrightarrow 0 \le 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \le \frac{1}{n!} \Leftrightarrow e - \frac{e}{n!} \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le e$, selon le théorème de gendarme, on a : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[e - \frac{e}{n!}\right] = e$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[e] = e$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = e$.

Problème 88 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$.

a) Etudier la fonction de f_n.

b) Montrer que, quelque soit le nombre entier naturel non nul n, $\mathcal{C}_{f_n}$ passe par un même point A, dont on précisera les coordonnées. Donner une équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_{f_n}$ au point A.

c) Montrer qu'il existe un point E_n de $\mathcal{C}_{f_n}$ tel que la tangente en E_n à $\mathcal{C}_{f_n}$ soit parallèle à $(\mathrm{O}\vec{\imath})$.

d) Trouver les coordonnées de E_n. Soit Γ l'ensemble des points E_n lorque n décrit $\mathbb{N}^*$. Caractériser analytiquement Γ.

2. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f_3(x) = \frac{\ln x}{x^3}$

3. Soit p un nombre entier naturel non nul. On considère la fonction g_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g_p(x) = x^{\frac{1}{p}} \ln x$.

a) Etudier la fonction de g_p. Représenter graphiquement la fonction $g_1(x) = x \ln x$.

b) Montrer que, quelque soit le nombre entier naturel non nul p, $\mathcal{C}_{g_n}$ passe par un même point B, dont on précisera les coordonnées. Donner une équation de la tangente T_p à $\mathcal{C}_{g_n}$ au point B.

c) Montrer qu'il existe un point E_p de $\mathcal{C}_{g_n}$ tel que la tangente en E_p à $\mathcal{C}_{g_n}$ soit parallèle à $(\mathrm{O}\vec{\imath})$.

4. On désigne par $(u_p\,;\,v_p)$ le couple de coordonnées de E_p.

a) Montrer que la suite (u) de terme général p est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Que peut- on dire de la suite (v) de terme général v_p ?

Correction :

1. $n \in \mathbb{N}^*, / f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$.

a) Etudier la fonction de f_n.

$\forall\, x > 0,\ f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}} = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$, alors f_n est strictement croissante sur $\left]0; e^{1/n}\right]$ et f_n est strictement décroissante sur $\left[e^{1/n}; +\infty\right[$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{\ln x}{x^n}\right] = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{x^n}\right] = 0$

x	0		$e^{1/n}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$		$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

b) $f_2(x) = f_1(x) = \frac{\ln x}{x^1} = \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow x = 1$

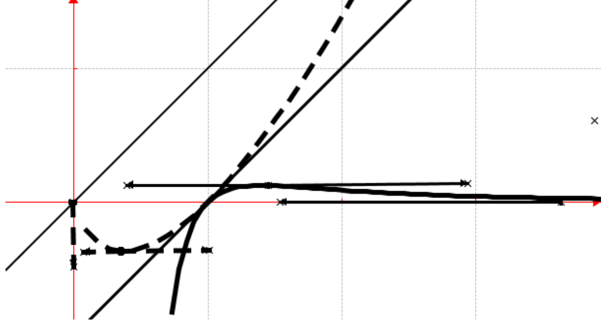
$\frac{\ln x}{x^n} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donc $\mathrm{A}(1; 0)$, la tangente T_n : $y = x - 1$.

c) $f'_n(x) = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/n}$, il existe un point E_n de $\mathcal{C}_{f_n}$ qui est son maximum tel que la tangente en $\mathrm{E}_n\left(e^{1/n}; \frac{1}{ne}\right)$ à $\mathcal{C}_{f_n}$ soit parallèle à $(\mathrm{O}\vec{\imath})$.

d) $\mathrm{E}_n\left(e^{1/n}; \frac{1}{ne}\right)$; $\Gamma\ y = \frac{1}{xe}$.

2. **$\mathcal{C}_{f_3}$ en trait plein et $\mathcal{C}_{g_1}$ en trait pointé :**

x	0		$e^{1/3}$		$+\infty$
$f'_3(x)$		$+$		$-$	
$f_3(x)$		$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	0



3. $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}^*/\ g_p(x) = x^{\frac{1}{p}} \ln x}$.

a) **Etudier la fonction de $\boldsymbol{g_p}$.**

$\forall\, x > 0,\ g'_p(x) = x^{\frac{1}{p}-1}\left(\frac{\ln x}{p} + 1\right) = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}(\ln x + p)$, alors g_p est strictement décroissante sur $]0; e^{-p}]$ et g_p est strictement croissante sur $[e^{-p}; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} g_p(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[x^{\frac{1}{p}} \ln x\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g_p(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x^{\frac{1}{p}} \ln x\right] = +\infty$

x	0	e^{-p}	$+\infty$
$g_p(x)$	$-$		$+$
$g_p(x)$	$0 \searrow$	$\frac{-p}{e}$	$\nearrow +\infty$

b) $x^{\frac{1}{p}} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, donc B$(1; 0)$, la tangente $\mathrm{T}_p : y = x - 1$.

c) $g'_p(x) = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}(\ln x + p) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-p}$, il existe un point E_p de $\mathcal{C}_{g_p}$ qui est son maximum tel que la tangente en $\mathrm{E}_p\left(e^{-p}; \frac{-p}{e}\right)$ à $\mathcal{C}_{g_p}$ soit parallèle à $(O\vec{\imath})$.

4. $(u_p\,; v_p) = \left(e^{-p}; \frac{-p}{e}\right)$.

a) $u_p = e^{-p} \Leftrightarrow u_{p+1} = e^{-p-1} = e^{-1} \times e^{-p} = e^{-1}u_p$, donc la suite (u) de terme général u_p est une suite géométrique de raison $q = e^{-1}$.

b) $v_p = \frac{-p}{e} \Leftrightarrow v_{p+1} = \frac{-p-1}{e} = \frac{-1}{e} + \frac{-p}{e} = v_p - \frac{1}{e}$, donc la suite (v) de terme général v_p est une suite arithmétique de raison $r = \frac{-1}{e}$.

<u>**Problème 89 :**</u> **On considère $\boldsymbol{f_m}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\boldsymbol{f_m(x) = \ln(|x^2 - 2mx + 3|)}$ avec $\boldsymbol{m}$ décrit $\mathbb{R}$**

1. **Soit $\boldsymbol{f_1(x) = \ln(|x^2 - 2x + 3|)}$**

a) **Etudier la fonction $\boldsymbol{f_1}$.**

b) **Montrer que la droite d'équation $\boldsymbol{x = 1}$ est un axe de symétrie de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_1}}$.**

c) **Construire de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_1}}$.**

2. **Soit $\boldsymbol{f_2(x) = \ln(|x^2 - 4x + 3|)}$**

a) **Construire de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_2}}$.**

b) **Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel strictement supérieur à $\boldsymbol{-4}$. Calculer $\boldsymbol{\mathrm{I} = \int_4^5 \ln(x+\alpha)\,dx}$. En déduire la valeur de $\boldsymbol{\mathrm{I}_2 = \int_4^5 f_2(x)\,dx}$.**

3. **Etude des fonctions $\boldsymbol{f_m}$, $\boldsymbol{m}$ décrivant $\mathbb{R}$.**

a) **Déterminer l'ensemble des nombres réels $\boldsymbol{m}$ tels que $\boldsymbol{f_m}$ soit définie en tout point de $\mathbb{R}$.**

b) **Montrer que la représentative $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_m}}$ de $\boldsymbol{f_m}$ admet la droite d'équation $\boldsymbol{x = m}$ comme axe de symétrie.**

c) **Montrer que toutes les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_m}}$ ont un point commun A. Trouver les coordonnées de A.**

<u>**Correction :**</u>

1. $\boldsymbol{f_1(x) = \ln(|x^2 - 2x + 3|) = \ln(x^2 - 2x + 3}$, car en posant ***x2−2x+3=0, Δ=−8<0.***

a) **Etudions la fonction $\boldsymbol{f_1}$:** $\mathcal{D}_{f_1} =]-\infty; +\infty[$

$\forall\, x \in\ ]-\infty; +\infty[,\ f_1'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3} = \frac{2(x-1)}{x^2-2x+3}$.

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 1],\ f_1'(x) < 0$, et $f_1'(1) = 0$, donc f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

$\forall\, x \in [1; +\infty[,\ f_1'(x) > 0$, et $f_1'(1) = 0$, donc f_1 est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$		$+$
$f_1(x)$	$+\infty \searrow$	$\ln 2$	$\nearrow +\infty$

b) $f_1(2-x) = \ln[(2-x)^2 - 2(2-x) + 3]$

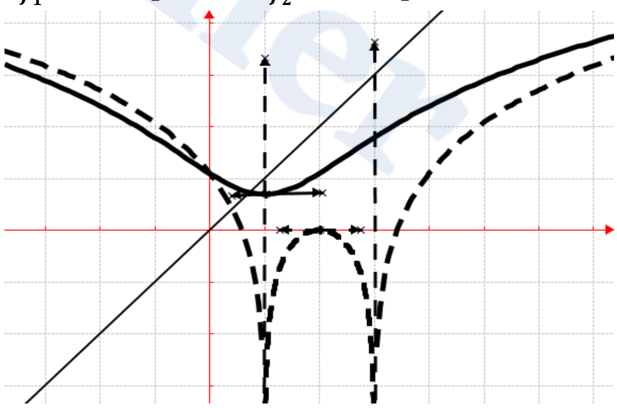
$f_1(2-x) = \ln(x^2 - 2x + 3) = f_1(x)$. D'où la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_{f_1}$.

c) **Construction de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_1}}$:**

Branches infinies : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$; alors $\mathcal{C}_{f_1}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$; alors $\mathcal{C}_{f_2}$ admet une branche parabolique de direction (Ox') en $-\infty$.

$\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_1}}$ en trait plein et $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_2}}$ en trait pointé :



2. $\boldsymbol{f_2(x) = \ln(|x^2 - 4x + 3|)}$

$\forall\, x \neq \{1; 3\},\ f_2'(x) = \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}$

a) **Construction de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_2}}$:**

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 1[\, \cup\,]3; +\infty[,\ f_2(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$

$\forall\, x \in\ ]1; 3[,\ f_2(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

Etudions les variations de $\boldsymbol{f_2}$:

- $\forall\, x \in\ ]-\infty; 1[\, \cup\,]3; +\infty[,\ f_2'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2-2x+3}$.

$\forall\, x \in\,]-\infty; 1[$, $f_2'(x) < 0$, f_2 est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.
$\forall\, x \in\,]3; +\infty[$, $f_2'(x) > 0$, f_2 est strictement croissante sur $]3; +\infty[$.

- $\forall\, x \in\,]1; 3[$, $f_2'(x) = \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}$.

$\forall\, x \in\,]1; 2[$, $f_2'(x) > 0$, f_2 est strictement croissante sur $]1; 2[$.
$\forall\, x \in\,]2; 3[$, $f_2'(x) < 0$, f_2 est strictement décroissante sur $]2; 3[$.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$	‖	$+$ | $-$	‖	$+$
$f_2(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Branches infinies :
Asymptotes verticales : $x = 1$ et $x = 3$.

- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 0$; alors $\mathcal{C}_{f_2}$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 0$; alors $\mathcal{C}_{f_2}$ admet une branche parabolique de direction (Ox') en $-\infty$.

Construction de $\mathcal{C}_{f_2}$ en trait pointé: Voir figure.

b) $\boldsymbol{\alpha > -4}$**, calculons** $\mathbf{I} = \int_4^5 \ln(x+\alpha)\,dx$ **:**

$I = \int_4^5 \ln(x+\alpha)\,dx = [x\ln(x+\alpha)]_4^5 - \int_4^5 \frac{x}{x+\alpha}dx = [x\ln(x+\alpha)]_4^5 - \int_4^5 \left(1 - \frac{\alpha}{x+\alpha}\right)dx = [x\ln(x+\alpha)]_4^5 - [x - \alpha\ln(x+\alpha)]_4^5 = [(x+\alpha)\ln(x+\alpha) - x]_4^5 = (5+\alpha)\ln(5+\alpha) - (4+\alpha)\ln(4+\alpha) - 1.$

Déduction de la valeur :

$I_2 = \int_4^5 [\ln(x^2 - 4x + 3)]\,dx = \int_4^5 \ln[(x-1)(x-3dx=$

$I_2 = \int_4^5 \ln(x-1)dx + \int_4^5 \ln(x-3)dx =$
$(5-1)\ln(5-1) - (4-1)\ln(4-1) - 1 +$
$(5-3)\ln(5-3) - (4-3)\ln(4-3) - 1$, d'où
$I_2 = 10\ln(2) - 3\ln(3) - 2 = \ln\left(\frac{2^{10}}{3^3}\right) - 2.$

3. $\boldsymbol{f_m(x) = \ln(|x^2 - 2mx + 3|) = \ln(x^2 - 2mx + 3)}$**, car en posant** $\boldsymbol{x^2 - 2mx + 3 = 0}$**,** $\boldsymbol{\Delta = 4(m^2 - 3)}$**.**

a) Déterminons l'ensemble des nombres réels m tels que f_m soit définie en tout point de $\mathbb{R}$:
$\Delta = 4(m^2 - 3) \leq 0$, $m \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

b) $f_m(x) = \ln(|x^2 - 2mx + 3|) =$
$f_m(2-x) = \ln[(2-x)^2 - 2m(2-x) + 3]$
$f_m(2-x) = \ln(x^2 - 2mx + 3) = f_m(x)$. D'où la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_{f_m}$.

c) $f_{1/2}(x) = f_1(x) = \ln(|x^2 - 2x + 3|) = \ln(|x^2 - x + 3|) \Leftrightarrow x = 0$; donc $\mathrm{A}(0; \ln 3)$.

<u>Problème 90 :</u> Pour tout m réel, on considère la fonction h_m définie par :

$$\begin{cases} h_m(x) = \frac{\ln(x)-m}{(\ln x)^2} \text{ si } x \in\,]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[\\ h_m(0) = 0 \end{cases}$$

1.
a) Quel est l'ensemble de définition de h_m ?
b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h_m sur D_{h_m}. Interpréter graphiquement ces résultats..
2.
d) Etudier les limites de h_m sur D_{h_m}suivant les valeurs de m ($m \neq$; $m = 0$).
e) Montrer que $\forall\, x \in\,]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$, $h_m'(x) = \frac{-\ln(x)+2m}{x(\ln x)^3}$. En déduire le sens de variation de h_m suivant les valeurs de m ($m < 0$; $m = 0$; $m > 0$).
f) Dresser le tableau de variation de h_m sur D_h.
g) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_{h_1}$ au point d'abscisse $x = e$.
3. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_{h_{m+1}}$ par rapport à $\mathcal{C}_{h_m}$ suivant les valeurs de $m \neq 0$.
4. On considère f définie sur $]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Montrer que f est une primitive de h_1 sur $]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$.
5. Soit Ψ l'application $]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ et définie par $\Psi(x) = h_0(x)$. Comment faut-il choisir pour que Ψ soit une bijection ?
6. Tracer $\mathcal{C}_{h_{-1}}$; $\mathcal{C}_{h_0}$ et $\mathcal{C}_{h_1}$.
7. Expliciter la fonction réciproque h_m^{-1} si $m < 0$ sur $]1; +\infty[$.

<u>Correction :</u>

$$\begin{cases} h_m(x) = \frac{\ln(x)-m}{(\ln x)^2} \text{ si } x \in\,]0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[\\ h_m(0) = 0 \end{cases}$$

1.
a) $\mathrm{D}_{h_m} = [0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$.
b) Continuité de h_m sur $\mathrm{D}_{h_m} = [0; 1[\, \cup\,]1; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{m}{(\ln x)^2}\right] = 0$ et $h_m(0) = 0$
alors h_m est continue en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto 1} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1} \left[\frac{1}{\ln(x)} - \frac{m}{(\ln x)^2}\right] = 0$.

Donc h_m est continue sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
Dérivabilité de h_m sur D_{h_m}

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{h_m(x)-h_m(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{\ln(x)-m}{x(\ln x)^2}\right] = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ alors h_m n'est pas dérivable en 0. Donc $\mathcal{C}_{h_m}$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

Donc h_m est dérivable sur $]0;1[$ et sur $]0;+\infty[$.

2.

a) Limites de h sur $\mathrm{D}_{h_m} = [0;1[\cup]1;+\infty[$:

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\ln(x)-m}{(\ln x)^2}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{\ln(x)}\right] = 0.$

- **Si $m \neq 0$**

$\lim\limits_{x \mapsto 1} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1} \left[\frac{\ln(1)-m}{1(\ln 1)^2}\right] = \frac{-m}{0^+} = \begin{cases} +\infty \ si \ m < 0 \\ -\infty \ si \ m > 0 \end{cases}$

- **Si $m = 0$**, alors $h_0(x) = \frac{\ln(x)-0}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln(x)}$

$\lim\limits_{x \mapsto 1} h_0(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1} \left[\frac{1}{\ln(x)}\right] = \begin{cases} -\infty \ si \ x < 1 \\ +\infty \ si \ x > 1. \end{cases}$

b) Sens de variation de h sur D_{h_m}:

$\forall\, x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$h'_m(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^3 - \frac{2\ln x}{x}[\ln(x)-m]}{(\ln x)^4} = \frac{\ln(x)-2\ln(x)+2m}{x(\ln x)^3} = \frac{-\ln(x)+2m}{x(\ln x)^3}$. Posons $h'_m(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x) + 2m = 0 \Leftrightarrow x = e^{2m}$ ou $(\ln x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ avec $x > 0$.

1^er cas $m < 0$ alors $e^{2m} < 1$

x	0		e^{2m}		1		$+\infty$
$(\ln x)^3$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$2m-\ln(x)$	‖	$+$		$-$	‖	$-$	
$h'_m(x)$	‖	$-$		$+$	‖	$-$	

$\forall\, x \in]0;e^{2m}] \cup]1;+\infty[$, $h'_m(x) < 0$, alors h_m est strictement décroissante sur $]0;e^{2m}]$ et sur $]1;+\infty[$.

$\forall\, x \in [e^{2m};1[$, $h'_m(x) > 0$, alors h_m est strictement croissante sur $[e^{2m};1[$.

2^er cas $m = 0$ alors $h'_0(x) = \frac{-\ln(x)}{x(\ln x)^3} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$h'_0(x)$	‖	$-$	‖	$-$	

$\forall\, x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $h'_0(x) < 0$, alors h_0 est strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

3^er cas $m > 0$ alors $e^{2m} > 1$

x	0		1		e^{2m}		$+\infty$
$(\ln x)^3$	‖	$-$	‖	$+$		$+$	
$2m-\ln(x)$	‖	$+$	‖	$+$		$-$	
$h'_m(x)$	‖	$-$	‖	$+$		$-$	

$\forall\, x \in]0;1[\cup[e^{2m};+\infty[$, $h'_m(x) < 0$, alors h_m est strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $[e^{2m};+\infty[$.

$\forall\, x \in]1;\ e^{2m}]$, $h'_m(x) > 0$, alors h_m est strictement croissante sur $]1;\ e^{2m}]$.

c) Dresser le tableau de variation de h_m sur D_h

$\boldsymbol{h_m(e^{2m}) = \frac{1}{4m}}$.

1^er cas $m < 0$ alors $e^{2m} < 1$

x	0		e^{2m}		1		$+\infty$
$h'_m(x)$	‖	$-$		$+$	‖	$-$	
$h_m(x)$	‖	$+\infty \searrow$	$\frac{1}{4m}$	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0

2^er cas $m = 0$ alors $h'_0(x) = \frac{-\ln(x)}{x(\ln x)^3} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$

x	0		1		$+\infty$
$h'_0(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$h_0(x)$	‖	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0

3^er cas $m > 0$ alors $e^{2m} > 1$

x	0		1		e^{2m}		$+\infty$
$h'_m(x)$	‖	$-$	‖	$+$		$-$	
$h_m(x)$	‖	$0 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{4m}$	$\searrow$	0

d) équation de la tangente T à $\mathcal{C}_{h_1}$ au point d'abscisse $x = e$: T $y = h'_1(x)(x-e) + h_1(e)$

$$\boldsymbol{y = e^{-1}x - 1}$$

3. $\boldsymbol{h_{m+1}(x) = \frac{\ln(x)-m-1}{(\ln x)^2}}$ **; $\boldsymbol{m \neq 0}$**

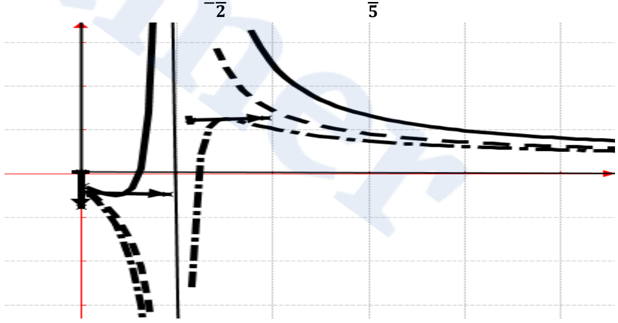
$h_{m+1}(x) - h_m(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} < 0$ alors $\mathcal{C}_{h_{m+1}}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_{h_m}$ sur $[0;1[$ et sur $]0;+\infty[$.

4. $\forall\, x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$,

$\forall\, x \in]\mathbf{0};\mathbf{1}[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2} = h_1(x)$, alors f est une primitive de h_1 sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

5. Ψ est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$ et sur $]\mathbf{1};+\infty[$. Elle réalise deux bijections, une de $]0;1[$ sur $]-\infty;0[$ et l'autre de $]\mathbf{1};+\infty[$ **sur $]\mathbf{0};+\infty[$. Mais on remarque que $\boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{1};+\infty[$.**

6. Tracer $\mathcal{C}_{h_{-\frac{1}{2}}}$; $\mathcal{C}_{h_0}$ et $\mathcal{C}_{h_{\frac{1}{5}}}$.



7. Fonction réciproque $\boldsymbol{h_m^{-1}}$: $\boldsymbol{h_m^{-1}}$ est continue et strictement décroissante sur $]\mathbf{1};+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]\mathbf{1};+\infty[$ **sur $]\mathbf{0};+\infty[$.**

$\boldsymbol{h_m(x) = y \Leftrightarrow y(\ln x)^2 - \ln(x) + m = 0}$, on pose $\boldsymbol{\ln(x) = t}$ avec $\boldsymbol{y}$ est paramètre.

$\boldsymbol{yt^2 - t + m = 0}$, $\boldsymbol{\Delta = 1 - 4ym}$

$$\begin{cases} t' = \frac{1-\sqrt{1-4ym}}{2y} \\ t'' = \frac{1+\sqrt{1-4ym}}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = e^{\frac{1-\sqrt{1-4ym}}{2y}} \\ x'' = e^{\frac{1+\sqrt{1-4ym}}{2y}} \end{cases}.$$

$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\boldsymbol{h_{m+1}(x) = e^{\frac{1+\sqrt{1-4xm}}{2x}}}$.

Problème 91 :

1. **On considère la fonction définie par : .**

a) **Etudier la fonction .**

b) **Montrer que, quel soit le nombre entier naturel non nul , passe par un même point , dont on précisera les coordonnées.**

c) **Donner une équation de la tangente à au point .**

2. **Soit . En déduire le tableau de variations de la fonction .**

3. **On considère la fonction définie sur par : .**

a) **Calculer les limites de en 0 et en .**

b) **Vérifier que : pour tout de , .**

c) **Etudier le sens de variation de .**

d) **Dresser le tableau de variation de .**

4. **On considère la fonction définie sur par : .**

a) **Etudier le signe de suivant les valeurs de .**

b) **En déduire les positions relatives des courbes.**

5. **Construire les courbes et .**

Correction :

1. .

a) **Etudier la fonction .**

, , alors est strictement croissante sur et est strictement décroissante sur .

et

b) ; donc .

c) la tangente au point A :

2. **. Déduction du tableau de variations de la fonction .**

3. .

a) et

b) ,

c) est croissante sur et est strictement décroissante sur et sur .

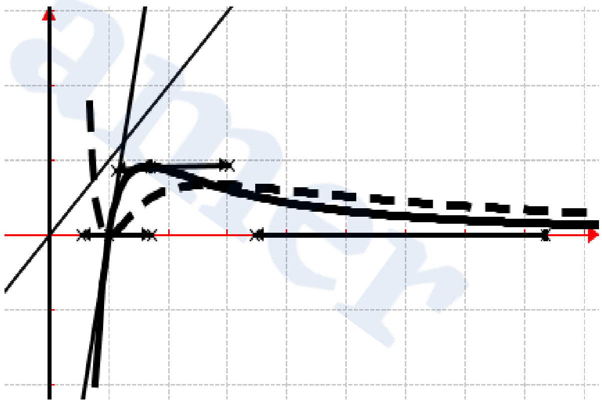
d) **le tableau de variation de .**

4. .

a) Etudier le signe de suivant les valeurs de .

b) Sur , , est au-dessus de sur . Et , , est au-dessous de sur et sur .

5. **en trait plein et en trait pointé :**



Problème 92 : **A et B sont indépendants.**

A. **Soit , on considère la fonction définie par : .**

1. **Quel est l'ensemble de définition de ?**

2. **Etudier les limites de .**

3. **Montrer que . En déduire le sens de variation de suivant la parité de .**

4. **Dresser les tableaux de variations de suivant la parité de .**

B. Soit h_m définie par :
$h_m(x) = 2m(x - |x|\ln|x|)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$
1.
a. Quel est l'ensemble de définition de h_m?
b. Exprimer sans h_m le symbole de la valeur absolue suivant m.
2. Montrer que h_m admet un prolongement par continuité en 0.
Interpréter la dérivabilité de h_m en 0.
3.
a. Etudier les limites de h_m sur D_{h_m}.
b. Etudier le sens de variation de h_m.
c. Dresser le tableau de variation de h_m.
d. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_{h_m}$ avec l'axe des abscisses.
8. Construire les courbes $\mathcal{C}_{h_2}$ et $\mathcal{C}_{h_3}$.

Correction :

A. $n \in \mathbb{N}, / f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^n}$.

1. $D_{f_n} =]0;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n\right] = \begin{cases} -\infty, si\ n\ est\ impaire \\ +\infty, si\ n\ est\ paire \end{cases}$

3. $\forall\, x > 0\ \ f'_n(x) = \frac{\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}x^n - nx^{n-1}(\ln x)^n}{x^{2n}} = \frac{(\ln x)^{n-1}x^n - nx^n(\ln x)^n}{x^{2n+1}} = \frac{n(\ln x)^n(1-\ln x)}{x^{n+1}\ln x} = \frac{n(\ln x)^{n-1}(1-\ln x)}{x^{n+1}}$.

- Si $n-1$ *est paire*, alors de $f'_n(x)$ dépendent de celui de $1-\ln x$.

x	0	e	$+\infty$
$1-\ln x$		$+$	$-$
$f'_n(x)$		$+$	$-$

$\forall\, x \in]0;e]\ \ f'_n(x) > 0\ \ f_n$ est croissante sur $]0;e]$ et $\forall\, x \in [e;+\infty[\ f'_n(x) < 0\ f_n$ est décroissante sur $[e;+\infty[$.

- Si $n-1$ *est impaire*, alors de $f'_n(x)$ dépendent de celui de $(\ln x)^{n-1}(1-\ln x)$.

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)^{n-1}$		$-$	$+$	$+$
$1-\ln x$		$+$	$+$	$-$
$f'_n(x)$		$-$	$+$	$-$

$\forall\, x \in]0;1] \cup [e;+\infty[\ \ f'_n(x) < 0\ \ f_n$ est strictement décroissante sur $]0;1]$ et sur $[e;+\infty[$.
$\forall\, x \in [1;e]\ \ f'_n(x) > 0\ \ f_n$ est croissante sur $[1;e]$.

4. **tableaux de variations de f_n.**

- **Si $n-1$ *est paire***

x	0		e		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$		$-\infty\ \nearrow$	$\frac{1}{e^n}$	$\searrow$	0

- **Si $n-1$ *est impaire***

x	0		1		e		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f_n(x)$		$+\infty\ \searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^n}$	$\searrow$	0

B. **$h_m(x) = 2m(x - |x|\ln|x|)$ / $m \in \mathbb{N}^*$**

1.

a. $D_{h_m} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

b. $\forall\, x \in]-\infty;0[$, $h_m(x) = 2m[x + x\ln(-x)]$ et $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $h_m(x) = 2m[x - x\ln(x)]$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}[2m[x + x\ln(-x)]] = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[2m[x - x\ln(x)]] = 0$; donc h_m admet un prolongement par continuité en 0.

Interpréter la dérivabilité de h_m en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h_m(x)-h_m(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}[2m[1 + \ln(-x)]] = -\infty$; h_m n'est pas dérivable à gauche de 0, donc $\mathcal{C}_{h_m}$ admet une tangente verticale.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h_m(x)-h_m(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[2m[1 - \ln(x)]] = +\infty$; h_m n'est pas dérivable à droite de 0, donc $\mathcal{C}_{h_m}$ admet une tangente verticale.

3.

a. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[2mx[1 + \ln(-x)]] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[2mx[1 - \ln(x)]] = -\infty$.

b. Etudier le sens de variation de h_m.

$\forall\, x \in]-\infty;0[$, $h'_m(x) = 2m[2 + \ln(-x)]$ alors h_m est strictement croissante sur $]-\infty;-e^{-2}]$ et h_m est strictement décroissante sur $[-e^{-2};0[$.

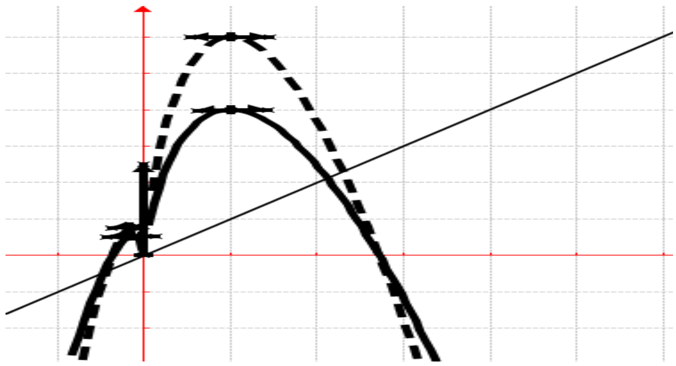
$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $h'_m(x) = -2m\ln(x)$ alors h_m est strictement croissante sur $]0;1]$ et h_m est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de h_m.

x	$-\infty$		$-e^{-2}$		0		1		$+\infty$
$h'_m(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$h_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2me^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2m$	$\searrow$	$-\infty$

d. $\mathcal{C}_{h_m} \cap (Ox) \Leftrightarrow h_m(x) = 2m(x - |x|\ln|x|) = 0 \Leftrightarrow |x|\ln|x| = x \Leftrightarrow \begin{cases} si\ x < 0 \Leftrightarrow x = -e^{-1} \\ si\ x > 0 \Leftrightarrow x = e \end{cases}$.

4. $\mathcal{C}_{h_2}$ en trait plein et $\mathcal{C}_{h_3}$ en trait pointé :



Problème 93 : Soit $n \in$ IR, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{x^2-1}{x} - n\ln x$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de f_n ?**
2. **Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_n}$ passe par un même point A, dont on précisera les coordonnées.**
3. **Etudier les limites de f_n.**
4. **Etudier le sens de variation de f_n suivant n à savoir $n \in]-\infty; -2] \cup [-2; 2]$ et $n \in]2; +\infty[$.**
5. **Donner une équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_{f_n}$ au point A.**
6. **Dresser les tableaux de variations de f_n suivant n.**
7. **Construire $\mathcal{C}_{f_{-4}}$; $\mathcal{C}_{f_{-2}}$; $\mathcal{C}_{f_2}$ et $\mathcal{C}_{f_4}$.**

Correction : $n \in$ IR, $/f_n(x) = \frac{x^2-1}{x} - n\ln x$.

1. $D_{f_n} =]0; +\infty[$.
2. **Toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_n}$ passe par un même point A, dont on précisera les coordonnées.**

$\frac{x^2-1}{x} - n\ln x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x} - y = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ c'est le point A$(1; 0)$.

3. **les limites de f_n.**

$f_n(x) = \frac{x^2-1}{x} - n\ln x = x - \frac{1}{x}(1 + nx\ln x)$

$\lim_{x \mapsto 0} f_n(x) = \lim_{x \mapsto 0} \left[x - \frac{1}{x}(1 + nx\ln x)\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ et

$\lim_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \left[x^2\left(\frac{x^2-1}{x^3} - n\frac{\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

4. **sens de variation de f_n suivant .**

$\forall\, x > 0\ f'_n(x) = \frac{x^2-nx+1}{x^2} = \frac{\left(x - \frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}\right)\left(x - \frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)}{x^2}$.

- **Si $n \in]-\infty; -2] \cup [-2; 2]$** alors f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- **Si $n \in]2; +\infty[$** alors f_n est strictement croissante sur $\left]0; \frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}; +\infty\right[$ et f_n est décroissante sur $\left[\frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}; \frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right]$.

5. **équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_{f_n}$ au A.**

$T_n : y = -nx + n$.

6. **tableaux de variations de f_n suivant n.**

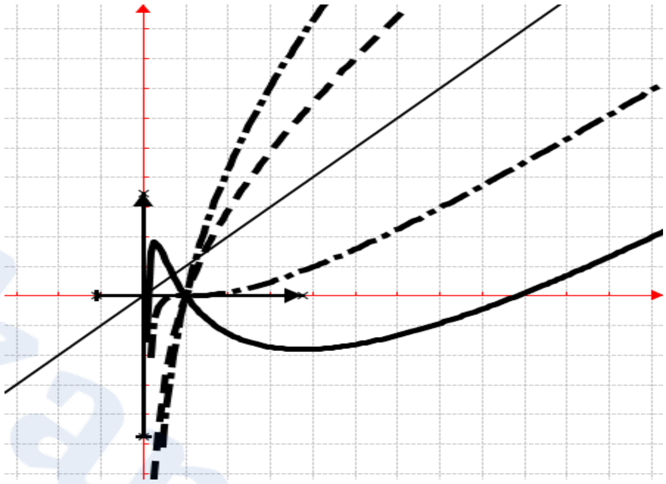
- **Si $n \in]-\infty; -2] \cup [-2; 2]$**

x	0			+∞
$f'_n(x)$			+	
$f_n(x)$		$-\infty$	↗	$+\infty$

- **Si $n \in]2; +\infty[$**

x	0		$\frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}$		$\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		+		−		+	
$f_n(x)$		$-\infty$ ↗		↘		↗	$+\infty$

7. **courbes $\mathcal{C}_{f_{-4}}$; $\mathcal{C}_{f_{-2}}$; $\mathcal{C}_{f_2}$ et $\mathcal{C}_{f_4}$.**



Problème 94 : Soit $m \in$ IR $- \{0; 1\}$

1. **Soit u_m définie par :**

$u_m(x) = mx - 1 - mx\ln x$ avec m décrit IR*.

a) **Etudier suivant les valeurs de m les limites en $+\infty$ *et* 0 de u_m. Interpréter ces résultats.**

b) **Dresser le tableau de variation de u_m suivant les valeurs de m. En déduire le signe de $u_m(x)$ suivant les valeurs de m à savoir $m < 0$ et $m > 0$ (c'est-à-dire $0 < m < 1$ et $1 < m$).**

2. **On considère la fonction f_m définie par :**

$f_m(x) = \frac{\ln x}{mx-1}$ avec $m \in$ IR $- \{0; 1\}$.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m ?**

b) **Déterminer la limite de f_m suivant les valeurs de m sur D_{f_m}.**

c) **Montrer que si $u_m(x) = 0$ alors $f_m(x) = \frac{1}{mx}$**

d) **Dresser les tableau de variations de f_m suivant les valeurs de m à savoir $m < 0$; $1 < m$ et $0 < m < 1$.**

e) **construire $\mathcal{C}_{f_{-2}}$; $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$.**

<u>Correction :</u>

1. $\boldsymbol{u_m(x) = x\left(m - \frac{1}{x} - m\ln x\right)}$ **avec $\boldsymbol{m}$ décrit IR*. Ensemble de définition : $\boldsymbol{D_{u_m}} =]0;+\infty[$.**

a) $\lim\limits_{x \mapsto 0} u_m(x) = -1$ alors $\boldsymbol{u_m}$ admet un prolongement par continuité en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u_m(x) = \begin{cases} +\infty & si\ m < 0 \\ -\infty & si\ m > 0 \end{cases}$ on peut calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{u_m(x)}{x} = \begin{cases} +\infty & si\ m < 0 \\ -\infty & si\ m > 0 \end{cases}$ alors $\boldsymbol{u_m}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

b) $\forall\, x \in]0;+\infty[\ u_m'(x) = -m\ln x$.

$\boldsymbol{si\ m < 0 \Leftrightarrow m - 1 < -1}$

x	0	1	$+\infty$
$u_m'(x)$	$-$		$+$
$u_m(x)$	-1 $\searrow$	$m-1$	$\nearrow$ $+\infty$

il existe un réel α tel que $\gamma > 1$ et $u_m(\gamma) = 0$; de ce fait on en déduit que :

$\forall\, x \in]0;\gamma]\ \ u_m(x) \le 0$ et

$\forall\, x \in [\gamma;+\infty[,\ u_m(x) \ge 0$

$\boldsymbol{si\ m > 0 \Leftrightarrow m - 1 > -1}$

x	0	1	$+\infty$
$u_m'(x)$	$+$		$-$
$u_m(x)$	-1 $\nearrow$	$m-1$	$\searrow$ $-\infty$

- **Si $\boldsymbol{0 < m < 1}$** alors $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ u_m(x) < 0$
- **Si $\boldsymbol{1 < m}$** alors il existe deux réels α et β

$(\alpha < \beta)$ tels que $u_m(\alpha) = 0\ et\ \ u_m(\beta) = 0$; de ce fait on en déduit que : $\forall\, x \in]0;\alpha]\ \cup [\beta;+\infty[\ u_m(x) \le 0$. Et $\forall\, x \in [\alpha;\beta]\ \ u_m(x) \ge 0$.

2. $\boldsymbol{f_m(x) = \frac{\ln x}{mx-1}}$ **avec $\boldsymbol{m}$ décrit IR*.**

a) **Ensemble de définition de $\boldsymbol{f_m}$:**

$D_{f_m} = \{x \in IR/\ x > 0\ \ et\ mx - 1 \neq 0\}$

- Si $m < 0$ alors $D_{f_m} =]0;+\infty[$.
- Si $m > 0$ alors $D_{f_m} = \left]0;\frac{1}{m}\right[\cup \left]\frac{1}{m};+\infty\right[$.

b) $f_m(x) = \frac{\ln x}{mx-1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{m - \frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{\ln x}{mx-1}\right] = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{m - \frac{1}{x}}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto (1/m)^-} f_m(x) = \begin{cases} \frac{-\ln m}{0^-} = +\infty\ si\ m > 1 \\ \frac{-\ln m}{0^-} = -\infty\ si\ 0 < m < 1 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x \mapsto (1/m)^+} f_m(x) = \begin{cases} \frac{-\ln m}{0^+} = -\infty\ si\ m > 1 \\ \frac{-\ln m}{0^+} = +\infty\ si\ 0 < m < 1 \end{cases}$.

c) **Montrer que si $\boldsymbol{u_m(x) = 0}$ alors $\boldsymbol{f_m(x) = \frac{1}{mx}}$**

$u_m(x) = mx - 1 - mx\ln x = 0 \Leftrightarrow mx - 1 = mx\ln x$. On en déduit $f_m(x) = \frac{\ln x}{mx-1} = \frac{\ln x}{mx\ln x} = \frac{1}{mx}$.

d) **Etudions les variations de $\boldsymbol{f_m}$:**

Si $m < 0$ alors $D_{f_m} =]0;+\infty[$

Si $m > 0$ alors $D_{f_m} = \left]0;\frac{1}{m}\right[\cup \left]\frac{1}{m};+\infty\right[$.

$\forall\, x \in D_{f_m},\ f_m'(x) = \frac{mx - 1 - mx\ln x}{(mx-1)^2} = \frac{u_m(x)}{(mx-1)^2}$

$\boldsymbol{m < 0}$

x	0	γ	$+\infty$
$f_m'(x)$	$-$		$+$
$f_m(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{m\gamma}$	$\nearrow$ 0

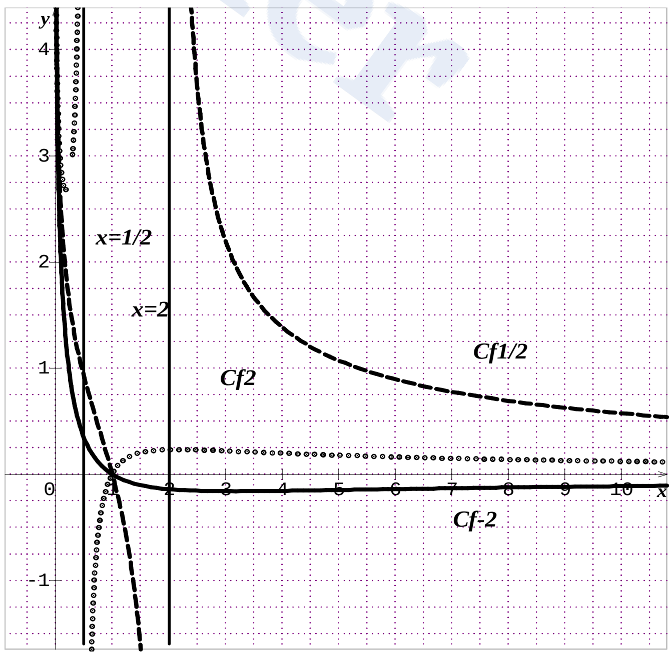
$\boldsymbol{1 < m}$

x	0	α		$\frac{1}{m}$		β	$+\infty$
$f_m'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$
$f_m(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{m\alpha}$	$\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{m\beta}$	$\searrow$ 0

$\boldsymbol{0 < m < 1}$

x	0	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
$f_m'(x)$	$-$		$-$
$f_m(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 0

e) **$\mathcal{C}_{f_{-2}}$; $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$:**



Problème 95 : Soit m un nombre réel. On considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 + mx, si\ x > 0 \\ 0 \qquad ,si\ x = 0 \end{cases}.$$

1. Etude de $m = 0$:

a) Calculer la dérivé de f_0 sur $]0;1]$ et montrer que $f'_0(x)$ peut s'écrire sous la forme de $f'_0(x) = \ln x(\ln x + 2)$.

b) Déterminer les solutions de $f'_0(x) = 0$ sur $]0;1]$. En déduire le signe de $f'_0(x) = 0$ sur $]0;1]$.

2. Etude à l'origine :

a) Déterminer la limite de $\frac{\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$, puis de $\frac{\ln u}{\sqrt{u}}$, et enfin $\frac{(\ln u)^2}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

b) En déduire que la limite de $x(\ln x)^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0 puis que f_0 est continue en 0.

c) Déterminer la limite de $\frac{f_0(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. En déduire la tangente en O à $\mathcal{C}_{f_0}$.

3. Etude de f_0 :

a) Dresser le tableau des variations de f_0.

b) Tracer la courbe de $\mathcal{C}_{f_0}$.

4. Etude de f_m :

a) Calculer $f'_m(x)$ sur $]0;1]$.

b) Soit A_m le point de $\mathcal{C}_{f_m}$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente de T_m à $\mathcal{C}_{f_m}$ au point A_m est la droite (OA_m).

c) Etablir que f_m est continue en 0 et elle n'est pas dérivable en ce point. Déterminer la tangente de $\mathcal{C}_{f_m}$ en O.

5. Etude de $f_{\frac{1}{2}}$ et de f_1 :

a) Prouver que pour tout $x \in]0;1]$, $f'_1(x) = (\ln x + 1)^2$.

b) Prouver que pour tout $x \in [0;1]$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$.

c) Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_{f_0}$ et $\mathcal{C}_{f_1}$.

d) Etablir le tableau de variation de f_1 et tracer $\mathcal{C}_{f_1}$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_{f_0}$ en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 au point A_1.

e) En déduire une construction de $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ à partir de $\mathcal{C}_{f_0}$ et $\mathcal{C}_{f_1}$ et tracer $\mathcal{C}_{f_1}$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_{f_0}$ et $\mathcal{C}_{f_1}$ en précisant la tangente $T_{1/2}$ à $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ au point $A_{1/2}$.

6. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.

a) On pose $I(\alpha) = \int_\alpha^1 x(\ln x)^2 dx$. Prouver en effectuant une intégration par partie, que $I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \int_\alpha^1 x\ln x\, dx$.

b) En effectuant à nouveau une intégration par partie, prouver que

$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$.

c) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} I(\alpha) =$.

d) Calculer $S_m(\alpha) = \int_\alpha^1 f_m(x)dx$.

e) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} S_m(\alpha) =$.

Correction : $m \in$ IR /

$$f_m(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 + mx, si\ x > 0 \\ 0 \qquad ,si\ x = 0 \end{cases}.$$

1. Etude de $m = 0$:

a) $\forall x \in]0;1]$, $f_0(x) = x(\ln x)^2$

$\forall x \in]0;1]$, $f'_0(x) = (\ln x)^2 + x.\frac{2\ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$.

b) les solutions de $f'_0(x) = \ln x(\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \ln x = 0 = \ln 1 \\ \ln x + 2 = 0 = \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^{-2} \end{cases}$ sur $]0;1]$.

signe de $f'_0(x) = 0$ sur $]0;1]$

$\forall x \in]0;e^{-2}]$, $f'_0(x) \geq 0$

$\forall x \in [e^{-2};1]$, $f'_0(x) \leq 0$.

2. Etude à l'origine :

a) $\lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 0$; $\lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}} = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 0$ et

$\lim\limits_{u \mapsto +\infty} \frac{(\ln u)^2}{u} = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \left[\frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]^2 = 0$

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{u \mapsto +\infty} \left[\frac{2\ln\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]^2 = 0$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0}[(\ln x)^2] = (-\infty)^2 = +\infty$.

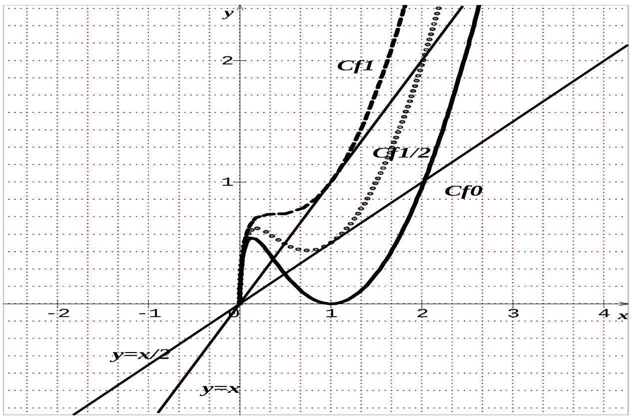
Déduire la tangente en O à $\mathcal{C}_{f_0}$: c'est une tangente verticale au point O car le nombre dérivé est un nombre infini.

3. Tracer la courbe de $\mathcal{C}_{f_0}$:

a) tableau des variations de f_0.

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'_0(x)$		+		−		+	
$f_0(x)$	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

b) $\mathcal{C}_{f_0}$.



4. **Etude de f_m :**

a) $\forall\, x \in]0;1]$, $f_m(x) = x(\ln x)^2 + mx$

$\forall\, x \in]0;1]$, $f'_m(x) = \ln x\,(\ln x + 2) + m$.

d) $\mathrm{T_m} : y_m = mx$ alors cette droite passe par O et par A_m. La tangente de $\mathrm{T_m}$ à $\mathcal{C}_{f_m}$ au point A_m est la droite $(\mathrm{O}A_m)$.

e) $\lim\limits_{x \mapsto 0} f_m(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}[x(\ln x)^2 + mx] = 0$ donc f_m est continue en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f_m(x) - f_m(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \mapsto 0}[(\ln x)^2 + m] = (-\infty)^2 = +\infty$

alors f_m n'est pas dérivable en 0.

Déduire la tangente en O à $\mathcal{C}_{f_m}$: c'est une tangente verticale au point O car le nombre dérivé est un nombre infini.

5. **Etude de $f_{\frac{1}{2}}$ et de f_1 :**

a) $\forall x \in]0;1]$, $f_1(x) = x(\ln x)^2 + x$.

$\forall x \in]0;1]$, $f'_1(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = (\ln x + 1)^2$

b) $\forall x \in [0;1]$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} \Leftrightarrow 2f_{\frac{1}{2}}(x) = f_0(x) + f_1(x) = x(\ln x)^2 + x(\ln x)^2 + x = 2x(\ln x)^2 + x$. Or $2f_{\frac{1}{2}}(x) = 2x(\ln x)^2 + x$ donc $\forall x \in [0;1]$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$.

c) $\forall x \in]0;1]$, $f_0(x) - f_1(x) = -x < 0$ alors $\mathcal{C}_{f_0}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_{f_1}$.

d) **$\mathrm{T_1}$ au point $\mathrm{A_1}$: $y_1 = x$.**

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$		$+$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

e) Voir figure.

6. **Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.**

a) $\mathrm{I}(\alpha) = \int_\alpha^1 x(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 x\ln x\, dx = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \int_\alpha^1 x\ln x\, dx$.

b) $\mathrm{I}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$.

c) $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathrm{I}(\alpha) = \frac{1}{4}$.

d) $\mathrm{S}_m(\alpha) = \int_\alpha^1 f_m(x)dx = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + m\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{m}{2} - m\frac{\alpha^2}{2}$.

e) $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathrm{S}_m(\alpha) = \frac{m}{2} + \frac{1}{4}$.

__Problème 96 :__ Soit $n \in$ IN, on considère la fonction h_n définie par : $h_n(x) = \begin{cases} x^n \ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

1. Pour tout n non nul, montrer qu'il existe trois (3) points O, A et B commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_{h_n}$ dont on déterminera leurs coordonnées.

2. Pour tout n non nul, étudier le signe de $h_{n+1}(x) - h_n(x)$ suivant la parité de n et pour chaque cas en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_{h_n}$ et $\mathcal{C}_{h_{n+1}}$.

3. Etudier la parité de h_n sur D_{h_n}.

4. Discuter suivant les valeurs de n [$n = 0$; $n \in$ IN*($n < 1$ ($n - 1$ *est pair ou impair*); $n = 1$ *ou* $n > 1$)] la dérivabilité de h_n sur D_{h_n}. Interpréter graphiquement ces résultats.

5. Etudier la fonction h_n sur D_{h_n} suivant la parité (n est pair et n est impair) et $n = 0$.

6. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_n = \int_1^e x^n \ln x\, dx$.

7. Tracer $\mathcal{C}_{h_0}$; $\mathcal{C}_{h_2}$ et $\mathcal{C}_{h_3}$.

__Correction :__ $n \in$ IN,/

$h_n(x) = \begin{cases} x^n \ln|x| & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

1. $h_{n+1}(x) = h_n(x) \Leftrightarrow x^{n+1} = x^n \Leftrightarrow x = 1$ or $h_n(1) = 0$; $h_n(-1) = 0$ et $h_n(0) = 0$. Ces points sont O(0; 0) ; A(−1; 0) et B(1; 0).

2. $h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^n \ln|x|\,(x - 1)$

- **Si n est pair**

x	$-\infty$ -1	0		1 $+\infty$
x^n	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln\lvert x\rvert$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
p	$+$	$+$	$+$	$+$

$\forall\, x \in]-\infty; +\infty[$ $h_{n+1}(x) - h_n(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_{h_{n+1}}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{h_n}$ sur $]-\infty; +\infty[$

Si $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$ $\mathcal{C}_{h_n}$ et $\mathcal{C}_{h_{n+1}}$ se coupent en points O(0; 0) ; A(−1; 0) et B(1; 0).

- **Si n est impair**

x	$-\infty$ $\quad$ -1	0		1	$+\infty$
x^n	$-$	$-$	$+$		$+$
$\ln\lvert x\rvert$	$-$	$-$	‖	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$		$+$
p	$-$	$-$	‖	$+$	$+$

$\forall\, x \in]-\infty;\ -1[\ \ h_{n+1}(x) - h_n(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_{h_{n+1}}$ est au dessous de $\mathcal{C}_{h_n}$ sur $]-\infty;\ -1[$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[\ \ h_{n+1}(x) - h_n(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_{h_{n+1}}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{h_n}$ sur $]0;\ +\infty[$.

Si $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$ $\mathcal{C}_{h_n}$ et $\mathcal{C}_{h_{n+1}}$ se coupent en points $\mathrm{O}(0;0)$; $\mathrm{A}(-1;0)$ et $\mathrm{B}(1;0)$.

3. **Etudier la parité de h_n sur D_{h_n} :**

- **Si $n = 0$** alors $h_0(x) = \ln|x|$

$\mathrm{D}_{h_0} =]-\infty;0[\cup]0;\ +\infty[$

$h_0(x) = \ln|-x| = \ln|x| = h_0(x)$ alors h_0 est paire

- **Si $\in$ IN*;** $\mathrm{D}_{h_n} = \mathrm{IR}$

$h_n(x) = (-x)^n \ln|-x| = (-x)^n \ln|x|$

- ***n* est pair** alors h_n est paire
- ***n* est impair** alors h_n est impaire.

4. **Discuter suivant les valeurs de n, la dérivabilité de h_n sur D_{h_n} :**

- **Si $n = 0$ alors $h_0(x) = \ln|x|$**

$\mathrm{D}_{h_0} =]-\infty;0[\cup]0;\ +\infty[$

Alors h_0 est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;\ +\infty[$

- **Si $n \in$ IN*;** $\mathrm{D}_{h_n} = \mathrm{IR}$

$\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{h_n(x)-h_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0}[x^{n-1}\ln|x|] =$

- **Si $n - 1 < 0 \Leftrightarrow n < 1$**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{h_n(x)-h_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0}[x^{n-1}\ln|x|] = (-\infty) \times \frac{1}{0}$

***n* − 1 est pair**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{h_n(x)-h_n(0)}{x-0} = (-\infty) \times \frac{1}{0^+} = -\infty$

***n* − 1 est impair**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{h_n(x)-h_n(0)}{x-0} = \begin{cases} (-\infty) \times \frac{1}{0^+} = -\infty \text{ si } x > 0 \\ (-\infty) \times \frac{1}{0^-} = +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Donc h_n n'est pas dérivable en 0. $\mathcal{C}_{h_n}$ admet une tangente verticale en 0. Par conséquent h_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.

- **Si $n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = 1$** alors

$\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{h_1(x)-h_1(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0}[\ln|x|] = -\infty$ alors h_1 n'est pas dérivable en 0. $\mathcal{C}_{h_1}$ admet une tangente verticale en 0. Par conséquent h_1 est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.

- **Si $n - 1 > 0 \Leftrightarrow n > 1$**

$\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{h_n(x)-h_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0}[x^{n-1}\ln|x|] = 0$

Donc h_n est dérivable en 0. Par conséquent h_n est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$.

5. **Etudier la fonction h_n sur D_{h_n}.**

- **Si $n \in$ IN*;** $\mathrm{D}_{h_n} = \mathrm{IR}$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} h_n(x) = (-\infty)^n.(+\infty) \begin{cases} -\infty \ si\ n\ est\ impair \\ +\infty\ si\ n\ est\ pair \end{cases}$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} h_n(x) = (+\infty)^n.(+\infty) = +\infty$

Si *n* est pair alors *n* − 1 est impair

- $\forall\, x \in]-\infty;0[,\ h_n(x) = x^n \ln(-x)$

$\forall\, x \in]-\infty;0[,\ h'_n(x) = nx^{n-1}\ln(-x) + x^{n-1} = x^{n-1}[n\ln(-x) + 1]$ alors h_n est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-e^{-1/n}\right[$ et h_n est strictement croissante sur $\left]-e^{-1/n};0\right[$.

- $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h_n(x) = x^n \ln x$

$\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h'_n(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = x^{n-1}[n\ln x + 1]$, alors h_n est décroissante sur $\left]0;e^{-1/n}\right]$ et h_n est croissante sur $\left[e^{-1/n};+\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-e^{-1/n}$		0		$e^{-1/n}$		$+\infty$
$h'_n(x)$	$-$		$+$	‖	$-$		$+$	
$h_n(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{-1}{en}$	↗	0	↘	$\frac{-1}{en}$	↗	$+\infty$

Si *n* est impair alors *n* − 1 est pair

- $\forall\, x \in]-\infty;0[,\ h_n(x) = x^n \ln(-x)$

$\forall\, x \in]-\infty;0[,\ h'_n(x) = nx^{n-1}\ln(-x) + x^{n-1} = x^{n-1}[n\ln(-x) + 1]$ alors h_n est strictement croissante sur $\left]-\infty;-e^{-1/n}\right]$ et h_n est strictement décroissante sur $\left[-e^{-1/n};0\right[$.

- $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h_n(x) = x^n \ln x$

$\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h'_n(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = x^{n-1}[n\ln x + 1]$,

$\forall\, x \in]0;+\infty[,\ h'_n(x) = x^{n-1}[n\ln x + 1]$alors h_n est décroissante sur $\left]0;e^{-1/n}\right]$ et h_n est strictement croissante sur $\left[e^{-1/n};+\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-e^{-1/n}$		0		$e^{-1/n}$		$+\infty$
$h'_n(x)$	$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$h_n(x)$	$-\infty$ ↗	$1/ne$	↘	0	↘	$\frac{-1}{en}$	↗	$+\infty$

- **Si $n = 0$;** $\mathrm{D}_{h_0} = \mathrm{IR} - \{0\}$

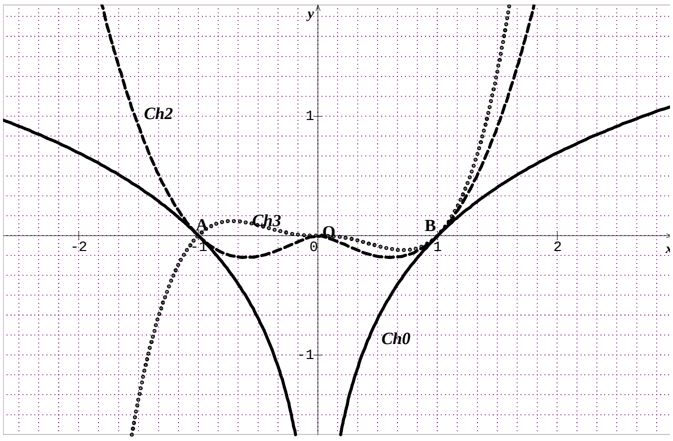
$\lim\limits_{x\mapsto 0} h_0(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$h'_0(x)$	$-$	‖	$+$	
$h_0(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

6. $\mathrm{I}_n = \int_1^e x^n \ln x\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1}dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^e =$

$\mathrm{I}_n = \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}[(n+1)\ln x - 1]\right]_1^e = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$

7. Tracer $\mathcal{C}_{h_0}$ en trait plein; $\mathcal{C}_{h_2}$ en trait pointé et $\mathcal{C}_{h_3}$ en trait point et tiré.



<u>Problème 96 :</u> Soit $(a; b) \in \mathrm{IR}^2$, on considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty;\, e^2\right[, & h(x) = ax^2 + b \\ \forall\, x \in \left[e^2;\, +\infty\right[, & h(x) = (\ln x)^2 \end{cases}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Déterminer a et b pour que h soit continue et dérivable sur IR.

3. Etudier la fonction h sur D_h.

4. Tracer $\mathcal{C}_h$.

5. Calculer $\mathrm{I}_n = \int_{e^2}^{n} h(t)dt$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$.

<u>Correction :</u> $\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty;\, e^2\right[, & h(x) = ax^2 + b \\ \forall\, x \in \left[e^2;\, +\infty\right[, & h(x) = (\ln x)^2 \end{cases}.$

1. $\mathrm{D}_h =]-\infty; +\infty[$.

2. Si h est continue sur IR alors

$\lim\limits_{x \mapsto e^2}[ax+b] = hd(e^2) = 4 \Leftrightarrow ae^4 + b = 4$

Si h est dérivable sur IR alors $h_g'(e^2) = h_d'(e^2) =$

$2a = \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{e^2} \\ ae^4 + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2} \\ b = 4 - 2e^2 \end{cases}.$

3. **Etudier la fonction h sur D_h :**

$\begin{cases} \forall\, x \in \left]-\infty;\, e^2\right[, & h(x) = 2e^{-2}x^2 + 4 - 2e^2 \\ \forall\, x \in \left[e^2;\, +\infty\right[, & h(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[2e^{-2}x^2] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(\ln x)^2] = +\infty$.

$\forall\, x < e^2,\ h'(x) = e^{-2}x \Leftrightarrow \begin{cases} h'(x) \le 0, si\ x \le 0 \\ h'(x) > 0 si\ 0 < x < e^2 \end{cases}$

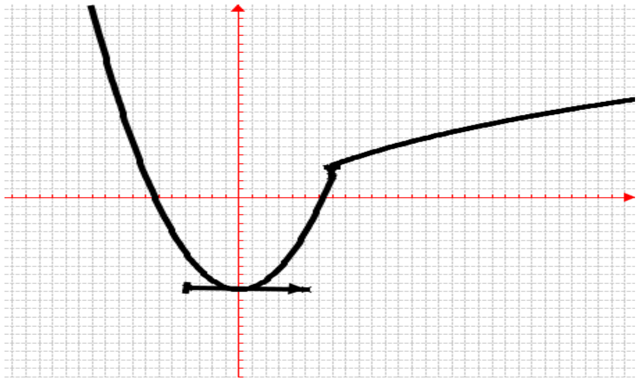
$\forall\, x \ge e^2,\ h'(x) = \frac{2\ln x}{x} \ge 0.$

$\boldsymbol{h}(\mathbf{0}) = 4 - 2e^2 = m$; $\boldsymbol{h}(e^2) = 4$

x	$-\infty$	0	e^2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$		$+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	m ↗	4 ↗	$+\infty$

4. Tracer $\mathcal{C}_h$:

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) à l'infini.



5. Calculer $\mathrm{I}_n = \int_{e^2}^{n} h(t)dt$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$.

$\mathrm{I}_n = \int_{e^2}^{n} h(t)dt = [t(\ln t)^2]_{e^2}^{n} - 2\int_{e^2}^{n} \ln t\, dt$

$\mathrm{I}_n = [t(\ln t)^2 - 2\ln t + 2t]_{e^2}^{n}$

$\mathrm{I}_n = n(\ln n)^2 - 2\ln n + 2n - 2e^2.$

<u>Problème 97 :</u> Soit $\omega \in \mathrm{IR}$, on considère la fonction h définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{IR}^*, h(x) = x^2\ln|x| - 1 \\ h(0) = \omega \end{cases}.$

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Démontrer que l'on peut choisir ω de façon que h soit continue sur IR.

3. Etudier la dérivabilité de h en 0.

4. Etudier la fonction h sur D_h.

5. Tracer $\mathcal{C}_h$.

6. Calculer $\mathrm{I}_n = \int_{1}^{n} h(t)dt$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$.

<u>Correction :</u> $\omega \in \mathrm{IR}$, on considère la fonction h définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{IR}^*, h(x) = x^2\ln|x| - 1 \\ h(0) = \omega \end{cases}.$

1. $\mathrm{D}_h =]-\infty; +\infty[$.

2. Si h est continue sur IR alors

$\lim\limits_{x \mapsto 0}[x^2\ln|x| - 1] = h(0) = \omega$, par identification

$\omega = -1$ car $\lim\limits_{x \mapsto 0} x^2\ln|x| = 0$.

3. **Etudier la dérivabilité de h en 0 :**

$\lim\limits_{x \mapsto 0}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0} x\ln|x| = 0$,

donc h est dérivable en 0.

4. **Etudier la fonction h sur D_h**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[x^2 \ln|x| - 1] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x^2 \ln|x| - 1] = +\infty$.

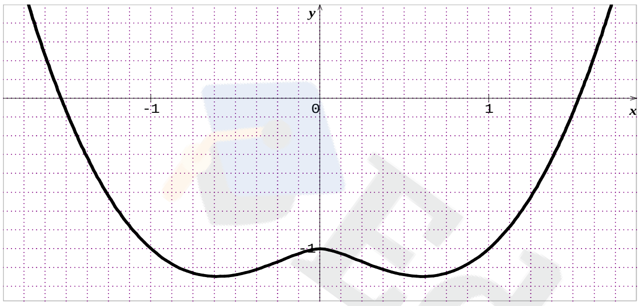
$\forall\, x \in IR,\ '(x) = x(2\ln|x| + 1)$

Posons $x(2\ln|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}} = \pm 0,60 \end{cases}$

$h(\pm 0,6) = -1{,}18 = m.$

x	$-\infty$		$-0,6$		0		$0,6$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	-1	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

5. Tracer $\mathcal{C}_h$: $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$, $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy).



6. $\mathbf{I_n} = \int_1^n h(t)dt = \int_1^n [t^2 \ln t - 1]dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t - t\right]_1^n - \int_1^n \frac{t^2}{3}dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln t - t - \frac{t^3}{9}\right]_1^n = \left[\frac{t^3}{3}\left(\ln t - \frac{1}{3}\right) - t\right]_1^n = \frac{n^3}{3}\left(\ln n - \frac{1}{3}\right) - n + \frac{10}{9}.$

__Problème 98 :__ **unité graphique 2 cm.**

1. Soit u_n la fonction définie par $u_n(x) = \frac{x}{x+1} + n\ln(x+1)$ avec $n \in IN^*$.

a) Calculer $u_n'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction u_n.

b) Calculer $u_n(0)$. Donner le signe de $u_n(x)$, pour x appartenant à $]-1;\ +\infty[$.

2. On considère la fonction h_n définie par $\forall\, x \in]-1;\ +\infty[, h_n(x) = x^n \ln(x+1)$.

a) Calculer les limites de h sur $]-1;\ +\infty[$.

b) Montrer que $\forall\, x > -1, h_n'(x) = x^{n-1}.u_n(x)$.

c) En supposant que n est impair En déduire le sens de variations de h_n et dresser son tableau de variations.

d) En supposant que n est pair En déduire le sens de variations de h_n et dresser son tableau de variations.

e) Tracer les courbes $\mathcal{C}_{h_1}$ et $\mathcal{C}_{h_2}$.

3. On pose $u_n = \int_0^1 h(x)dx$.

a) Démontrer que $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

__Correction :__ **unité graphique 2 cm. $n \in IN^*$**

1. $u_n(x) = \frac{x}{x+1} + n\ln(x+1)$ **avec** $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $u_n'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1} = \frac{nx+1+n}{(x+1)^2}$, son signe dépend de $nx + 1 + n$: Posons $nx + 1 + n = 0 \Leftrightarrow x = -1 - \frac{1}{n}$ **or** $-1 - \frac{1}{n} < -1$, donc

$\forall\, x \in \left]-1 - \frac{1}{n}; +\infty\right[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $\left]-1 - \frac{1}{n}; +\infty\right[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} u_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left[\frac{1}{x+1}[x + n(x+1)\ln(x+1)]\right] = -\infty$

car en posant $\begin{cases} t = x + 1 \\ x = t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto -1^+ \\ t \mapsto 0 \end{cases}$ ce qui revient à chercher $u_n(t-1) = 1 - \frac{1}{t} + nt\ln(t)$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{x}{x+1} + n\ln(x+1)\right] = +\infty$.

x	-1		$+\infty$
$u'_n(x)$		$+$	
$u_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $u_n(0) = 0$ **donc**

$\forall\, x \in]-1; 0[$, $u_n(x) < 0$

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $u_n(x) > 0$.

2. $\forall\, x \in]-1;\ +\infty[$, $h_n(x) = x^n \ln(x+1)$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x^n \ln(x+1)] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}[x^n \ln(x+1)] = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

b) $\forall\, x > -1, h_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x+1) + \frac{x^n}{x+1} = nx^{n-1}\ln(x+1) + x\frac{x^{n-1}}{x+1} = x^{n-1}\left[n\ln(x+1) + \right.$

xx+1=xn−1.unx.

c) Si n est impair alors $n - 1$ est pair donc $\forall\, x > -1\ x^{n-1} > 0$

$\forall\, x \in]-1; 0[$, $h_n'(x) < 0$ alors h_n est strictement décroissante sur $]-1; 0[$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h_n'(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

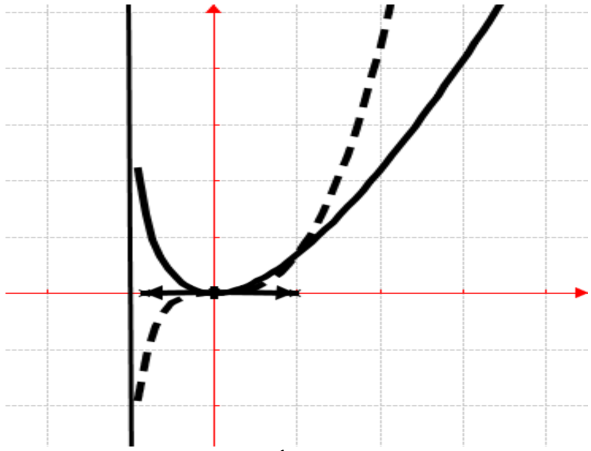
x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$		$+$	
$u_n(x)$		$-$		$+$	
$h'_n(x)$		$-$		$+$	
$h_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Si n est pair alors $n - 1$ est impair

$\forall\, x \in]-1; +\infty[$, $h_n'(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$		$+$	
$u_n(x)$		$-$		$+$	
$h'_n(x)$		$+$		$+$	
$h_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) $\mathcal{C}_{h_1}$ en trait continue et $\mathcal{C}_{h_2}$ en trait discontinue



3. **On pose $u_n = \int_0^1 h(x)dx$.**

a) **Démontrer que $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.**

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$ en multipliant on aura $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \leq \int_0^1 \ln 2\,dx$ ou

$0 \leq u_n \leq \ln 2$ or $n > 0 \Leftrightarrow n+1 > 1 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{n+1} < \ln 2$

Donc $0 \leq u_n \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

b) **$0 \leq u_n \leq L$ donc (u_n) est convergente et**

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$ d'après le théorème de gendarme

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$.

<u>Problème 99 :</u> unité graphique 2 cm.

1. **On considère la fonction h_n définie par $h_n(x) = \ln(x^n + 1)$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$.**

a) **Quel est l'ensemble de définition de h_n ? (selon la parité).**

b) **Calculer les limites de h_n sur D_{h_n}.**

c) **Etudier le sens de variation de h_n suivant la parité sur D_{h_n}.**

d) **En supposant que n est pair. Dresser le tableau de variations de h_n.**

e) **En supposant que n est impair. Dresser le tableau de variations de h_n.**

f) **Tracer les courbes $\mathcal{C}_{h_2}$ et $\mathcal{C}_{h_3}$.**

2. **On pose $u_n = \int_0^1 h_n(x)dx$.**

a. **L'aide d'une intégration par parties, calculer u_1 et interpréter graphiquement le résultat. (Pour le calcul de u_1, on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0;\ +\infty[$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).**

b. **Démontrer que $0 \leq u_n \leq \ln 2$.**

c. **Étudier les variations de la suite (u_n).**

d. **En déduire que la suite (u_n) est convergente**

9. **Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+1) - x$.**

a. **Étudier le sens de variation de g sur $[0;\ +\infty[$.**

b. **En déduire le signe de g sur $[0;\ +\infty[$.**

c. **Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a $\ln(x^n + 1) \leq x^n$.**

10. **En déduire la limite de la suite (u_n).**

<u>Correction</u> unité graphique 2 cm.

1. **$h_n(x) = \ln(x^n + 1)$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$**

a) **l'ensemble de définition de h_n :**

- **Si n est pair,** si $x = -1 \Leftrightarrow (-1)^n > 0$

Alors $\mathrm{D}_{h_n} =]-\infty;\ +\infty[$

- **Si n est impair** si $x = -1 \Leftrightarrow (-1)^n < 0$

Alors $\mathrm{D}_{h_n} =]\mathbf{-1};\ +\infty[$.

b) **Calculer les limites de h_n sur D_{h_n}.**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\ln(x^n + 1)] = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[\ln(x^n + 1)] = +\infty \text{ si } n \text{ est pair}$

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+}[\ln(x^n + 1)] = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$

c) **sens de variation de h_n sur D_{h_n} :**

$\forall\, x \in \mathrm{D}_{h_n}$ $h_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n+1}$, son signe dépend de x^{n-1}

- **Si n est pair alors -1 est impair**

$\forall\, x \in]-\infty; 0[$, $h_n'(x) < 0$ alors h_n est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h_n'(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

- **Si n est impair alors $n-1$ est pair :**

$\forall\, x \in]-\infty; +\infty[$, $h_n'(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

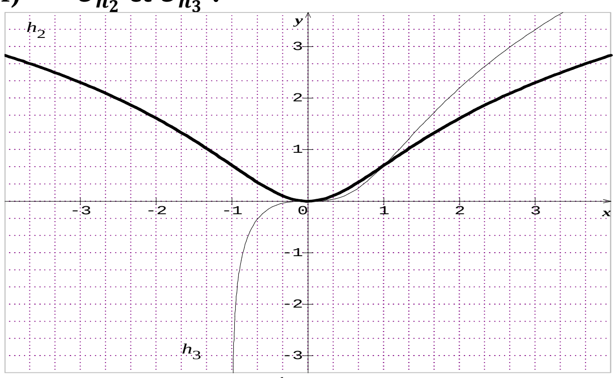
d) **n est pair alors $n-1$ est impair :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$		$+$	
$h'_n(x)$		$-$		$+$	
$h_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

e) **n est impair alors $n-1$ est pair :**

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$		$+$	
$h'_n(x)$		$+$		$+$	
$h_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f) **$\mathcal{C}_{h_2}$ et $\mathcal{C}_{h_3}$:**



3. **On pose $u_n = \int_0^1 h(x)dx$.**

a. $u_1=\int_0^1 \boldsymbol{h_1}(x)dx=\int_0^1 \ln(x+1)\,dx=(x+1)[\ln(x+1)]_0^1-\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx=[(x+1\ln x+1-x01=2\ln 2-1.$

b. Démontrer que $0 \le u_n \le \ln 2$: pour tout entier naturel non nul *n*, $\boldsymbol{h_n}$ est continue sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$. pour tout *x* de [0 ; 1], $\mathbf{0\le x\le 1}$ donc $\mathbf{1}\le x^n+\mathbf{1}\le 2$ or la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]\mathbf{0};\ +\infty[$ donc $\ln 1\le \ln(x^n+1)\le \ln(2)$. La fonction $\boldsymbol{h_n}$ est continue sur [0, 1] et pour tout *x* de [0, 1] $\mathbf{0}\le \boldsymbol{h_{n+1}}(x)\le \ln(2) \Leftrightarrow \mathbf{0}\le \int_0^1 \boldsymbol{h_{n+1}}(x)dx\le \int_0^1 \ln(2)$ donc pour tout entier naturel non nul *n*, soit $\mathbf{0\le u_n \le \ln 2}$.

c. Étudier les variations de la suite (u_n).
Pour tout *x* de [0, 1] $\mathbf{0\le x\le 1}$ donc $\mathbf{0}\le x^{n+1}\le x^n$ donc $\mathbf{1}\le x^{n+1}+\mathbf{1}\le x^n+1$ or la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]\mathbf{0};\ +\infty[$ donc $\ln 1\le \ln(x^{n+1}+1)\le \ln(x^n+1)$ soit $\mathbf{0\le h_{n+1}\le h_n}$. Les fonctions $\boldsymbol{h_{n+1}}$ et $\boldsymbol{h_n}$ sont continues sur [0, 1] et pour tout *x* de [0, 1] :
$\mathbf{0\le h_{n+1}\le h_n}$ donc $\mathbf{0\le u_{n+1}\le u_n}$.
La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est décroissante minorée par 0.

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente
La suite ($_n$) est décroissante minorée par 0 donc est convergente.

4. sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+1)-x$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$.
$\forall\ x\in[\mathbf{0};\ +\infty[,\ g'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}<0$ alors g est strictement croissante sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0;\ +\infty[$.
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x\left(\frac{\ln(x)}{x}-\mathbf{1}\right)\right]=-\infty$ et $g(0)=0$.
Donc $\forall\ x\in[\mathbf{0};\ +\infty[,\ g(x)\le 0$.

c. $g(x)\le 0 \Leftrightarrow g(\boldsymbol{x^n})\le 0 \Leftrightarrow \ln(\boldsymbol{x^n}+\mathbf{1})-\boldsymbol{x^n}\le \mathbf{0} \Leftrightarrow$ pour tout entier naturel *n* non nul, et pour tout *x* réel positif, on a $\ln(x^n+1)\le x^n$.

5. En déduire la limite de la suite (u_n).
$0\le \ln(x^{n+1}+1)\le x^n \Leftrightarrow \mathbf{0}\le \boldsymbol{u_n}\le \int_0^1 x^n dx$

Or $\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^n}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \mathbf{0}\le \boldsymbol{u_n}\le \frac{1}{n+1}$ or

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{n+1}\right]=0$ donc d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}[\boldsymbol{u_n}]=0$.

<u>Problème 100 :</u> On considère la fonction h_n définie par $h_n(x)=x-n+\frac{n}{2}\ln(x)$ avec $n\in$ IR*

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h_n ?

b) Calculer les limites de h_n sur D_{h_n}.

c) Etudier le sens de variation de h_n sur D_{h_n}.

d) Dresser le tableau de variations de h_n.

2. On suppose que $n>0$.

a) En déduire l'existence d'un réel unique α_n solution de l'équation $h_n(x)=0$.

b) Démontrer que $1\le\alpha_n\le e^2$ et que $\ln(\alpha_n)=2-\frac{2}{n}\alpha_n$.

c) Exprimer $h_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n, puis en déduire le sens de variation de la suite de terme général α_n.

d) En utilisant les résultats de la question 2. b), calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\ln(\alpha_n)$. En déduire ℓ.

3. On considère les fonctions g et f définies par $g(x)=\frac{2x-\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ et $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Calculer les limites de g sur D_g.

b) Vérifier que $g'(x)=\frac{h_1(x)}{2x\sqrt{x}}$. En déduire le tableau de variation de g.

c) Préciser les positions relatives des deux (2) courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ et calculer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $[g(x)-f(x)]$.

d) Tracer les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$.

e) On pose $\mathrm{I}=\int_1^2 g(x)dx$. L'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{J}=\int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}dx$. En déduire la valeur de I.

<u>Correction :</u> $h_n(x)=x-n+\frac{n}{2}\ln(x)$ avec $n\in$ IR*

1.

a) $\mathrm{D}_{h_n}=\{x\in \mathrm{IR}/\ x>0\}=]0;\ +\infty[$.

b) Calculer les limites de h_n sur D_{h_n}.

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} h_n(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left[x-n+\frac{n}{2}\ln(x)\right]=\begin{cases}+\infty\ si\ n<0\\-\infty\ si\ n>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h_n(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x\left[1-\frac{n}{x}+\frac{n}{2}\frac{\ln(x)}{x}\right]\right]=+\infty$.

c) sens de variation de h_n sur D_{h_n} :

$\forall\ x>0\ h_n'(x)=1+\frac{n}{2x}=\frac{2x+n}{2x}$, son signe dépend de $2x+n$: posons $2x+n=0 \Leftrightarrow x=-\frac{n}{2}$

Si $n<0$ alors $0<-\frac{n}{2}$:

x	0		$-\frac{n}{2}$	$+\infty$
$2x+n$		$-$		$+$
$h'_n(x)$		$-$		$+$

$\forall\ x\in\left]0;-\frac{n}{2}\right[,\ h_n'(x)<0$ alors h_n est strictement décroissante sur $\left]0;-\frac{n}{2}\right[$.

$\forall\ x\in\left]-\frac{n}{2};+\infty\right[,\ h_n'(x)>0$ alors h_n est strictement croissante sur $\left]-\frac{n}{2};+\infty\right[$.

Si $n>0$ alors $0>-\frac{n}{2}$:

x	0		$+\infty$
$h'_n(x)$		$+$	

$\forall\, x \in]\mathbf{0}; +\infty[$, $h_n'(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $]\mathbf{0}; +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variations de h_n :

Si $n < 0$ alors $0 < -\frac{n}{2}$:

$h_n\left(-\frac{n}{2}\right) = -\frac{3n}{2} + \frac{n}{2}\ln\left(-\frac{n}{2}\right)$.

x	0		$-\frac{n}{2}$		$+\infty$
$h'_n(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$h_n\left(-\frac{n}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $n > 0$ alors $0 > -\frac{n}{2}$:

x	0		$+\infty$
$h'_n(x)$	||	$+$	
$h_n(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On suppose que $n > 0$.

a) $h_n < 0 >= -\infty$ et $h_n < +\infty >= +\infty$

h_n est continue et strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur IR.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée $\boldsymbol{\alpha_n}$, telle $h_n(\alpha_n) = 0$.

b) $\begin{cases} h_n(1) = 1 - n \\ h_n(e^2) = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow h_n(1) \times h_n(e^2) < 0$ donc $\mathbf{1 \leq \alpha_n \leq e^2}$.

$h_n(\alpha_n) = \alpha_n - n + \frac{n}{2}\ln(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(\alpha_n) = n - \alpha_n \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = \frac{2n}{n} - \frac{2\alpha_n}{n} \Leftrightarrow \mathbf{\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n}$.

c) $h_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + \frac{n+1}{2}\ln(\alpha_n)$ or $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$ donc $h_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + (n+1)\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{n}\boldsymbol{\alpha_n}\right) = (n+1)\left(-\mathbf{1} + \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{n}\boldsymbol{\alpha_n}\right) + \alpha_n = -\alpha_n - \frac{\mathbf{1}}{n}\boldsymbol{\alpha_n} + \alpha_n = -\frac{1}{n}\alpha_n$.

$h_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n$.

sens de variation de la suite de terme général α_n :

$h_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n$ et $h_{n+1}(\alpha_{n+1}) = -\frac{1}{n+1}\alpha_n$

$h_{n+1}(\alpha_{n+1}) - h_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n+1}\alpha_n + \frac{1}{n}\alpha_n =$

$h_{n+1}(\alpha_{n+1}) - h_{n+1}(\alpha_n) = \frac{-n+1+n}{n(n+1)}\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}\alpha_n$

or $\boldsymbol{\alpha_n} > 0$, **donc** $h_{n+1}(\alpha_{n+1}) - h_{n+1}(\alpha_n) > 0$,
$h_{n+1}(\alpha_{n+1}) > h_{n+1}(\alpha_n)$ or h_{n+1} est continue et strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.
$h_{n+1}(\alpha_{n+1}) > h_{n+1}(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$ donc la suite $\boldsymbol{\alpha_n}$ est croissante.

d) A partir de $1 \leq \alpha_n \leq e^2$ la suite α_n est majorée par e^2 et croissante d'où cette suite converge vers ℓ.
$\mathbf{0 \leq \alpha_n \leq e^2} \Leftrightarrow \mathbf{1} \leq \ln(\alpha_n) \leq \mathbf{2}$ **et** $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$ comme $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \ln(\alpha_n) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2 - \frac{2}{n}\alpha_n\right] = 2$ donc $\boldsymbol{\ell = e^2}$.

3. $g(x) = \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ et $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Calculer les limites de g sur D_g.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}\right] = -\frac{-\infty}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}\right] = +\infty$.

b) $h_1(x) = x - 1 + \frac{1}{2}\ln(x)$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{2\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{2x - x\ln(x)}{x\sqrt{x}}}{4x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2 - \ln(x)}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x - 2 + \ln(x)}{4x\sqrt{x}} = \frac{2}{2} \times \frac{x - 1 + \frac{1}{2}\ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{h_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

$h_1(1) = 0$

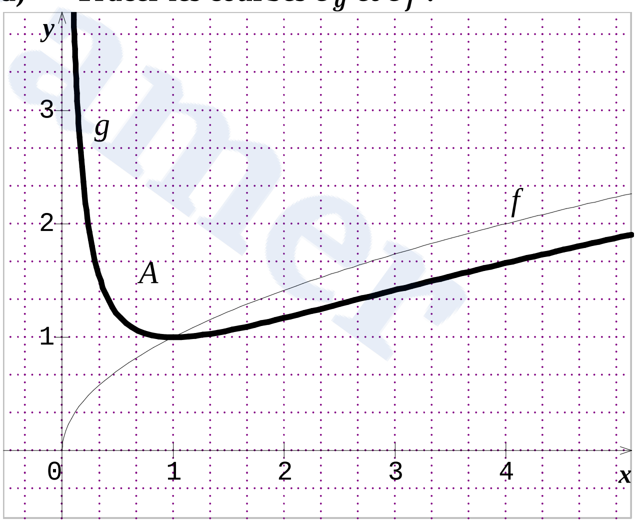
x	0		$\mathbf{1}$		$+\infty$
$h_1(x)$	||	$-$		$+$	
$g'(x)$	||	$-$		$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{1}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $g(x) - f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = -\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$, son signe dépend de $-\ln(x)$: $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- Si $x \in]0; 1[$, $g(x) - f(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.
- Si $x > 1$, $g(x) - f(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_g$ est au dessous de $\mathcal{C}_f$.
- Si $x = 1$ alors le point A$(1; 1)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_f$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[g(x) - f(x)] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}\right] = 0$

d) Tracer les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$:



e) $\mathrm{J} = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}dx = \left[\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \left[\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \left[\sqrt{x}\ln(x) - 2\sqrt{x}\right]_1^2 = \left[\sqrt{x}(\ln(x) - 2)\right]_1^2 = \sqrt{2}(\ln(2) - 2) + 2$.

$\mathrm{I} = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2\left[\sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}\right]dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx - \int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 - \mathrm{J} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} - \mathrm{J} =$

$\mathrm{I} = \int_1^2 g(x)dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3} - \sqrt{2}(\ln(2) - 2) - 2$.

100 exercices corrigés sur les fonctions exponentielles

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur Moussa Abdoulaye Diallo

SMS 90 10 89 59

Problème 101 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = (2xe^x)^2$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
2. **Déterminer les limites de f sur D_f.**
3. **Montrer que pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = 8xe^{2x}(1+x)$. En déduire le sens de variation de f.**
4. **Dresser le tableau de variation de f.**
5. **Déterminer l'équation de la tangente T_A au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$.**
6. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et T_A. (2 cm)**
7. **Soit λ est un réel appartenant à $]-2;-1[$.**

a) **Calculer, en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.**

b) **Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto 1} \mathcal{A}(\lambda) =$.**

Correction : $f(x) = (2xe^x)^2 = 4x^2e^{2x}$

1. $D_f =]-\infty; +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \mathbf{2(2xe^x + 2e^x)}(2xe^x) = \mathbf{4e^x(x+1)}(2xe^x) = 8xe^{2x}(1+x)$ son signe dépend de $x(1+x)$

- $\forall\, x \in]-\infty;-1[\, \cup\,]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]0;+\infty[$
- $\forall\, x \in]-1;0[$, $f'(x) < 0$ alors f est décroissante strictement sur $]-1;0[$.

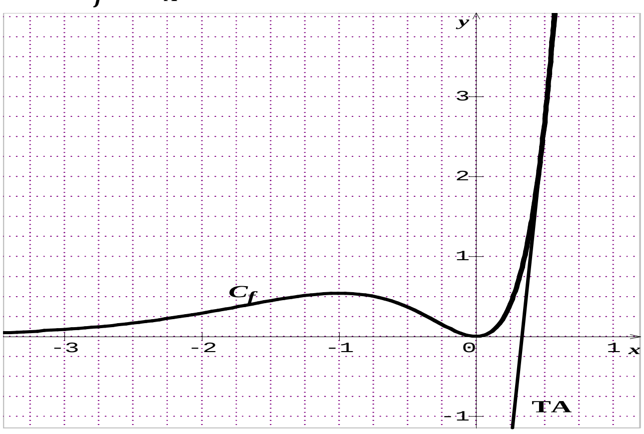
4. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		$-$		+	
$f(x)$	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

5. $T_A : y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6e$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = e$ donc $y = 6ex - 2e$.

6. **$\mathcal{C}_f$ et T_A**



7.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x)]dx \times 4\boldsymbol{cm^2} = 16\int_0^\lambda [x^2e^{2x}]dx\, \boldsymbol{cm^2} = 4[e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)]_0^\lambda \boldsymbol{cm^2} = \left[4e^{2\lambda}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\right]\boldsymbol{cm^2}$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 1} \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) = 4(e^2 - 1)\, \boldsymbol{cm^2}$.

Problème 102 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^x + \frac{2}{e^x} + x$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
2. **Déterminer les limites de f sur D_f.**
3. **Résoudre dans IR, $e^{2x} + e^x - 2 = 0$**
4. **Montrer que pour tout réel $x \in$ IR, $f'(x) = \frac{(2+e^x)(e^x-1)}{e^x}$. En déduire le sens de variation de f.**
5. **Dresser le tableau de variation de f.**
6. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.**
1. **Soit α est un réel appartenant à $]1; 1,5[$.**

a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la droite d'équation $y = x$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.**

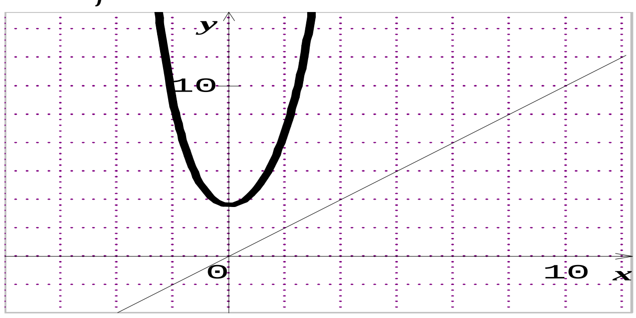
b) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.**

Correction : $f(x) = e^x + \frac{2}{e^x} + x = e^x - 2e^{-x} + x$

1. $D_f =]-\infty; +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $e^{2x} + e^x - 2 = (2 + e^x)(e^x - 1) = 0$, car en posant $e^x = t > 0$ donc $S_{IR} = \{0\}$.
4. $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \boldsymbol{e^x - 2e^{-x} + 1} = \boldsymbol{e^{-x}(e^{2x} + e^x - 2)} = \frac{(2+e^x)(e^x-1)}{e^x}$ son signe dépend de $e^x - 1$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
5. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

6. **$\mathcal{C}_f$**



7. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - y]dx = \int_4^\alpha [e^x + 2e^{-x}]dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = [e^x - 2e^{-x}]_0^\alpha = e^\alpha - 2e^{-\alpha} + 1$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = +\infty$.

<u>Problème 103 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
2. **Montrer que f est continue à gauche de 0.**
3. **Montrer que f est dérivable à gauche de 0.**
4. **Déterminer les limites de f sur sD_f.**
5. **Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$. En déduire le sens de variation de f.**
6. **Dresser le tableau de variation de f.**
7. **Montrer que les droites (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à l'infinie à $\mathcal{C}_f$. Etudier la position relative de (D) par rapport à $\mathcal{C}_f$.**
8. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et (D).**

<u>Correction :</u> $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

1. $D_f = \{x \in IR/\ x \neq 0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2. Par changement de variable, posons $t = \frac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ alors $\lim\limits_{t \mapsto -\infty} \frac{e^t}{t} = 0$, ainsi $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$, f est continue à gauche de 0.

3. $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ alors $\lim\limits_{t \mapsto -\infty} e^t = 0$, ainsi f est dérivable à gauche de 0.

4. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = (-\infty)e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

5. $\forall\, x \neq 0$, $f'^{(x)} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ son signe dépend de $\frac{x-1}{x}$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$

$\forall\, x \in]0; 1[$, $f'(x) < 0$ alors f est décroissante strictement sur $]0; 1[$.

6. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$ 0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$		$+\infty \searrow e$	$\nearrow +\infty$

7. $f(x) - (x + 1) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1 = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right) - 1$

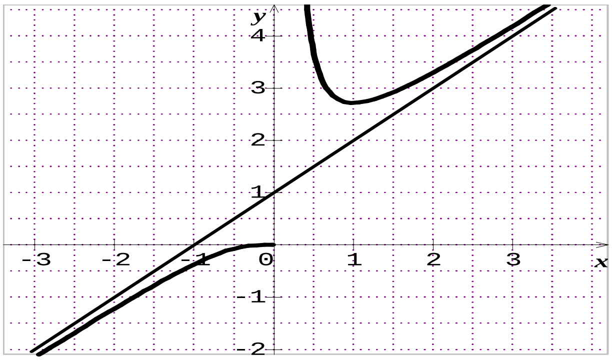
on sait que en posant $t = \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ $t \mapsto 0$

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim\limits_{t \mapsto 0} \left[\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) - 1\right] = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ à l'infinie (en $-\infty$ ou en $+\infty$).

$\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (D) en $-\infty$ et

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (D) en $+\infty$.

8. $\mathcal{C}_f$ **et (D)**



<u>Problème 104 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{4-x} - 3$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
2. **Déterminer les limites de f sur D_f.**
3. **Montrer que pour tout réel $x \in IR$, $f'(x) = e^{4-x}(1 - x)$. En déduire le sens de variation de f.**
4. **Dresser le tableau de variation de f.**
5. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.**
6. **Soit α est un réel appartenant à $]4; 4,1[$.**

a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.**

b) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 4.**

<u>Correction :</u> $f(x) = xe^{4-x} - 3 = \frac{x}{e^x} \times e^4 - 3$

1. $D_f =]-\infty; +\infty[$.

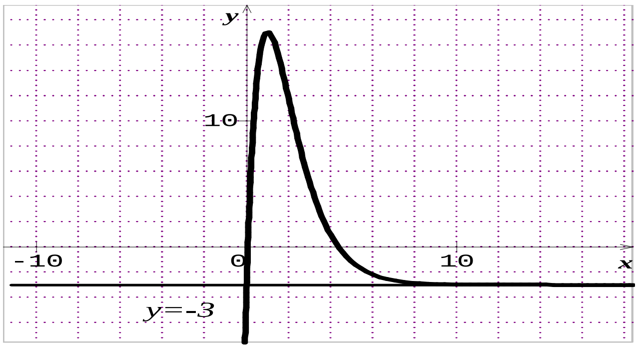
2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = (-\infty)e^{+\infty} = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = -3$.

3. $\forall\, x \in IR$, $f'(x) = e^{4-x} - xe^{4-x} = e^{4-x}(1 - x)$ son signe dépend de $(1 - x)$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

4. **tableau de variation de f :** $m = e^3 - 3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$-$
$h(x)$	$-\infty \nearrow$	m	$\searrow -3$

5. $\mathcal{C}_f$



6. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha}[f(x)]dx = \int_0^{\alpha}[xe^{4-x} - 3]dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = -[e^{4-x}(x+1) + 3x]_0^{\alpha} = -e^{4-\alpha}(\alpha+1) - 3\alpha + e^4$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 4} \mathcal{A}(\alpha) = -17 + e^4$.

Problème 105 :

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^n e^{-x}$ avec $n \in$ IN.

b) Déterminer les limites de f sur D_f.

c) Etudier les variations de f et construire sa courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur IR. On définit la fonction h sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. (On suppose que f est croissante sur l'intervalle [a ; b] (où $0 < a < b$).

a) Déterminer le sens de variation de h sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

b) Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

c) Déduire de ces questions le tableau de variations de la fonction h sur $]0 ; +\infty[$. Tracer $\mathcal{C}_h$.

Correction :

1. $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x}] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(2x^3)e^{-x}] = (-\infty)^3 e^{+\infty} = -\infty$.

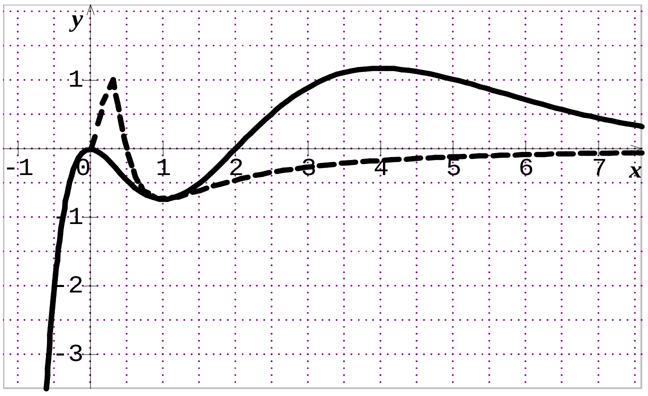
c) $\forall\, x \in$ IR $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x} = -2x(x-4)(x-1)e^{-x}$ son signe dépend de $-2x(x-4)(x-1)$.

donc $\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]1; 4[$ f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; 4[$.

Et $\forall\, x \in]0; 1[\cup]4; +\infty[$ f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et sur $]4; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	$64e^{-4}$	$\searrow$	0

$\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}_h$ en trait discontinu.



2. $\boldsymbol{h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}}$.

a) **sens de variation de h sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.**

$0 < a < b \Leftrightarrow f(0) < f(a) < f(b)$

$h\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = f(a)$ et $h\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) = f(b)$

Or $f(a) < f(b) \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{a}\right) < h\left(\frac{1}{b}\right)$ or $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, ce qui permet de constater que h est décroissante sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}[\boldsymbol{f(t)}] = 0$ en posant $t = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}\right] = 0 \times e^{\frac{1}{+\infty}} = 0$.

c) **tableau de variations de h sur $]0 ; +\infty[$.**

Comme $f(0) < f(a) < f(b)$ alors h est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{b}\right[$ et comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = 0$ ce qui permet de constater que h est aussi strictement croissante sur $\left]\frac{1}{a}; +\infty\right[$. Puis le reste est complété :

x	0		$\frac{1}{b}$		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	0

Problème 106 : **On considère la fonction h définie par : $h(x) = (2x^2 + 3x - 3)e^{-x}$.**

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Etudier le signe du polynôme $p(x) = -2x^2 + x + 6$ suivant les valeurs de x.

3. Déterminer les limites de h sur D_h.

4. Montrer que $\forall\, x \in D_h$, $h'(x) = p(x)e^{-x}$. En déduire le sens de variation de h.

5. Dresser le tableau de variation de h.

6. **Montrer que la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.**

7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

<u>**Correction :**</u> $\boldsymbol{h(x) = \left(2x^2 + 3x - 3\right)e^{-x}}$.

1. $D_h =]-\infty; +\infty[$.
2. Posons $p(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 6 = 0$

$\Delta = 49 \Leftrightarrow x' = 2$ ou $x'' = -\frac{3}{2}$.

$\boldsymbol{p(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-2) = (-2x-3)(x-2)}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$\boldsymbol{-2x-3}$	$+$	$-$		$-$
$x - 4$	$-$	$-$		$+$
$\boldsymbol{p(x)}$	$-$	$+$		$-$

$\forall\ x \in \left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[\cup]2; +\infty[$, $p(x) < 0$

$\forall\ x \in \left]\frac{-3}{2}; 2\right[$, $p(x) > 0$

Si $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 2$, $p(x) = 0$.

3. **les limites de h sur D_h :**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[2x^2 e^{-x}\right] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2x^2 e^{-x}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2\frac{x^2}{e^x}\right] = 0$;

4. $\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = (4x+3)e^{-x} - (2x^2 + 3x - 3e-x=-2x2+x+6e-x=pxe-x.$

sens de variation de h :

x	$-\infty$ $-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$h'(x) = p(x)e^{-x}$	$-$	$+$	$-$

$\forall\ x \in \left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[\cup [2; +\infty[$, $h'(x) < 0$, h est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[$ et sur $\left[\frac{-3}{2}; +\infty\right[$.

$\forall\ x \in \left]\frac{-3}{2}; 2\right[$, $h'(x) > 0$, h est strictement croissante sur $\left]\frac{-3}{2}; 2\right[$.

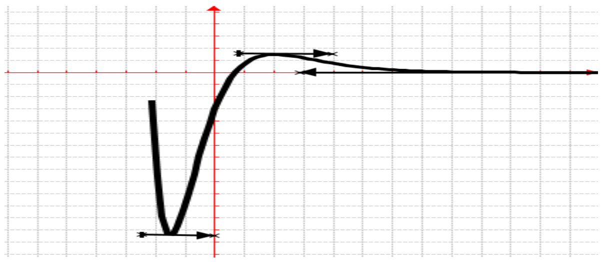
5. **tableau de variation de h :**

$h(2) = 11e^{-2} = 1{,}48$; $h\left(\frac{-3}{2}\right) = -3e^{-\frac{3}{2}} = -0{,}669$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0{,}669$	$\nearrow$	$1{,}48$	$\searrow$	0

6. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[2xe^{-x}\right] = -\infty$ alors la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$:**



<u>**Problème 107 :**</u> **On considère la fonction f définie par :** $\boldsymbol{f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}}$.

1. **Montrer que la fonction f définie sur IR est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.**

2.

a) **Déterminer les limites de f sur IR.**

b) **Etudier le sens de variation de f définie sur IR. En déduire le sens de variation de f.**

c) **Dresser le tableau de variation de f sur IR.**

3.

a) **Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0, appartient à $[-1; 1]$.**

b) **En déduire le signe de $f(x)$ sur IR.**

c) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR, $f''(x) = x(x^2 -$**

$3e-x22$.

d) **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet trois points d'inflexion α, β, γ tels que $\alpha < \beta < \gamma$ dont on déterminera leurs abscisses.**

4. **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.**

Construire la courbe $\mathcal{C}_f$, et T.

<u>**Correction :**</u> $\boldsymbol{f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}}$.

1. $\forall\, x \in$ IR, $f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$, f est une fonction impaire. donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O. On peut aussi l'étudier sur $]-\infty; -1]$ ou sur $[0; +\infty[$.

2.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.

b) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$ son signe dépend de $(1 - x^2)$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $]-1; 1[$.

c) **tableau de variation de f sur IR.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0{,}61$	$\nearrow$	$0{,}61$	$\searrow$	0

3.

a) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc sur $[-1; 1]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation admet une unique solution $x_0 = 0$.

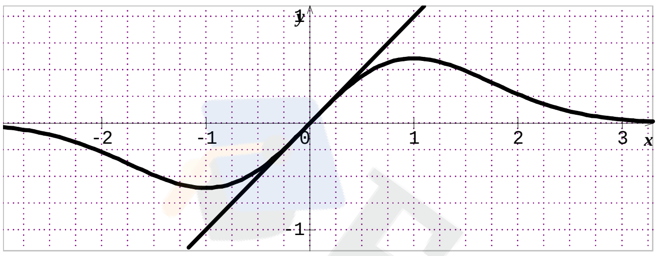
b) Sur $]-\infty; 0]$, $f(x) \leq 0$ et sur $[0; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

c) $\forall\, x \in$ IR, $f''(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} - x(1 -$ *x2e−x22=−2−1+x2xe−x22=xx2−3e−x22.*

d) Trois points d'inflexion dont on déterminera leurs abscisses : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$ $x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\sqrt{3}$, $\beta = 0$ et $\gamma = \sqrt{3}$.

4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, ainsi $T_0 : y = x$.

$\mathcal{C}_f$ et T.



Problème 108 : Soit g définie par :

$$g(x) = e^x + x - 5.$$

1.

a) Etudier le sens de variation de g et ses limites en $+\infty$ *et* $-\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur IR.

2.

a) Calculer $g(0)$ et $g(2)$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution α et une seule. Justifier l'encadrement : $1,30 < \alpha < 1,31$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 5$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$.

4. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$ et (d).

Correction : $g(x) = e^x + x - 5$.

1.

a) $\forall\, x \in$ IR, $g'(x) = e^x + 1 > 0$, g est strictement croissante sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x + x - 5] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^x + x - 5] = +\infty$.

b) Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.

a) Calculer $g(0) = -5$ et $g(2) = 4,38$.

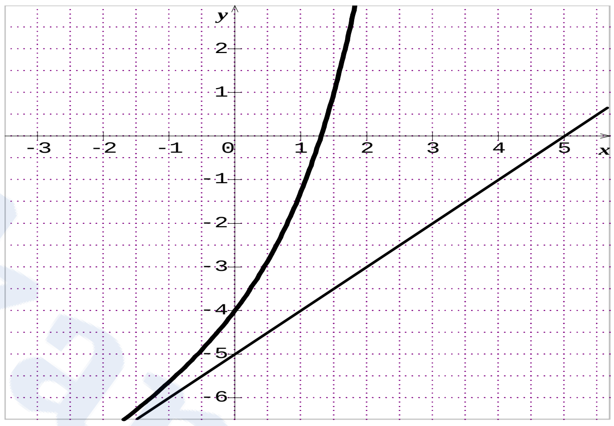
b) g est continue et strictement croissante sur IR et $g(0) \times g(2) < 0$ or $0 \in [-5; 4,38]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution α et une seule.

Justifier l'encadrement : $1,30 < \alpha < 1,31$. Comme $[g(1,30) = -3,07.10^{-2}] \times [g(1,31) = 1,62.10^{-2}] < 0$ alors $1,30 < \alpha < 1,31$.

Une valeur approchée de $\alpha = \frac{1,3+1,31}{2} = 1,305$.

3. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[g(x) - (x - 5)] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x] = 0$ alors la droite (d) d'équation $y = x - 5$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$.

4. $\mathcal{C}_g$ et (d) : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{x} + 1 - \frac{5}{x}\right] = +\infty$, donc $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Problème 109 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = \ln(e^{-x} + e^x) - 3$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Déterminer les limites de h sur D_h.

3. <u>Etude de $\ln(e^{-x} + e^x) + p$:</u>

a) Montrer que $h(x) = -x - 3 + \ln(1 + e^{2x})$.

b) Montrer que $h(x) = x - 3 + \ln(1 + e^{-2x})$.

c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$.

d) Montrer que la droite (d') d'équation $y = x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

4.

a) Montrer que $\forall\, x \in D_h$, $h'(x) = \frac{e^{-x}(-1+e^{2x})}{e^{-x}+e^x}$.

b) En déduire le sens de variation de h.

c) Dresser le tableau de variation de h.

5. Tracer les droites (d) et (d') et la courbe $\mathcal{C}_h$.

Correction : $h(x) = \ln(e^{-x} + e^x) - 3$.

1. $D_h =]-\infty;+\infty[$.

2. **les limites de h sur D_h :**

$\lim_{x\mapsto -\infty} h(x) = \lim_{x\mapsto -\infty}[\ln(e^{-x}) - 3] = +\infty$;

$\lim_{x\mapsto +\infty} h(x) = \lim_{x\mapsto +\infty}[\ln(e^{x}) - 3] = +\infty$;

3. **Etude de $\ln(e^{-x}+e^{x})+p$:** on applique $\ln(a.b) = \ln(a)+\ln(b)$ et $\ln(e^{mx}) = mx$.

a) **Montrer que $h(x) = -x-3+\ln(1+e^{2x})$:**

$\forall\ x \in]-\infty;+\infty[,\ h(x) = \ln[e^{-x}(1+e^{2x})] - 3$

$\forall\ x \in]-\infty;+\infty[,\ h(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(1+e^{2x}) - 3 = -x-3+\ln(1+e^{2x})$.

b) **Montrer que $h(x) = x-3+\ln(1+e^{-2x})$**

$\forall\ x \in]-\infty;+\infty[,\ h(x) = \ln[e^{x}(1+e^{-2x})] - 3$

$\forall\ x \in]-\infty;+\infty[,\ h(x) = \ln(e^{x}) + \ln(1+e^{-2x}) - 3 = x-3+\ln(1+e^{-2x})$.

c) $h(x) - y = h(x) - (-x-3) = \ln(1+e^{2x})$

$\lim_{x\mapsto -\infty}[h(x)-y] = \lim_{x\mapsto -\infty}[\ln(1+e^{2x})] = 0$ alors la droite (d) d'équation $y = -x-3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$.

d) $h(x) - y = h(x) - (x-3) = \ln(1+e^{-2x})$

$\lim_{x\mapsto +\infty}[h(x)-y] = \lim_{x\mapsto +\infty}[\ln(1+e^{-2x})] = 0$ alors la droite (d') d'équation $y = x-3$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

4.

a) $\forall\, x \in IR,\ h'(x) = \frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{e^{-x}(-1+e^{2x})}{e^{-x}+e^{x}}$.

b) **le sens de variation de h :**

posons $-1+e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$

$\forall\ x \in]-\infty;0[,\ h'(x) < 0$, h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

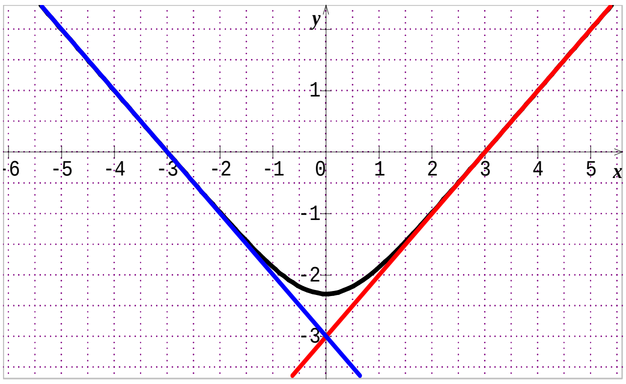
$\forall\ x \in [0;+\infty[,\ h'(x) > 0$, h est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c) **tableau de variation de h :**

$h(0) = \ln 2 - 3 = -2{,}306$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2{,}3$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Tracer les droites (d) et (d') et la courbe $\mathcal{C}_h$:**



Problème 110 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$**

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **Etudier les limites de f sur D_f.**

c) **Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

2. **Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point anguleux à déterminer.**

3. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$**

4. **Déterminer les équations des tangentes T_A et T_B aux points respectifs A et B d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$ et 3.**

5. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$; T_A et T_B**

Correction : $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1}$

1.

a) $D_f = \{x/x \in IR,\ x^2+1 \neq 0\} =]-\infty;+\infty[$.

b) $\lim_{x\mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{e^x}{x^2+1}\right] = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = e^{-\infty} \times \frac{1}{+\infty} = 0$;

$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{x^2}\right] = +\infty$.

c) $\forall\, x \in IR,\ f'(x) = \frac{(x^2+1)e^x - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)e^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2} > 0$; alors f est strictement croissante sur IR.

d) **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. **les branches infinies** $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^3} \times \frac{x^2}{x^2+1}$

Asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

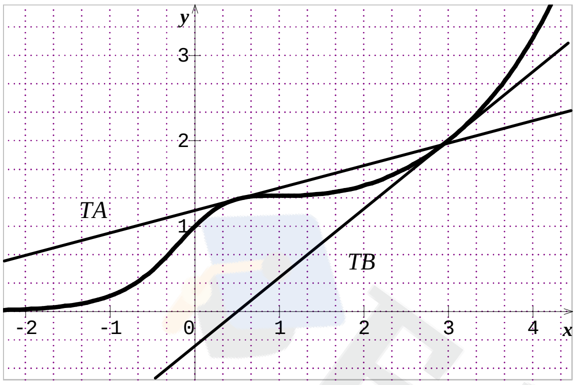
Branche parabolique de direction (Oy) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x^3} \times \frac{x^2}{x^2+1}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x^3}\right] = +\infty$.

3. $\mathrm{T_A} \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{e}}{5} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{e}}{25} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{4\sqrt{e}}{25}x + \frac{18\sqrt{e}}{25}$

et $\mathrm{T_B} \begin{cases} f(3) = \frac{e^3}{10} \\ f'(3) = \frac{e^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{e^3}{25}x - \frac{e^3}{50}$

4. courbe $\mathcal{C}_f$; $\mathrm{T_A}$ et $\mathrm{T_B}$:



<u>Problème 111 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{xe^x+1}$

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{x+e^{-x}}$.

c) Etudier les limites de f sur D_f.

d) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{(1-e^x)e^x}{(xe^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.

e) Dresser le tableau de variation de f.

2. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{e^x}{xe^x+1}$

1.

a) $\mathrm{D}_f =]-\infty; +\infty[$.

b) $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{e^x}{xe^x+1} = \frac{1}{x+e^{-x}}$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{e^x}{xe^x+1} = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x+e^{-x}} = 0$.

d) $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ f'(x) = \frac{(1+xe^x)e^x - e^x(xe^x+e^x)}{(xe^x+1)^2} = \frac{(1+xe^x-xe^x-e^x)e^x}{(xe^x+1)^2} = \frac{(1-e^x)e^x}{(xe^x+1)^2}$ son signe dépend de celui de $(1-e^x)$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et

f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

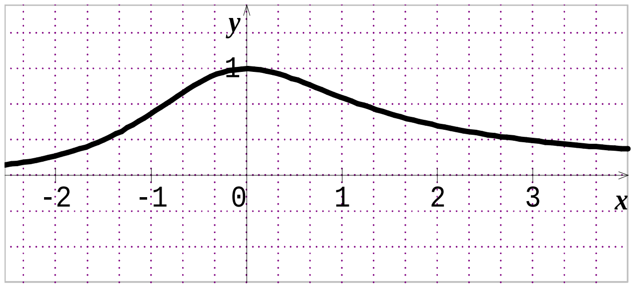
e) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. les branches infinies

Asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

3. $\mathcal{C}_f$.



<u>Problème 112 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1-e^x}{e^x-2}$

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{D}_f$, $\frac{1-e^x}{e^x-2} = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}-2}$.

c) Etudier les limites de f sur D_f.

d) Résoudre dans IR, $e^{2x} - 3e^x + 4 = 0$.

e) Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{D}_f$, $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x-2)^2}$.

En déduire le sens de variation de f.

f) Dresser le tableau de variation de f.

2.

a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Préciser leurs positions relatives.

b) Montrer que la droite (d') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Préciser leurs positions relatives.

c) Tracer les droites (d) et (d') et la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Calculer, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \ln 3$ et $x = \ln 4$ et $\mathcal{C}_f$.

<u>Correction :</u> $f(x) = x - 1 + \frac{1-e^x}{e^x-2}$

1.

a) $\mathrm{D}_f = \{x \in \mathrm{IR}\ /e^x - 2 \neq 0\} =]-\infty; \ln 2[\, \cup\,]\ln 2\,; +\infty[$.

b) $\forall\, x \neq \ln 2\ \ \frac{1-e^x}{e^x-2} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{1-e^x}{e^x-2} = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}-2}$.

c) Par changement de variable, posons $t = e^x$ alors

$\begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{1-t}{t-2} = -\frac{1}{2} \quad et \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1-t}{t-2} = -1 \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.

d) $e^{2x} - 3e^x + 4 = 0$, $\Delta = -7$ en posant $e \quad = X$ alors $S_{IR} = \emptyset$.

e) $\forall x \neq \ln 2$ $f'(x) = 1 + \frac{-e^x(e^x-2)-e^x(1-e^x)}{(e^x-2)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{e^{2x}-3e^x+4}{(e^x-2)^2} > 0$; alors f est strictement croissante sur $]-\infty;\ln 2[$ et sur $]\ln 2;+\infty[$.

f) **Dressons le tableau de variation de h.**

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2.

a) $f(x) - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1-e^x}{e^x-2} = \frac{-e^x}{2e^x-4}$,

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[f(x) - x + \frac{3}{2}\right] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1-e^x}{e^x-2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

donc la droite (d) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

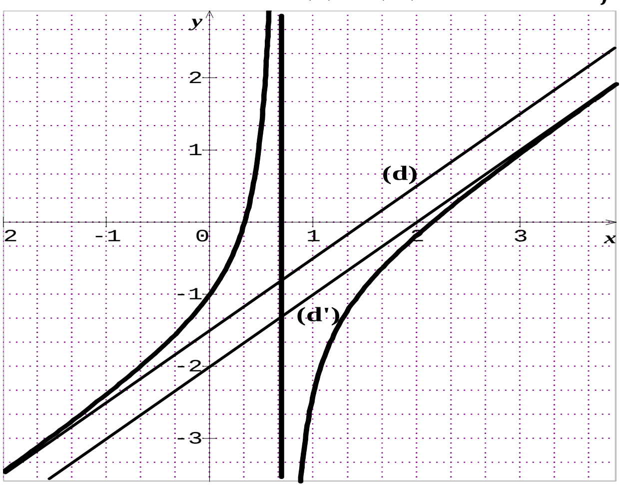
$\forall x \in]-\infty;\ln 2[$ $f(x) - x + \frac{3}{2} = \frac{-e^x}{2e^x-4} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (d).

b) $f(x) - x + \mathbf{2} = 1 + \frac{1-e^x}{e^x-2} = \frac{-1}{e^x-2}$,

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - x + \mathbf{2}] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{-1}{e^x-2}\right] = \frac{-1}{+\infty} = 0$ donc la droite (d') d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\forall x \in]\ln 2;+\infty[$ $f(x) - x + 2 = \frac{-1}{e^x-2} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (d').

c) **Tracer les droites (d) et (d') et la courbe $\mathcal{C}_f$**



3. $\mathcal{A} = -\int_{\ln 3}^{\ln 4}[f(x)]dx = \int_{\ln 3}^{\ln 4}\left[-x + 1 - \frac{1-e^x}{e^x-2}\right]dx = \int_{\ln 3}^{\ln 4}\left[-x + 1 - \frac{1}{e^x-2} + \frac{e^x}{e^x-2}\right]dx$ or

$\frac{1}{e^x-2} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1-2e^{-x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{-x}}{1-2e^{-x}}$ donc $\mathcal{A} = \left[\frac{-1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\ln(1-2e^{-x}) + \ln(e^x-2)\right]_{\ln 3}^{\ln 4} =$

$\mathcal{A} = 1{,}73 - 1{,}09 = 0{,}642$

<u>Problème 113 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **Etudier les limites de f sur D_f.**

c) **Montrer que pour tout réel $x \neq -1$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.**

d) **Dresser le tableau de variation de f.**

e) **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$**

Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. **Soit x un réel positif.**

On pose $h(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1}dt$.

a) **Montrer que pour tout réel x positif, $\frac{e^x}{x+1} \geq 1$.**

b) **Montrer que la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.**

c) **Prouver que $h(2) \geq 1$.**

d) **En déduire qu'il existe un réel c appartenant à $[1;2]$ tel que $h(c) = 1$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{e^x}{x+1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x+1}$.

1.

a) $D_f = \{x \in IR/\ x + 1 \neq 0\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = e^{-\infty} \times \frac{1}{-\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x+1}\right] = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$.

c) $\forall x \neq -1$, $f'(x) = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$; alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;0[$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

d) **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$		$+$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

e) **les branches infinies**

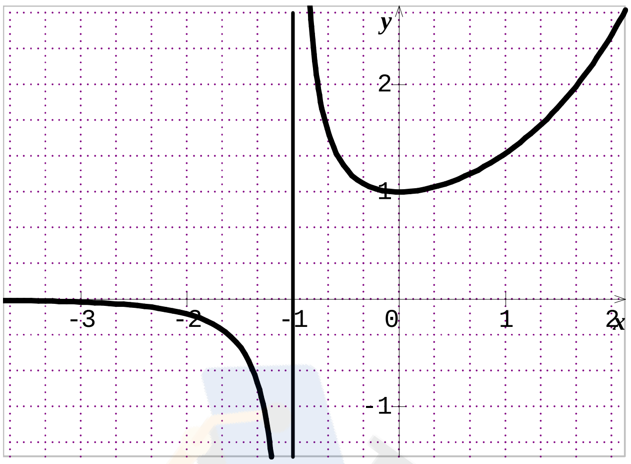
Asymptote verticale d'équation : $x = -1$ et Asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

Branche parabolique de direction (Oy) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right] = +\infty$.

$\mathcal{C}_f$



2. $\boldsymbol{x > 0}$**. On pose** $\boldsymbol{h(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+1} dt}$**.**

a) Montrons que $\boldsymbol{\forall x > 0, \frac{e^x}{x+1} \geq 1}$**.**

$\frac{e^x}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq x+1 \Leftrightarrow \int_1^x e^t\,dt \geq \int_1^x (t+1)dt \Leftrightarrow \int_1^x [e^t - (t+1)]\,dt \geq 0$ (vraie). Considérons la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - (x+1)$. Cette fonction est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. $g'(x) = e^x - 1$qui s'annule en $x = 0$ et est positif sur $[0; +\infty[$; donc la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$et son mimimum est $g(0) = 0$, donc elle est positive sur $[0; +\infty[$; ainsi $e^x \leq x+1$, et comme $x + 1 > 0$, en divisant par $x + 1$, on obtient $\frac{e^x}{x+1} \geq 1$.

b) Montrons que la fonction $\boldsymbol{h}$ **est continue sur** $\boldsymbol{[0; +\infty[}$ **:** Pour x positif, la fonction h est la primitive de la fonction qui à t associe $\frac{e^t}{t+1}$, qui s'annule en $x = 1$; donc la fonction h est dérivable et $h'(x) = \frac{e^t}{x+1}$. La fonction étant dérivable, elle est continue sur $[0; +\infty[$.

c) Prouvons que $\boldsymbol{h(2) \geq 1}$ **:**

$h(2) = \int_1^2 \frac{e^t}{t+1} dt \geq \int_1^2 dt = [t]_1^2 = 1$.

d) Déduction qu'il existe un réel $\boldsymbol{c}$ **appartenant à [1; 2] tel que** $\boldsymbol{h(c) = 1}$**.**

On a $h(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t+1} dt = 0$; la fonction h est continue de $[1; 2]$ dans $[h(1); h(2)] = [0; h(2)]$ avec $h(2) \geq 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k dans $[0; h(2)]$ il existe un réel c de $[1; 2]$ tel que $h(c) = k$; or $1 \in [0; h(2)]$ donc il existe un réel c de $[1; 2]$ tel que $h(c) = 1$.

<u>Problème 114 :</u> On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ **définie par :** $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{5e^x - 2}}$

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$ **?**

b) Etudier les limites de $\boldsymbol{f}$ **sur** $\boldsymbol{D_f}$**.**

c) Montrer que pour tout réel $\boldsymbol{x \in D_f, f'(x) = \frac{-2e^x}{(5e^x-2)^2}}$**. En déduire le sens de variation de** $\boldsymbol{f}$**.**

d) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$**.**

2. Etudier les branches infinies de $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$

3. Montrer que $\boldsymbol{f}$ **est bijective de** $\boldsymbol{\left]\ln\frac{2}{5}; +\infty\right[}$ **sur un intervalle à déterminer. Expliciter la fonction** $\boldsymbol{f^{-1}}$ **réciproque de** $\boldsymbol{f}$**.**

4. Tracer les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f^{-1}}}$**.**

5. Soit $\boldsymbol{\alpha}$ **est un réel appartenant à** $\boldsymbol{\left]-1; \frac{-1}{2}\right[}$**.**

a) Calculer, l'aire $\boldsymbol{\mathcal{A}(\alpha)}$ **de la partie du plan limitée par l'axe** $\boldsymbol{(O\vec{\imath})}$**, les droites d'équations** $\boldsymbol{x = \alpha}$**,** $\boldsymbol{x = 0}$ **et** $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$**.**

b) Calculer la limite de $\boldsymbol{\mathcal{A}(\alpha)}$ **lorsque** $\boldsymbol{\alpha}$ **tend vers** $\boldsymbol{+\infty}$**.**

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{5e^x-2}}$

1.

a) $D_f = \{x \in IR/\ 5e^x - 2 \neq 0\} = \left]-\infty; \ln\frac{2}{5}\right[\cup \left]\ln\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

b) Par changement de variable, posons $t = e^x$ alors

$\begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{t}{5t-2} = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{t}{5t-2} = \frac{1}{5} \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \frac{1}{5}$. $\lim\limits_{x \mapsto \left(\ln\frac{2}{5}\right)^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto \left(\ln\frac{2}{5}\right)^+} f(x) = +\infty$

c) $\forall\, x \neq \ln\frac{2}{5}, f'(x) = \frac{(5e^x-2)e^x - 5e^{2x}}{(5e^x-2)^2} = \frac{5e^{2x} - 5e^{2x} - 2e^x}{(5e^x-2)^2} = \frac{-2e^x}{(5e^x-2)^2} < 0$; alors f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \ln\frac{2}{5}\right[$ et sur $\left]\ln\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

d) Dressons le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$**.**

x	$-\infty$	$\ln\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	$\frac{1}{5}$

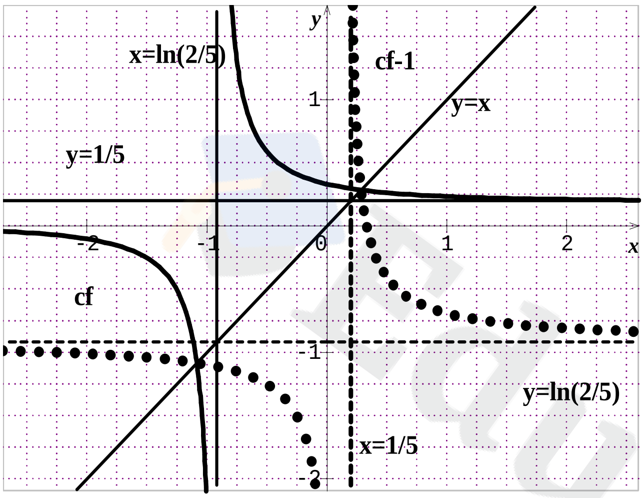
2. **les branches infinies** Asymptote verticale d'équation : $x = \ln\frac{2}{5}$. Asymptotes horizontales d'équation : $y = 0$ et $y = \frac{1}{5}$.

3. f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise une bijective de $\left]\ln\frac{2}{5};+\infty\right[$ sur $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$.

$\frac{e^x}{5e^x-2} = y \Leftrightarrow x = \ln\left|\frac{2y}{5y-1}\right|$ donc

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{5};+\infty\right[,\ f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2x}{5x-1}\right)$.

4. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.**



5. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)dx = \frac{1}{5}\int_\alpha^0 \left[\frac{5e^x}{5e^x-2}\right]dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{1}{5}\ln|5e^x-2|\right]_\alpha^0 = \frac{1}{5}[\ln 3 - \ln 5e\alpha-2$

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = -\infty$.

Problème 115 :

A. **On considère la fonction h définie par :** $h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$. **d'unité graphique 2 cm.**

1. **Déterminer les limites de h sur D_h.**
2. **Etudier le sens de variation de h.**

Dresser le tableau de variation de h.

3. **Montrer que I(0,1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_h$.**
4. **Tracer $\mathcal{C}_h$.**

B.

a) **Démontrer que la restriction f de h à l'intervalle $]0;+\infty[$ admet une application réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.**

b) **Expliciter f^{-1}.**

c) **Expliciter $(f^{-1})'$.**

- **En utilisant l'expression de $f^{-1}(x)$ calculer au b).**
- **En utilisant le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque.**

a) **Calculer la dérivée de f^{-1} en 3.**

b) **Construire la représentation graphique de l'application f^{-1}.**

d) **Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point B d'abscisse 4.**

C. **On considère la fonction g définie par :** $g(x) = \ln|e^{2x}-1|$. **d'unité graphique 2 cm.**

1.

a) **Montrer que pour tout réel x non nul g est une primitive de h.**

b) **Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ et $\mathcal{C}_f$.**

2.

a) **Déterminer les limites de g sur D_g.**

b) **Etudier les variation de g.**

c) **Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_g$.**

d) **Construire $\mathcal{C}_g$ et la droite (D) dans un autre repère orthonormé.**

Correction :

A. **$h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$. d'unité graphique 2 cm.**

1. **Déterminer les limites de h sur D_h.**

$D_h = \{x \in IR/\ e^{2x} - 1 \neq 0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Par changement de variable, posons $t = e^x$ alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0 \ \ et \ \lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{2t^2}{t^2-1} = 0 \ \ et \ \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{2t^2}{t^2-1} = 2 \end{cases} \text{donc}$$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = 2$. $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = +\infty$.

2. **Etudier le sens de variation de h.**

$\forall\, x \neq 0,\ h'(x) = \frac{4(e^{2x}-1)e^{2x}-4e^{4x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{4e^{4x}-4e^{4x}-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$-$
$h(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

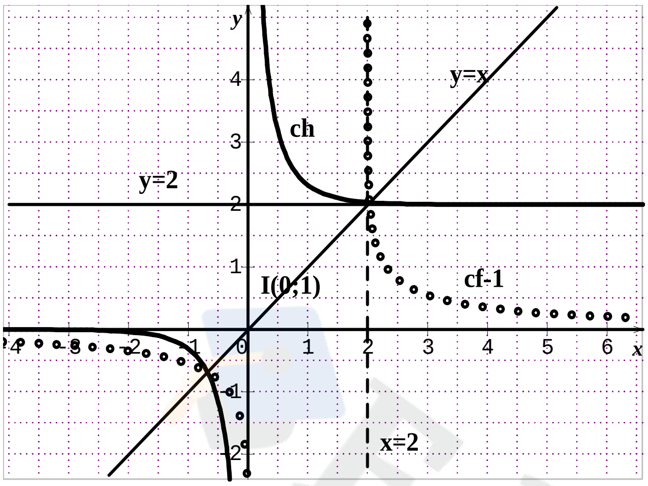
3. Montrer que I(0,1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_h$.

$$h(2a-x)+h(x)=2b=2$$

$h(-x)+h(x)=\frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}+\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\times\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}=\frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}+\frac{2}{1-e^{-2x}}=\frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}+\frac{-2}{e^{-2x}-1}=\frac{2e^{-2x}-2}{e^{-2x}-1}=\frac{2(e^{-2x}-1)}{e^{-2x}-1}=2$

d'où I(0,1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_h$

4. Tracer $\mathcal{C}_h$:



B.

a) f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]2;+\infty[$. Elle admet une application réciproque f^{-1} définit sur $]2;+\infty[$.

b) Expliciter f^{-1} :

$\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}=y\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y-2}\right|$ donc

$\forall\, x\in\,]2;+\infty[,\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)$

c) Expliciter $(f^{-1})'$

- $\forall\, x\neq 2,\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{2}\frac{\frac{-2}{(x-2)^2}}{\frac{x}{x-2}}=\frac{-1}{x(x-2)}$.
- $f'of^{-1}(x)=f'[f^{-1}(x)]=h'[f^{-1}(x)]=$

$$f'of^{-1}(x)=\frac{-4e^{2f^{-1}(x)}}{\left(e^{2f^{-1}(x)}-1\right)^2}=\frac{-4e^{2\ln\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)}}{\left(e^{2\ln\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right)}-1\right)^2}=$$

$$f'of^{-1}(x)=\frac{-4\left(\frac{x}{x-2}\right)}{\left(\frac{x}{x-2}-1\right)^2}=\frac{-4x}{x-2}\times\left(\frac{x-2}{2}\right)^2=-x(x-2)$$

$\forall\, x\neq 2\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'of^{-1}(x)}=\frac{-1}{x(x-2)}$.

c) Calculer la dérivée de f^{-1} en 3.

$(f^{-1})'(3)=\frac{-1}{3(3-2)}=-\frac{1}{3}$.

d) $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ voir le tracé discontinu ci-dessus.

d) Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point B d'abscisse 4.

$(f^{-1})'(4)=\frac{-1}{4(4-2)}=-\frac{1}{8}$.

C. $g(x)=\ln\left|e^{2x}-1\right|$. d'unité graphique 2 cm.

1.

a) $\forall\, x\neq 0\ g'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}=h(x)$ alors que pour tout réel x non nul g est une primitive de h.

b) $\mathcal{A}=4[\ln|e^{2x}-1|]_1^2 cm^2=4[\ln(e^4-1)-$ ln$e2−1cm2=4$ln$e4−1e2−1cm2$

2.

a) Déterminer les limites de g sur D_g.

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/\ e^{2x}-1\neq 0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[\ln(1-e^{2x})]=\ln 1=0$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[\ln(e^{2x}-1)]=+\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\ln(1-e^{2x})=\ln 0^-=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\ln(e^{2x}-1)=\ln 0^+=-\infty$.

b) Etudier les variation de g.

$\forall\, x\neq 0,\ g'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}=h(x)$

$\forall\, x\in\,]-\infty;0[,\ g'(x)<0$ alors g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\forall\, x\in\,]0;+\infty[,\ g'(x)>0$ alors g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

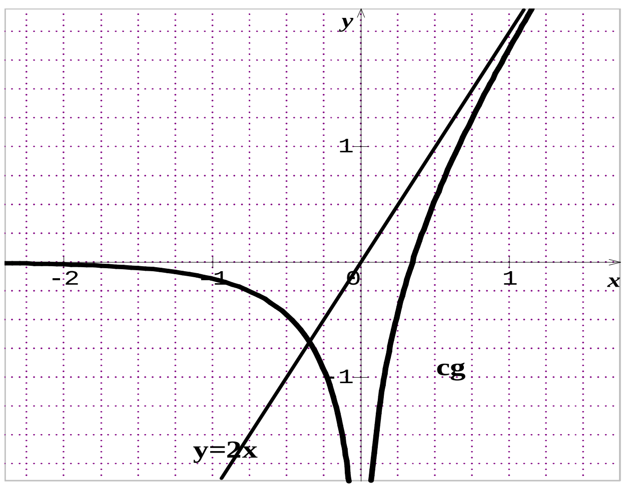
Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

c) $g(x)-y=\ln(e^{2x}-1)-2x=\ln[e^{2x}(1-$ $e−2x−2x=2x+$ln$1−e−2x−2x=$ln$1−e−2x$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[g(x)-y]=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[\ln(1-e^{-2x})]=0$ donc la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ **en $+\infty$.**

d) Construire $\mathcal{C}_g$ et la droite (D).



<u>Problème 116 :</u> d'unité graphique 2 cm

A. On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$.

1. Montrer que $f(x) = \frac{6e^x}{e^x+5}$. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Déterminer les limites de f sur D_f.

3. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T.

B. Calculer en cm², l'aire de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $\begin{cases} 0 \le x \le \ln 2 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

C. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout n entier naturel.

a) Interpréter géométriquement.

b) Quel est le sens de variation de cette suite ?

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 5,999$.

<u>Correction :</u>

A. $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}}$.

1. $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{6e^x}{e^x+5}$

$D_f =]-\infty; +\infty[$

2. Déterminer les limites de f sur D_f.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{6}{1+5e^{-x}}\right] = \frac{6}{1+5e^{+\infty}} = \frac{6}{+\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{6e^x}{e^x+5}\right] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{6e^x}{e^x}\right] = 6$

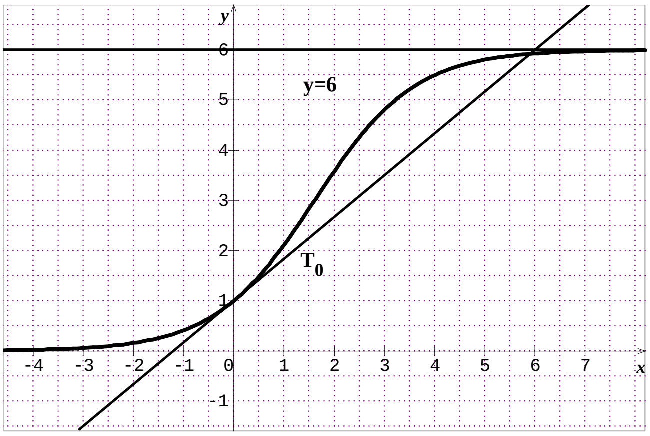
3. $\forall\, x \in \mathrm{IR}\ f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1+5e^{-x})^2} > 0$ alors f est strictement croissante sur IR.

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	6

4. T $\begin{cases} f(0) = \frac{6}{6} = 1 \\ f'(0) = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x + 1.$

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T.



B. $\mathcal{A} = 4\int_0^{\ln 2} f(x)dx\, cm^2 = 4\int_0^{\ln 2} \frac{6e^x}{e^x+5}dx\, cm^2 = 24[\ln(e^x+5)]_0^{\ln 2} cm^2 = 24[\ln(7) - \ln(6)]cm^2 = 24\ln\left(\frac{7}{6}\right) cm^2$.

$$\mathcal{A} = 3,69\ cm^2$$

C. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_n = f(n)$ pour tout n entier naturel.

a) Interpréter géométriquement

Comme $f(x)$ possède les mêmes caractéristiques que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{6e^n}{e^n+5}\right] = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{6e^n}{e^n}\right] = 6$

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Vous pouvez démontrer que $u_{n+1} - u_n > 0$.

c) $u_n > 5,999 \Leftrightarrow \frac{6}{1+5e^{-n}} > 5,999 \Leftrightarrow 6 - 5,999 > 29,995e^{-n} \Leftrightarrow n > \ln\left(\frac{29,995}{6-5,999}\right) \Leftrightarrow n > 10,3$ donc ce nombre est 10.

<u>Problème 117 :</u> Soit P est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note E le point de coordonnées $(\ln 2 ; \ln 2)$.

1. On considère la fonction f définie par :
$f(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$ **tel que $(a, b) \in \mathrm{IR}^2$.**

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Calculer la dérivée de f.

b) Trouver les réels non nuls a et b pour que $\mathcal{C}_f$ passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. On se propose d'étudier $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$.

a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
$f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$.

b) Déterminer les limites de f sur D_f.

c) Montrer que les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = x + 2$ et $y = x - 2$ sont des

asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à chacune de ces droites.

d) Etudier le sens de variation de f sur son domaine de définition. Dresser le tableau de f.

e) Construire $\mathcal{C}_f$ et les droites (d) et (d') et la tangente T_E au point E.

3. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = \ln 2$.

<u>**Correction :**</u> **E le point de coordonnées $(\ln 2\,;\ln 2)$.**

1. $f(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$ **tel que** $(a,b) \in \text{IR}^2$.

a) $D_f =]-\infty;+\infty[$. **Calculer la dérivée de f.**

$\forall\, x \in \text{IR}\; f'(x) = a - \frac{4(e^x+2)e^x - 4e^{2x}}{(e^x+2)^2} = a - \frac{4e^{2x}-4e^{2x}+8e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{ae^{2x}+4(a-2)e^x+4a}{(e^x+2)^2}$.

b) $\begin{cases} f(\ln 2) = \ln 2 + b - 2 = \ln 2 \\ f'(\ln 2) = \frac{16a-16}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

2. $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$

a) $\forall\, x \in \text{IR}\; f(x) = x - 2 + \left(4 - \frac{4e^x}{e^x+2}\right) = x - 2 + \frac{4e^x+8-4e^x}{e^x+2} = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$.

b) Déterminer les limites de f sur D_f.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[x - 2 + \frac{8}{e^x+2}\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}\right] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x+2}\right] = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Comme $f(x) - y = -\frac{4e^x}{e^x+2} < 0$ alors la droite (d) est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{8}{e^x+2}\right] = 0$ donc la droite (d') d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Comme $f(x) - y = \frac{8}{e^x+2} > 0$ alors la droite (d) est au-dessous de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

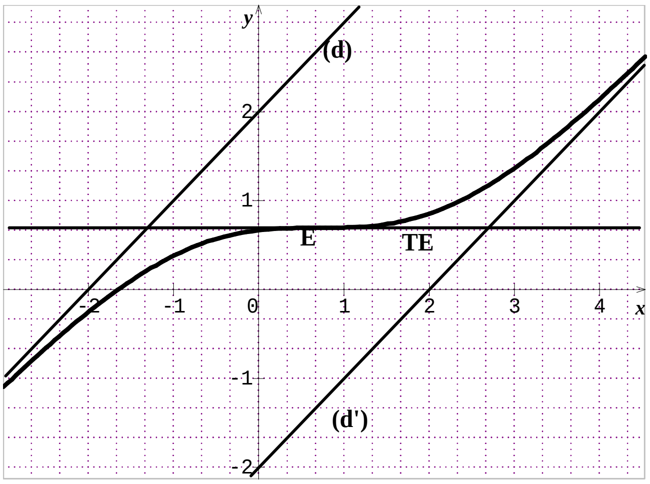
d) $\forall\, x \in \text{IR}\; f'(x) = \frac{e^{2x}-4e^x+4}{(e^x+2)^2} = \frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2} > 0$ alors f est strictement croissante sur IR

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

e) Construire $\mathcal{C}_f$ et les droites (d) et (d')

$T_E \begin{cases} f(\ln 2) = \ln 2 \\ f'(\ln 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \ln 2$



3. primitive de f qui s'annule pour $x = \ln 2$.

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4\ln(e^x + 2) + k$ avec k est constante ; la primitive de f qui s'annule pour $x = \ln 2$: $F(\ln 2) = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + 2\ln 2 - 4\ln\left(e^{\ln 2} + 2\right) + k = 0 \Leftrightarrow k = \ln 2\left(\frac{1}{2}\ln 2 - 6\right)$ donc

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4\ln(e^x + 2) + \ln 2\left(\frac{1}{2}\ln 2 - 6\right)$.

<u>**Problème 118 :**</u> **Soit la fonction f définie par :**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & si\;\; x < 0 \\ 2 & si\;\; x = 0 \\ x + 2 - x\ln x & si\;\; x > 0 \end{cases}.$$

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de f sur D_f.

d) Etudier les branches infinies.

2. En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f.

3. Construction de la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. Soit la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 2$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le (\Delta_1) \le f(x) \end{cases}$.

<u>**Correction :**</u> $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & si\;\; x < 0 \\ 2 & si\;\; x = 0 \\ x + 2 - x\ln x & si\;\; x > 0 \end{cases}$

1.

a) $D_f =]-\infty;+\infty[$

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.

Posons $\begin{cases} t = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}t \\ x \mapsto 0 \Leftrightarrow t \mapsto 0 \end{cases}$

- **Continuité de f : $f(0) = 2$**

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{t \mapsto 0} \left[2 \times \frac{e^t-1}{t}\right] = 2$ alors f est continue à gauche de 0.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} [x + 2 - x\ln x] = 2$ alors f est continue à droite de 0. Donc f est continue en 0 par conséquent f est continue sur IR.

- **dérivabilité de f : $f(0) = 2$**

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}-2}{x} = \lim\limits_{t \mapsto 0} \left[-4 \times \frac{e^t-1}{t}\right] = -4$

alors f est dérivable à gauche de 0. Par conséquent elle admet en ce point une demi-tangente.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[1 + \frac{2}{x} - \ln x\right] = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite de 0. Par conséquent elle admet en ce point une demi-tangente verticale.

Donc f n'est pas dérivable en 0 par conséquent f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

c) **Dresser le tableau de variation de f sur D_f.**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x\left(1 + \frac{2}{x} - \ln x\right)\right] = -\infty$.

- $\forall\, x < 0$ $f'(x) = \frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)+1}{x^2} > 0$

alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$. Car en posant par $u(x) = e^{2x}(2x-1) + 1 \Leftrightarrow u'(x) = 4xe^{2x}$ où est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et son minimum est $u(0) = 0$.

- $\forall\, x > 0$ $f'(x) = \mathbf{1 - \ln x - 1 = -\ln x}$

$\forall\, x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

$\forall\, x \in]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur $]1; +\infty[$

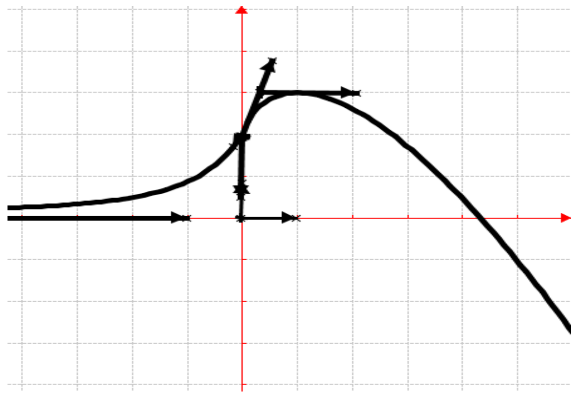
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	0	↗	2	↗	3	↘	$-\infty$

d) **Etudier les branches infinies.**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \ln x\right] = -\infty$ alors **$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).**

2. **$\forall\, x \in$ IR $f(x) > 0$.**

3. **Construction de la courbe $\mathcal{C}_f$.**



4. $\mathcal{A} = \int_1^2 [f(x) - x - 2]dx = \int_1^2 (x\ln x)dx$

$\mathcal{A} = \int_1^2 (x\ln x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^2 = \mathbf{2\ln 2 - \frac{5}{4}}$

<u>Problème 119 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
2. **Etudier les limites de f sur D_f.**
3. **Montrer que pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.**
4. **Dresser le tableau de variation de f.**
5. **Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$**
6. **Montrer que f est bijective de $[\ln 2\,; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer. Expliciter la fonction f^{-1} réciproque de f définie sur $[4; +\infty[$.**
7. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$

1. $D_f = \{x \in \text{IR} / \ e^x - 1 \neq 0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
2. Par changement de variable, posons $t = e^x$ alors

$\begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{t^2}{t-1} = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{t^2}{t-1} = +\infty \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$.

3. $\forall\, x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2e^2(e^x-1)-e^{3x}}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$;

alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$ et sur $]0; \ln 2[$ et f est strictement croissante sur $]\ln 2\,; +\infty[$.

4. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

5. **les branches infinies**

Asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

Branche parabolique de direction (Oy) car

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^{2x}}{xe^x - x}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x}\right] = +\infty$.

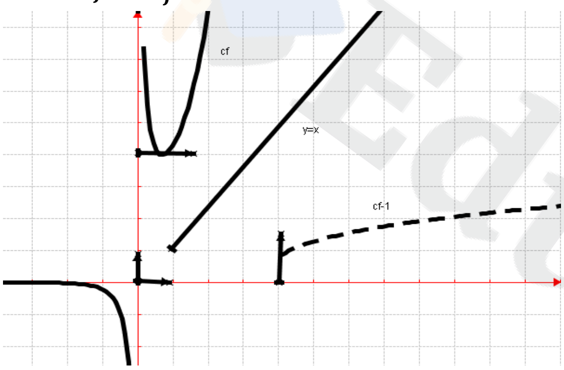
6. f est continue et strictement croissante sur $[\ln 2\,; +\infty[$. Elle réalise une bijective de $[\ln 2\,; +\infty[$ sur $[4; +\infty[$. $\frac{e^{2x}}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^x + y = 0$ nous allons à résoudre une équation paramétrique (y) du second degré en posant $t = e^x$: $t^2 - yt + y = 0$, $\Delta = y^2 - 4y$

$t' = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4y}}{2}$ et $t'' = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4y}}{2} > 0$.

$\Leftrightarrow x = \ln \left|\frac{y + \sqrt{y^2 - 4y}}{2}\right|$ donc

$\forall\, x \geq 4,\ f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x}}{2}\right)$.

7. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.



<u>Problème 120 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^{-2x} - e^{-3x}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
2. **Déterminer les limites de f sur D_f.**
3. **Montrer que pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{3 - 2e^x}{e^{3x}}$. En déduire le sens de variation de f.**
4. **Dresser le tableau de variation de f.**
5. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.**
6. **Soit α est un réel appartenant à $]1,8; 1,9[$.**

a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.**

b) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.**

<u>Correction :</u> $f(x) = e^{-2x} - e^{-3x} = \frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{3x}}$

1. $D_f =]-\infty; +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [e^{-2x}(1 - e^{-x})] = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{3x}}\right] = 0$.

3. $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = -2e^{-2x} + 3e^{-3x} = e^{-3x}(-2e^x + 3) = \frac{3 - 2e^x}{e^{3x}}$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \ln\frac{3}{2}\right[$ et

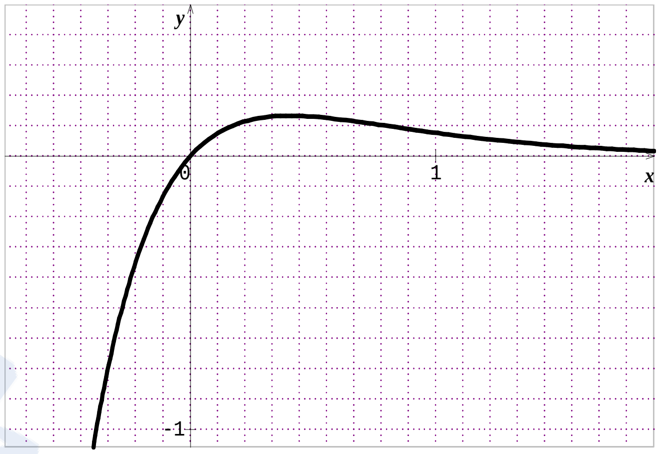
f est strictement décroissante sur $\left]\ln\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

4. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		$\ln\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0,1481	$\searrow$	0

$m = f\left(\ln\frac{3}{2}\right)$.

5. $\mathcal{C}_f$



6. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x)]dx = \int_0^\alpha [e^{-2x} - e^{-3x}]dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\alpha = \frac{-1}{2}e^{-2\alpha} + \frac{1}{3}e^{-3\alpha} + \frac{1}{6}$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \left[\frac{-1}{2}e^{-2\alpha} + \frac{1}{3}e^{-3\alpha} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}$.

<u>Problème 121 :</u> Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$.

1. **Soit u la fonction définie par : $u(x) = e^x - e^{2x}$.**

a) **Déterminer les limites de u D_u.**

b) **Étudier le sens de variation de la fonction u.**

c) **Calculer $u(0)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à son ensemble de définition.**

2.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **Etudier la dérivabilité de f en 0.**

c) **Déterminer les limites de f sur D_f.**

d) **Etudier les variations de f sur D_f.**

e) **Construire $\mathcal{C}_f$.**

<u>**Correction :**</u> $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}}$.

1. $\boldsymbol{u(x) = e^x - e^{2x} = e^x(1-e^x)}$.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x(1-e^x)] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^x(1-e^x)] = -\infty$.

b) $\forall\, x \in$ IR, $u'(x) = e^x(1-2e^x)$ donc u est strictement croissante sur $]-\infty; -\ln 2[$ et u est strictement décroissante sur $]-\ln 2\,; +\infty[$.

c) $u(0) = 0$ et $\forall\, x \in]-\infty; 0]\; u(x) > 0$

$\forall\, x \in [0; +\infty[\; u(x) < 0$.

2.

a) $D_f =]-\infty; 0]$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\sqrt{e^x(1-e^x)}\right] = 0$ et $f(0) = 0$, donc f est continue en 0.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[-\sqrt{\frac{e^x}{x} \times \frac{1-e^x}{x}}\right] = -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale.

c) Déterminer les limites de f sur D_f

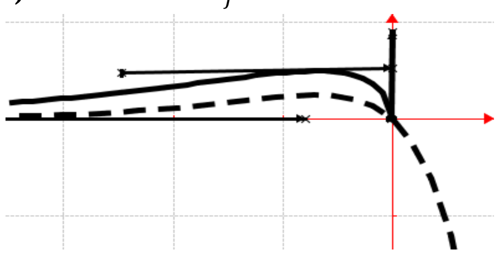
$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\sqrt{e^x(1-e^x)}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\sqrt{e^x(1-e^x)}\right] = 0$.

d) $\forall\, x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \frac{e^x(1-2e^x)}{2\sqrt{e^x(1-e^x)}}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -\ln 2[$ et f est strictement décroissante sur $]-\ln 2\,; 0[$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

e) Construire $\mathcal{C}_f$.



<u>**Problème 122 :**</u> **On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$**

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier les limites de f sur D_f.

c) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2. Montrer que f est bijective de R sur un intervalle à déterminer. Expliciter la fonction f^{-1} réciproque de f.

3. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

4. Soit α est un réel appartenant à $]3; 4[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

<u>**Correction :**</u> $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}}$

1.

a) $D_f = \{x \in \text{IR}/\ e^x + 1 \neq 0\} =]-\infty; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right] = \frac{e^{-\infty}}{e^{-\infty}+1} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{e^x}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[1] = 1$.

c) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$; alors f est strictement croissante sur IR.

d) Dressons le tableau de variation de f

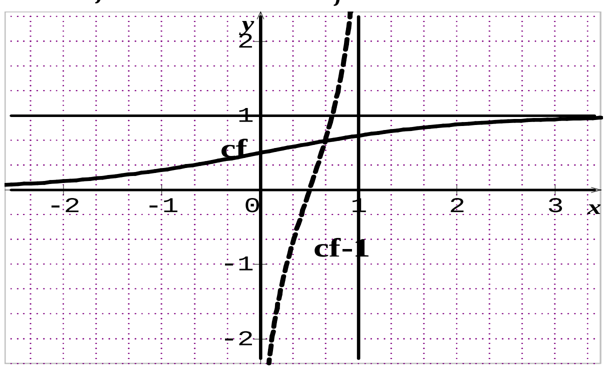
x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	1

2. f est continue et strictement croissante sur IR.

Elle réalise une bijective de IR sur $]0; 1[$. $\frac{e^x}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x - ye^x = y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right|$

donc $\forall\, x \in]0; 1[$, $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

3. $\mathcal{C}_f$ en trait plein et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en trait pointé.



4. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha \left[\frac{e^x}{e^x+1}\right] dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = [\ln(e^x+1)]_0^\alpha = [\ln(e^\alpha+1) - \ln 2]$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = -\ln 2$.

Problème 123 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$**

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que $\forall\ x \in D_f\ f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$.

c) Etudier les limites de f sur D_f.

d) Montrer que $\forall\ x \in D_f\ f'(x) = \frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f sur D_f.

Dresser le tableau de variation de f.

2. Montrer que les droites (D) et (d) d'équation respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$ sont les asymptotes à $\mathcal{C}_f$. Etudier leur position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$; (D) et (d).

4. Soit α est un réel appartenant à $]-2;-1,5[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la droite (D), les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

Correction : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

1.

a) $D_f = \{x \in IR\ /\ e^x + 1 \neq 0\} =]-\infty; +\infty[$.

b) $\forall\ x \in IR\ f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x - 1 + 2 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x - 1 + \left(2 - \frac{2e^x}{e^x+1}\right) = x - 1 + \left(\frac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}\right) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = f(x)$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[x - 1 + \frac{2}{e^x+1}\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x - 1 + \frac{2}{e^x+1}\right] = +\infty$.

d) $\forall\ x \in IR\ f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-\quad x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}$ son signe dépend de $e^{2x} + e^x + 1$, or $e^{2x} + e^x + 1 = 0$ a un $\Delta = 1 - 4 = 3 < 0$. Donc $\forall\ x \in IR\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur IR.

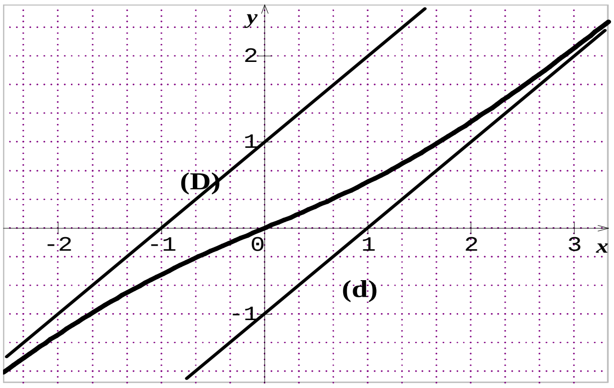
e) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x+1}$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Comme $\frac{2}{e^x+1} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (d) en $+\infty$.

$f(x) - (x + 1) = -\frac{2e^x}{e^x+1}$, $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{-2e^x}{e^x+1} = 0$, donc la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Comme $-\frac{2e^x}{e^x+1} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (D) en $-\infty$.

3. $\mathcal{C}_f$



4. $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_\alpha^0 [f(x) - (x + 1)]dx = \int_\alpha^0 \left[\frac{2e^x}{e^x+1}\right] dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = [2\ln(e^x + 1)]_\alpha^0 = -2\ln(e^\alpha + 1) + 2\ln 2$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 2\ln 2$.

Problème 124 : **Soit la fonction f définie par**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x-1} & si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}.$$

1.

a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Montrer que $\forall\ x \neq 0\ f(x) = x\left(1 + \frac{1}{e^x-1}\right)$.

c) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que, pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

c) Calculer la dérivée de la fonction f et déterminer la fonction g telle que $f'(x) = \frac{g(x)e^x}{(e^x-1)^2}$.

Dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que la droites (d) d'équation $y = x$ est *une* asymptote à $\mathcal{C}_f$. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. Soit a un réel non nul et les points M et M' , d'abscisses respectives a et $-a$, situés sur la courbe C représentative de la fonction f.

a) Établir que, pour tout réel x non nul, $f(-x) = \frac{x}{e^x-1}$

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

Correction : $f(x)=\begin{cases}\frac{xe^x}{e^x-1} & si\ x\neq 0\\ 1\ si\ x=0\end{cases}$.

1.

a) $f(x)=\frac{e^x}{\frac{e^x-1}{x}}$, on sait que $\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, alors $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=1$, donc f est continue en 0.

b) $\forall\, x\neq 0\ f(x)=x\left(1+\frac{1}{e^x-1}\right)=x\frac{e^x-1+1}{e^x-1}=\frac{xe^x}{e^x-1}=f(x)$.

c) $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\left(1+\frac{1}{e^x-1}\right)-1}{x}=1+\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=1+\frac{x-e^x+1}{e^x-1}=1+\frac{x-x.\frac{e^x-1}{x}}{x.\frac{e^x-1}{x}}=1+\frac{1-\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}$ donc

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto 0}\left[1+\frac{1-\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}\right]=1$ alors f est dérivable en 0.

2. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[\frac{0}{0-1}\right]=0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x}\right]=+\infty$.

3. Pour démontrer que, pour tout réel x, $e^x\geq x+1$, on étudie la fonction h définie sur IR par h(x) = e^x – (x + 1). Cette fonction est dérivable sur IR comme somme de fonctions dérivables sur IR, et h'(x) = e^x – 1. La fonction exponentielle s'annule en 0 et est strictement croissante sur IR, donc h'(x) ≥ 0 sur [0; $+\infty$ [et h'(x) ≤ 0 sur] $-\infty$; 0]. Donc la fonction h est décroissante sur] $-\infty$; 0] et croissante sur [0; $+\infty$ [. Elle admet donc un minimum en x = 0 qui vaut h(0) = 0; ainsi la fonction h est positive sur IR et pour tout réel x, $e^x\geq x+1$.

4. $\forall\, x\in$ IR, $f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-e^xxe^x}{(e^x-1)^2}=\frac{(e^x-x-1)e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)e^x}{(e^x-1)^2}$, donc $g(x)=e^x-x-1$.

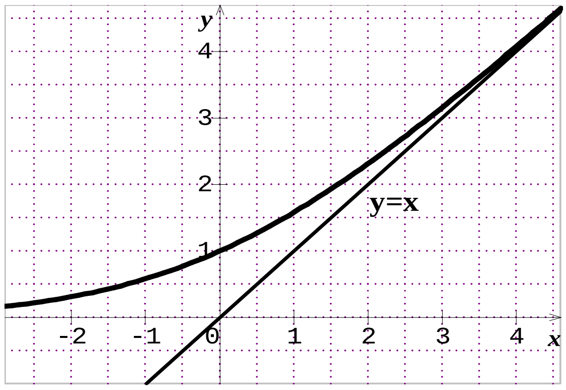
Comme $e^x\geq x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ $\forall\, x\in$ IR, $f(x)>0$, donc f est strictement croissante sur IR.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. $f(x)-y=\frac{xe^x}{e^x-1}-x=\frac{xe^x-xe^x+x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x-1}$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$ donc la droites (d) d'équation $y=x$ est *une* asymptote à $\mathcal{C}_f$.

$\forall\, x\geq 0\ f(x)-y=\frac{x}{e^x-1}>$ **0 alors** $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (d).



6. M(a) et M' ($-a$).

a) $\forall\, x\in$ IR*, $f(-x)=\frac{-xe^{-x}}{e^{-x}-1}=\frac{e^x(-xe^{-x})}{e^x(e^{-x}-1)}=\frac{x}{e^x-1}$.

b) le coefficient directeur de la droite (MM')

est : $\frac{y_{M'}-y_M}{x_{M'}-x_M}=\frac{f(-a)-f(a)}{-a-a}=\frac{\frac{a-ae^a}{e^a-1}}{-2a}=\frac{-a(e^a-1)}{-2a(e^a-1)}=\frac{1}{2}$.

Problème 125 : On considère la fonction h définie par : $h(x)=\ln|e^x-1|$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Montrer $\forall\, x\neq 0\ \ h(x)=x+\ln|1-e^{-x}|$.

c) Etudier les limites de h sur D_h.

d) Montrer $\forall\, x\neq 0\ \ h'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$. En déduire le sens de variation de h.

Dresser le tableau de variation de h.

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_h$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ par rapport à la droite (D). Déterminer les autres asymptotes.

3. Montrer que h est bijective de $]0;+\infty[$ sur un intervalle à déterminer. Expliciter la fonction h^{-1} réciproque de h sur $]0;+\infty[$.

4. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$.

Correction : $h(x)=\ln|e^x-1|$

1.

a) $D_h=\{x\in IR/\ e^x-1\neq 0\}=]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$.

b) $\forall\, x\neq 0$, $h(x)=\ln|e^x(1-e^{-x})|=x+\ln|1-e^{-x}|$.

c) h sans le symbole de la valeur absolue

$\forall\, x\in\,]-\infty;0[$, $h(x)=\ln(1-e^x)=x+\ln(e^{-x}-1)$

$\forall\, x\in\,]0;+\infty[$, $h(x)=\ln(e^x-1)=x+\ln(1-e^{-x})$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-}[\ln(1-e^x)]=-\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}[\ln(e^x-1)]=-\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty}[\ln(1-e^x)]=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}[\ln(e^x-1)]=+\infty$.

d) $\forall x\in\,]-\infty;0[$, $h'(x)=\frac{-e^x}{1-e^x}=\frac{e^x}{e^x-1}$ et $\forall x\in\,]0;+\infty[$, $h'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$.

donc $\forall\, x \neq 0$, $h'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et

h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	||	$+$
$h(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

2. $h(x) - x = \ln(1 - e^{-x})$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\,h(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\,\ln(1 - e^{-x})] = 0$.

$\forall x \in]0; +\infty[$ $h(x) - x = \ln(1 - e^{-x}) < 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au dessous de la droite (D).

Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

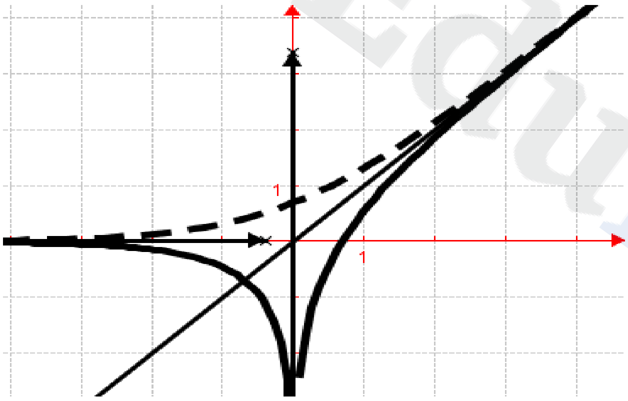
Asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

3. h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Elle réalise une bijective de $]0; +\infty[$ sur IR.

$y = \ln|e^x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(e^y + 1) \\ x = \ln(-e^y + 1) \end{cases}$ donc.

$\forall\, x \in$ IR, $h^{-1}(x) = \ln(e^x + 1)$.

4. **$\mathcal{C}_h$ en trait plein et $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ en trait pointé.**



Problème 126 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^x|e^x - 2|$.**

1.

a) **Quel est l'ensemble de définition de f ?**

b) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $\ln 2$. Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse $\ln 2$.**

c) **Déterminer les limites de f sur D_f.**

d) **Étudier le sens de variation de la fonction f. Dresser le tableau de variation de f.**

2. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ la tangente T.**

3. **Soit α un nombre réel compris entre -1 et 0. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(\alpha) \end{cases}$.**

a) **Déterminer la valeur en cm^2 de $\mathcal{A}(\alpha)$.**

b) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α vers $+\infty$.**

Correction : $f(x) = e^x|e^x - 2|$.

1.

a) D_f = IR.

b) $\forall\, x \in]-\infty; \ln 2]$, $f(x) = e^x(2 - e^x)$ et $\forall\, x \in [\ln 2\,; +\infty[$, $f(x) = e^x(e^x - 2)$.

$\lim\limits_{x \mapsto \ln 2} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto \ln 2} [e^x|e^x - 2|] = 0$ et $f(\ln 2) = 0$ alors f est continue en $\ln 2$.

$\forall\, x \in]-\infty; \ln 2]$, $f'(x) = 2e^x(1 - e^x)$ et

$\forall\, x \in [\ln 2\,; +\infty[$, $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$

$\lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^-} \frac{f(x) - f(\ln 2)}{x - \ln 2} = f'_g(\ln 2) = -4$ et

$\lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^+} \frac{f(x) - f(\ln 2)}{x - \ln 2} = f'_d(\ln 2) = 4$ donc f n'est pas dérivable en $\ln 2$.

$\mathbf{T_g}$ **:** $y = -4x + 4\ln 2$ et $\mathbf{T_d}$ **:** $y = 4x - 4\ln 2$.

c) **Déterminer les limites de f sur D_f.**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [e^x(2 - e^x)] = 0$ et

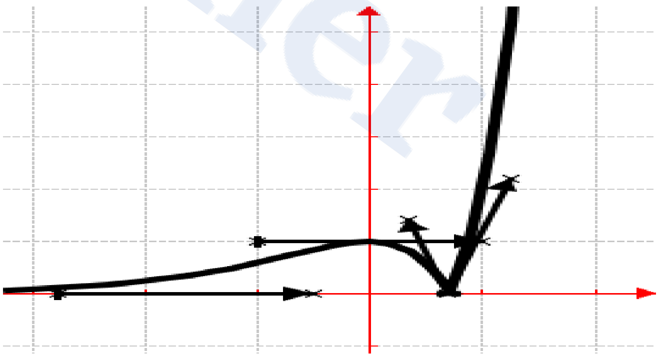
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [e^x(e^x - 2)] = +\infty$

d) $\forall\, x \in]-\infty; \ln 2[$, $f'(x) = 2e^x(1 - e^x)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et f est décroissante sur $[0; \ln 2]$.

$\forall\, x \in]\ln 2\,; +\infty[$, $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$ donc f est strictement croissante sur $]\ln 2\,; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ la tangente T.**



3.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-1}^{\alpha} [2e^x - e^{2x}]dx = \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{\alpha} = 2e^{\alpha} - \frac{1}{2}e^{2\alpha} - 2e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \left[e^{\alpha}\left(2 - \frac{1}{2}e^{\alpha}\right)\right] = -\infty$.

Problème 127 : **Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^x + \ln|x|$. (unité graphique 2 cm).**

1. Soit u la fonction définie par : $u(x) = xe^x + 1$.

a) Déterminer les limites de u sur D_u.

b) Étudier le sens de variation de la fonction u.

c) Calculer $u(0)$En déduire le signe de $\frac{u(x)}{x}$ pour x appartenant à son ensemble de définition.

2.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Déterminer les limites de f sur D_f.

c) Etudier les variations de f sur D_f.

d) Construire $\mathcal{C}_f$.

3. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

4. Soit α un nombre réel compris entre $0,5$ et $0,6$.

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 2$.

b) Déterminer la valeur en cm^2 de $\mathcal{A}(\alpha)$.

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α vers 0. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

Correction : **$f(x) = e^x + \ln|x|$. (unité graphique 2 cm).**

1. $u(x) = xe^x + 1$. $D_u = IR$

a) $\lim_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}[xe^x + 1] = 1$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}[xe^x + 1] = +\infty$.

b) $\forall\, x \in IR$, $u'(x) = (x+1)e^x$ donc u est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et u est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

c) $u(0) = 1$.**signe de $\frac{u(x)}{x}$:** $\forall\, x \in IR$, $u(x) > 0$, donc $\forall\, x \in]-\infty; 0[$, $\frac{u(x)}{x} < 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[$ $\frac{u(x)}{x} > 0$.

2.

a) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

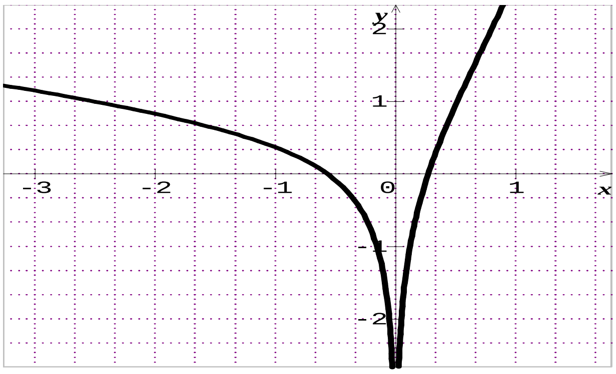
b) $\lim_{x \mapsto 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^{\pm}}[e^x + \ln|x|] = -\infty$

$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}[e^x + \ln(-x)] = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}[e^x + \ln(x)] = +\infty$.

c) $\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x+1}{x} = \frac{u(x)}{x}$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$	

d) **Construire $\mathcal{C}_f$.**



3. Si $m \in IR$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

4. $\alpha \in [0,5; 0,6]$.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_\alpha^2 [f(x)]dx \times 4cm^2 = \int_\alpha^2 [e^x +$ $\ln x dx \times 4cm2 = ex + x\ln x - x\alpha 2 \times 4cm2 = e2 + 2\ln 2 - 2 - e\alpha - \alpha\ln\alpha + \alpha \times 4cm2$.

b) $\lim_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = (e^2 + 2\ln(2) - 3) \times 4cm^2$.

$\mathcal{A}(\alpha) = 23{,}10\ cm^2$

Problème 128 : **On considère la fonction f définie par : $f(x) = |x+2|e^{\frac{-4}{x-2}}$.**

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Exprimer la fonction f sans le symbole de la valeur absolue sur D_f.

c) Montrer que f admet un prolongement par continuité à droite de 2.

d) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f. Interpréter graphiquement ces résultats. En déduire les équations des demi-tangentes au point d'abscisse – 2 : T_{-2^+} et T_{-2^-}.

2.

a) Montrer que $\forall\, x \le -2$, $f'(x) = -\frac{x^2+12}{(x-2)^2}e^{\frac{-4}{x-2}}$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; -2]$.

b) Montrer que $\forall\, x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2+12}{(x-2)^2}e^{\frac{-4}{x-2}}$. En déduire le sens de variation de f sur $x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3.

a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Préciser sa position relative.

b) Montrer que la droite (d') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Préciser sa position relative.

4. Tracer les droites (d) et (d') ; les tangentes T_{-2^+} et T_{-2^-} et la courbe $\mathcal{C}_f$.

<u>Correction :</u> $f(x) = |x+2|e^{\frac{-4}{x-2}}$.

1.

a) $D_f = \{x/x \in, x - 2 \neq 0\} = IR - \{2\}$

b) ***f* sans le symbole de la valeur absolue sur D_f**

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$		$x+2$

$\forall\, x \in]-\infty; -2]$, $f(x) = -(x+2)e^{\frac{-4}{x-2}}$

$\forall\, x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[$, $f(x) = (x+2)e^{\frac{-4}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x \mapsto 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^+}\left[4e^{\frac{-4}{0^+}}\right] = e^{-\infty} = 0$ donc f admet un prolongement par continuité à 2^+.

d) **continuité et la dérivabilité de f sur D_f**

$\lim\limits_{x \mapsto -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^-}\left[-(x+2)e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^+}\left[(x+2)e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = 0$ alors f est continue en -2. Donc f est continue sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

Dérivabilité de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x \mapsto -2^-}\left[-e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = -e$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x \mapsto -2^+}\left[e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = e$ alors f n'est pas dérivable en -2. Donc f est dérivable sur $]-\infty; -2[$, sur $]-2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

Au point d'abscisse -2 est un point anguleux et $\mathcal{C}_f$ admet à ce point deux demi-tangentes dont leurs équations sont :

$T_{-2^-} : y = -e(x+2) = -ex - 2e$

$T_{-2^+} : y = e(x+2) = ex + 2e$.

2.

a) $\forall\, x \leq -2$, $f'(x) = -e^{\frac{-4}{x-2}} - \frac{+4}{(x-2)^2} \times (x+2)e^{\frac{-4}{x-2}} = e^{\frac{-4}{x-2}}\left(-1 - \frac{4x+8}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{-4}{x-2}}\left(\frac{-x^2+4x-4-4x-8}{(x-2)^2}\right) = -\frac{x^2+12}{(x-2)^2}e^{\frac{-4}{x-2}} < 0$, alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$.

b) $\forall\, x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[$, $f'(x) = e^{\frac{-4}{x-2}} + \frac{+4}{(x-2)^2} \times (x+2)e^{\frac{-4}{x-2}} = e^{\frac{-4}{x-2}}\left(1 + \frac{4x+8}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{-4}{x-2}}\left(\frac{x^2-4x+4+4x+8}{(x-2)^2}\right) = \frac{x^2+12}{(x-2)^2}e^{\frac{-4}{x-2}} > 0$ alors f est strictement croissante sur $[-2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

c) **tableau de variation de f :**

limites de f sur D_f.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$+$

- $\lim\limits_{x \mapsto 2}\left[\frac{-4}{x-2}\right] = \begin{cases} +\infty \text{ si } x < 2 \\ -\infty \text{ si } x > 2 \end{cases}$, posons $t = \frac{-4}{x-2} \Leftrightarrow$

$x = 2 - \frac{4}{t}$ donc $\lim\limits_{t \mapsto -\infty} e^t = 0$ et $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} e^t = +\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto 2^-} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}\left[\left(4 - \frac{4}{t}\right)e^t\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 2^+} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty}\left[\left(4 - \frac{4}{t}\right)e^t\right] = 0$.

- $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[\frac{-4}{x-2}\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t \mapsto 0} e^t = 1$, donc cette limite à l'infinie dépend de celle de $|x+2|$:

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[-(x+2)e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[(x+2)e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = +\infty$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$		$+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗ $+\infty$	0 ↗	$+\infty$

3. $\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[e^{\frac{-4}{x-2}}\right] = e^{\frac{-4}{\pm\infty}} = e^0 = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}\left[2e^{\frac{-4}{x-2}} + 2\right] = 4$; posons $t = \frac{-4}{x-2} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{4}{t}$.

a) $h(x) - (2 - x) = x\left(1 - e^{\frac{-4}{x-2}}\right) - \left(2e^{\frac{-4}{x-2}} + 2\right)$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[x\left(1 - e^{\frac{-4}{x-2}}\right)\right] = \lim\limits_{t \mapsto 0}\left[-(2t-4)\frac{e^t-1}{t}\right] = +4$.

Donc $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[h(x) - y] = 0$ alors la droite (d) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

$h(x) - -x + 2 < 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (d).

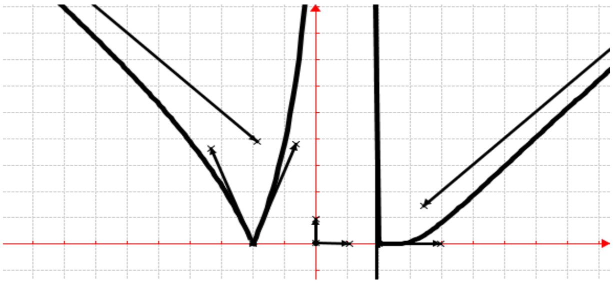
b) $h(x) - (x - 2) = x\left(e^{\frac{-4}{x-2}} - 1\right) + \left(2e^{\frac{-4}{x-2}} + 2\right)$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(e^{\frac{-4}{x-2}} - 1\right)\right] = \lim\limits_{t \mapsto 0}\left[(2t-4)\frac{e^t-1}{t}\right] = -4$.

Donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h(x) - y] = 0$ alors la droite (d') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$h(x) - (x - 2) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (d').

4. Tracer la droite (d) ; les tangentes T_{-2^+} et T_{-2^-} et la courbe $\mathcal{C}_f$:



<u>Problème 129 :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)e^{-|x|}$.

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ces résultats. En déduire les demi-tangentes au point 0.

c) Déterminer les limites de f sur D_f.

d) Etudier le sens de variation de f sur D_f. Dresser le tableau de f sur D_f.

2. Construire $\mathcal{C}_f$.

3. Calculer $I = -\int_1^2 f(x)dx$.

<u>Correction :</u> $f(x) = (1-x)e^{-|x|}$.

1.

a) $D_f =]-\infty;+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty;0[, f(x) = (1-x)e^{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = (1-x)e^{-x}$

b) continuité de f en 0 :

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-}[(1-x)e^{x}] = 1$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+}[(1-x)e^{-x}] = 1$ alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0 :

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1-x)e^{-|x|}-1}{x} = \frac{e^{-|x|}-1}{x} - e^{-|x|}$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0^-}\left[\frac{e^{x}-1}{x} - e^{x}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0^+}\left[-\frac{e^{-x}-1}{-x} - e^{-x}\right] = -2$.

Donc f n'est pas dérivable en 0, par conséquent elle admet deux demi-tangentes dont leurs équations sont : $T_{0^-} : y = 1$ et $T_{0^+} : y = -2x+1$.

c) Déterminer les limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}[(1-x)e^{x}] = 0$ et

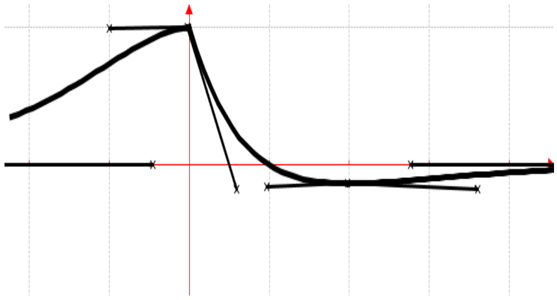
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}[(1-x)e^{-x}] = 0$

d) $\forall x \in]-\infty;0[, f'(x) = -xe^{x} > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$.

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = (-2+x)e^{-x}$ alors f est strictement décroissante sur $]0;2[$ et f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	|	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-0{,}135$	$\nearrow$	0

2. Construire $\mathcal{C}_f$



3. $I = [2e^{-x} + xe^{-x}]_1^2 = 4e^{-2} - 3e^{-1}$.

<u>Problème 130 :</u> On considère la fonction h définie par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[, h(x) = x^2\ln|x| \\ \forall x \in [0;+\infty[, h(x) = \ln(e^{x}-x) \end{cases}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur IR.

2.

a) Déterminer les limites de h sur D_h.

b) Etudier le sens de variation de h.

c) Dresser le tableau de variation de h.

d) Vérifier que h n'admet pas de dérivée seconde au point O.

3.

a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

b) Tracer la droite (d) et la courbe $\mathcal{C}_h$.

4. Montrer que la restriction de h à $[0;+\infty[$ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer sa fonction réciproque notée $\mathcal{C}_\Gamma$.

5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = -1$.

<u>Correction :</u> $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[, h(x) = x^2\ln|x| \\ \forall x \in [0;+\infty[, h(x) = \ln(e^{x}-x) \end{cases}$.

1. continuité et la dérivabilité de h sur IR :

Continuité de h en 0 :

$\lim_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim_{x \mapsto 0^+}[\ln(e^x - x)] = 0$ et
$\lim_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^-}[x^2 \ln|x|] = 0$ alors h est continue en 0. Par conséquent h est continue sur IR.

Dérivabilité de h en 0 :

$\lim_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \mapsto 0^-}[x\ln|x|] = 0$ alors h est dérivable à gauche de 0 et $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'd(0) = \frac{e^0-1}{e^0-0} = 0$ alors h est dérivable à droite de 0.

Par conséquent h est dérivable en 0.

2.

a) limites de h sur D_h :

$\lim_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}[x^2 \ln(-x)] = +\infty$ et
$\lim_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}[\ln(e^x)] = +\infty$

b) sens de variation de h :

- $\forall\ x \in]-\infty; 0[$, $h'(x) = 2x\ln(-x) + x = [x(2\ln(-x) + 1)]$,

$\forall\ x \in \left]-\infty; -e^{-\frac{1}{2}}\right[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -e^{-\frac{1}{2}}\right[$.

$\forall\ x \in \left]-e^{-\frac{1}{2}}; 0\right[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $\left]-e^{-\frac{1}{2}}; 0\right[$.

- $\forall\ x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x} > 0$, alors h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		$-e^{-\frac{1}{2}}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$-0{,}18$	↗	0	↗	$+\infty$

d) Vérifier que h n'admet pas de dérivée seconde au point O :

- $\forall\ x \in]-\infty; 0[$, $h''(x) = [x(2\ln(-x) - 1)] = 2\ln(-x) - 1 - 2 = 2\ln(-x) - 3$ et

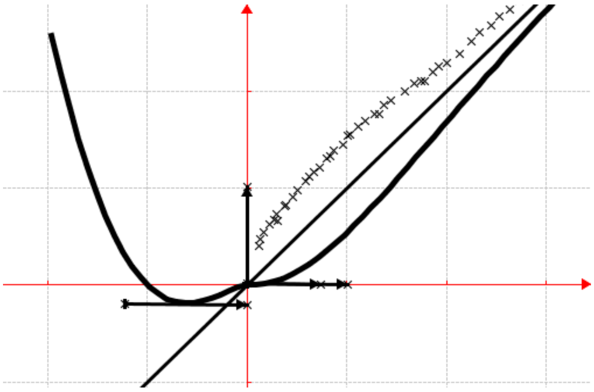
$\lim_{x \mapsto 0^+} h''(x) = \lim_{x \mapsto 0^+}[2\ln(-x) - 3] = -\infty$ et $h'(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \longmapsto 0 \\ h \longmapsto \infty \end{cases}$ alors **h n'admet pas de dérivée seconde au point O.**

3.

a) $\forall\, x \in [0;\ +\infty[$, $h(x) = \ln(e^x - x) = x + \ln(1 - xe^{-x})$

$\lim_{x \mapsto +\infty}[h(x) - y] = \lim_{x \mapsto +\infty}[\ln(1 - xe^{-x})] = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

b) Tracer la droite (d) et la courbe $\mathcal{C}_h$ en trait continue et $\mathcal{C}_\Gamma$ en trait discontinue :



4. h est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Sa restriction à $[0;\ +\infty[$ est une bijection de $[0;\ +\infty[$ sur un intervalle $J = [0;\ +\infty[$.

5. Soit I cette aire, nous aurons

$I = \int_{-2}^{-1} h(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(-x)\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1} x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3 \ln(-x) + \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1} = \frac{23}{9} + 8\ln 2.$

<u>Problème 131 :</u> **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Etudier le signe du polynôme $p(x) = x^2 + 2x - 1$ suivant les valeurs de x**
3. **Déterminer les limites de h sur D_h.**
4. **Montrer que $\forall\ x \in D_h$, $h'(x) = p(e^x).\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de h.**
5. **Dresser le tableau de variation de h.**
6. **Montrer que la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.**
7. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

<u>Correction :</u> $h(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}$

1. $D_h =]-\infty; +\infty[$.

2. Posons $p(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 8 \Leftrightarrow x' = -1 - \sqrt{2} < 0$ ou $x'' = -1 + \sqrt{2} > 0$.

$p(x) = (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x + 1 + \sqrt{2}$		$-$		$-$		$+$	
$x + 1 - \sqrt{2}$		$-$		$-$		$+$	
$p(x)$		$+$		$-$		$+$	

$\forall\ x \in]-\infty; -1 - \sqrt{2}[\cup]-1 + \sqrt{2}; +\infty[$, $p(x) > 0$

$\forall\ x \in]-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}[$, $p(x) < 0$

Si $x = -1 - \sqrt{2}$ ou $x = -1 + \sqrt{2}$, $p(x) = 0$.

3. les limites de h sur D_h :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^{2x}+1}{e^x+1}\right] = 1$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^{2x}}{e^x}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^x] = +\infty$;

4. $\forall\, x \in \mathrm{IR},\ h'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x+1)-e^x(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2} - \frac{2e^{3x}+2e^{2x}-e^{3x}-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{3x}+2e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^{2x}+2e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \boldsymbol{p(e^x)}.\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

sens de variation de h : le signe de $h'(x)$ dépend de celui de : $\boldsymbol{p(e^x)} = (e^x + 1 + \sqrt{2})(e^x + 1 - \sqrt{2})$ **or**

$x'' = -1 + \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x = \ln(-1+\sqrt{2}) \end{cases}$.

x	$-\infty$	$\ln(-1+\sqrt{2})$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$

$\forall\ x \in]-\infty; \ln(-1+\sqrt{2})[$, $h'(x) < 0$, h est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln(-1+\sqrt{2})[$.

$\forall\ x \in [\ln(-1+\sqrt{2})\,; +\infty[$, $h'(x) > 0$, h est strictement croissante sur $[\ln(-1+\sqrt{2})\,; +\infty[$.

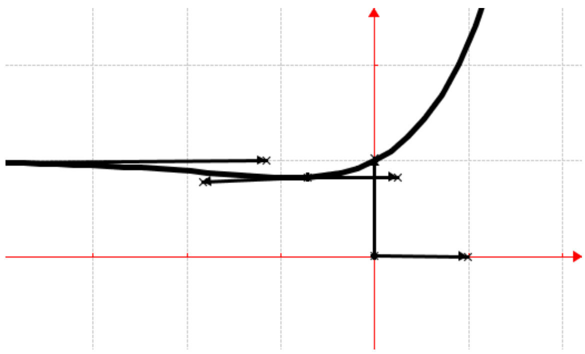
5. tableau de variation de h :

$\ln(-1+\sqrt{2}) = -0{,}88$; $h[\ln(-1+\sqrt{2})] = 0{,}828$.

x	$-\infty$	$\ln(-1+\sqrt{2})$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	$0{,}828$	↗ $+\infty$

6. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x}\right] = +\infty$ alors la courbe $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$:



<u>Problème 132 :</u>

A. Soit u définie par :

$\boldsymbol{u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}}$.

a) Etudier les limites de u sur D_u.

b) Etudier le sens de variation de u.

c) Dresser le tableau de variation de u.

d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 1]$.

e) En déduire le signe de $u(x)$.

f) Construire la courbe $\mathcal{C}_u$.

B. On considère la fonction f définie par :

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}[x + (1 - x)e^{2x}]}$.

1. Etudier les limites de f sur D_f.

2. Etudier le sens de variation de f.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport (Δ).

5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (Δ).

<u>Correction :</u>

A. $\boldsymbol{u(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}}$, $D_u =]-\infty; +\infty[$

a) les limites de u sur D_u.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[1 + (1-2x)e^{2x}] = 1$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[1 + (1-2x)e^{2x}] = -\infty$.

b) sens de variation de u :

$\forall\, x \in \mathrm{IR},\ u'(x) = -4xe^{2x}$, donc u est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et

u est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c) tableau de variation de u.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$		$-$
$u(x)$	1 ↗	2	↘ $-\infty$

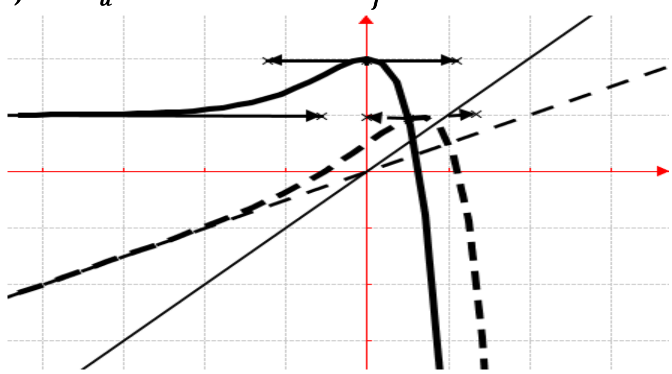
d) $u(0) = 2$ et $u(1) = -6{,}38$

u est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$. On remarque que $u(0) \times u(1) < 0$ et $0 \in [-6{,}38; 2]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

e) $\forall\, x \in]-\infty; \alpha]$, $u(x) \geq 0$ et

$\forall\, x \in [\alpha; +\infty[$, $u(x) \leq 0$.

f) $\mathcal{C}_u$ en trait continu et $\mathcal{C}_f$ en trait discontinu.



B. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}[x + (1 - x)e^{2x}]}$ $\quad$ $D_f =]-\infty; +\infty[$

1. limites de f sur D_f.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{1}{2}[x+(1-x)e^{2x}]\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{2}x\left[1+(1-x)\frac{e^{2x}}{x}\right]\right] = -\infty$.

2. sens de variation de f.

$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{1}{2}[1+(1-2x)e^{2x}] = \frac{1}{2}u(x)$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et f est strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

3. tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}[(1-x)e^{2x}] = 0$, donc la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$. déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport (Δ).

- Sur $]-\infty;1]$, $f(x)-y = (1-x)e^{2x} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ).
- Sur $[1;+\infty[$, $f(x)-y = (1-x)e^{2x} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ).

5. voir figure $\mathcal{C}_f$ en trait discontinu.

<u>Problème 133 :</u> On considère la fonction h définie par : $h(x) = (x-2)e^x + x$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Etudier les limites de h sur D_h.

3. Soit u la fonction définie par :

$u(x) = e^x(x-1)+1$

a) Étudier les variations de u sur D_u.

b) En déduire le signe de $u(x)$ sur D_u.

4. Montrer que pour tout réel $x \in D_h$, $h'(x) = u(x)$. En déduire le sens de variation de h sur D_h. Dresser le tableau de variation de h sur D_h.

5. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_h$. Etudier la position relative de (d) par rapport à $\mathcal{C}_h$.

6. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_h$. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 1.

7. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et celle de $\mathcal{C}_u$; (d) et T.

8. Soit α est un réel appartenant à $]1;2[$.

a) Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la droite (d), les droites d'équations $x=\alpha$, $x=0$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

<u>Correction :</u> $h(x) = (x-2)e^x + x = xe^x - 2e^x + x$

1. $D_h = \{x/x \in \text{IR}, \ \} =]-\infty;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x) = +\infty$.

3. **$u(x) = e^x(x-1)+1 = xe^x - e^x + 1$**

a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} u(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = +\infty$.

$\forall\, x \in]-\infty;+\infty[$, $u'(x) = xe^x$; alors u est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et

u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de u.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\forall\, x \in]-\infty;+\infty[$, $u(x) > 0$ car $u(0) = 0$.

4. $\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = u(x) > 0$; alors h est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $h(x) - y = (x-2)e^x$, ainsi $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}(x-2)e^x = 0$, alors la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$. Sur $]-\infty;2[$ $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (d) en $-\infty$ et Sur $]2;+\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (d) en $+\infty$.

6. $h''(x) = u'(x) = xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, alors ce point d'inflexion est de coordonnées $(0;-2)$.

T : $\begin{cases} h'(1) = 1 \\ h(1) = 1-e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = h'(1)(x-1)+h(1) \\ y = x - e \end{cases}$

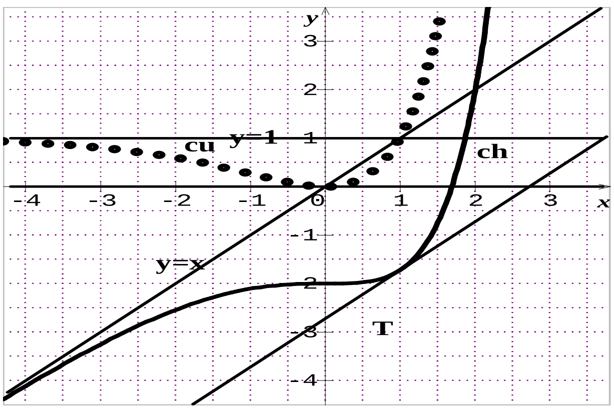
7. **branches infinies de $\mathcal{C}_u$.** Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{u(x)}{x} = +\infty$.

Asymptote horizontale d'équation : $y = 1$.

branches infinies de $\mathcal{C}_h$.

Asymptote horizontale d'équation : $y = 1$.

$\mathcal{C}_h$ en trait continu et $\mathcal{C}_u$ en trait discontinu.



8. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha [h(x) - y]dx = \int_4^\alpha [(x-2)e^x]dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha) = [(x-3)e^x]_0^\alpha = e^\alpha(\alpha - 3) + 3$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 3$.

Problème 134 : On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1} \text{ si } x > 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}.$$

1.

a) Quel est l'ensemble de définition de h ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 2$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur D_u.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0, appartient à l'intervalle $[1,6; 2]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.

3. Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{x-1} - 2[1 + \ln(x-1)]$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$. Étudier les variations de f sur D_f.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]1; +\infty[$.

4. En déduire le sens de variation de h.

Etudier les limites de h sur D_h.

Dresser le tableau de variation de h.

5. Déterminer l'équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_h$ au point A d'abscisse $x = 2$.

6. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$, $\mathcal{C}_g$ et celle de $\mathcal{C}_f$. Tracer les courbes $\mathcal{C}_h$; $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ et T_A.

Correction :

$$h(x) = \begin{cases} -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1} \text{ si } x > 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

1.

a) $D_h = [1; +\infty[$.

b) **Continuité de h en 1:** $\lim\limits_{x \mapsto 1} h(x) = 1$ et $h(1) = 1$, alors h est continue en 1.

Dérivabilité de h en 1:

$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = -2\ln(x-1) + \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = +\infty$; alors h n'est pars dérivable en 1, par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en cet point 1 une demi-tangente verticale.

2. $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 2$.

a) $\forall x \in IR$, $g'(x) = xe^{x-1}$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	-2 $\searrow$	$-2{,}36$	$\nearrow$ $+\infty$

b) $g(1{,}6) = -0{,}906$ et $g(2) = 0{,}718$

g est continue et strictement croissante sur $[1{,}6; 2]$. Or $g(1{,}6) \times g(2) < 0$. Donc sur $[1{,}6; 2]$, il a un unique antécédent. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 \in [1{,}6; 2]$ et $x_0 = 1{,}84$.

c) $\forall x \in]1; x_0[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]x_0; +\infty[$, $g(x) > 0$

3. $f(x) = e^{x-1} - 2[1 + \ln(x-1)]$.

a) $\forall x > 1$, $f'(x) = e^{x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{(x-1)e^{x-1}-2}{x-1} = \frac{g(x)}{x-1}$. $\lim\limits_{x \mapsto 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$

x	1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	p	$\nearrow$ $+\infty$

$p = e^{x_0-1} - 2[1 + \ln(x_0 - 1)] = 0{,}665$

b) $p = e^{x_0-1} - 2[1 + \ln(x_0 - 1)] = 0{,}665 > 0$ alors $\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x) > 0$.

4. $\forall x > 1$, $h'(x) = e^{x-1} - 2[1 + \ln(x-1)] = f(x)$ alors h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto 1} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = +\infty$.

tableau de variation de h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$
$h(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$

5. $T_A : y = (e-2)x + 4 - e$.

6. **branches infinies de $\mathcal{C}_g$.** Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.

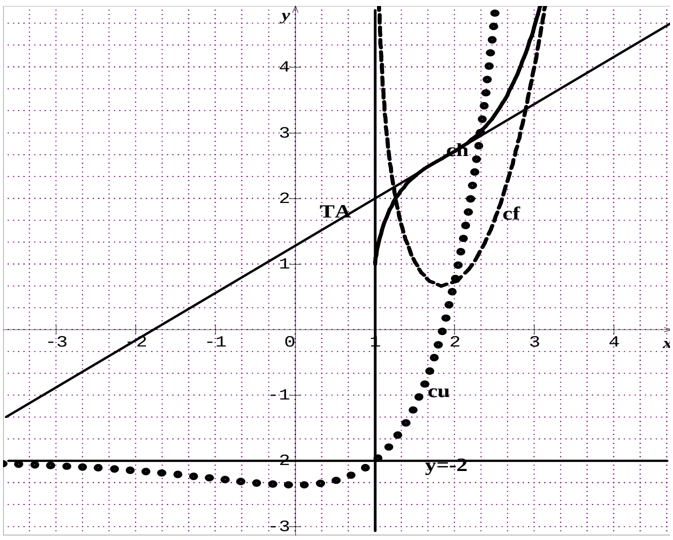
branches infinies de $\mathcal{C}_f$. Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

branches infinies de $\mathcal{C}_h$. Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.

Asymptote verticale d'équation : $x = 1$.

Asymptote horizontale d'équation : $y = -2$.

7. **$\mathcal{C}_h$; $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et T_A**



__Problème 135 :__

A. Soit u définie par : $u(x) = (x-2)e^x + 4$.

a) Etudier les limites de u sur D_u.

b) Etudier le sens de variation de u.

c) Dresser le tableau de variation de u.

d) Construire la courbe $\mathcal{C}_u$.

e) En déduire le signe de $u(x)$.

B. On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{e^x-2}{x^2}$.

1. Etudier les limites de f sur D_f.

2. Etudier le sens de variation de f.

Dresser le tableau de variation de f.

3. Etudier la branche infinie en $+\infty$.

4. Déterminer l'équation de la tangente T_3 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

5. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ sachant que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse α tel que $1,1 \leq \alpha \leq 1,3$.

__Correction :__

A. $u(x) = xe^x - 2e^x + 4$, $D_u =]-\infty; +\infty[$

a) les limites de u sur D_u.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [xe^x - 2e^x + 4] = 4$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [e^x(x-2) + 4] = +\infty$.

b) sens de variation de u :

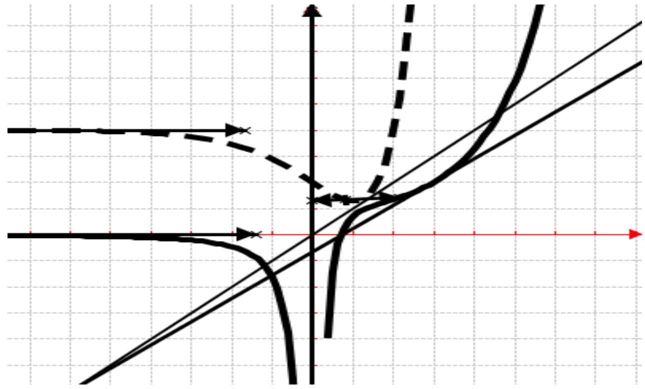
$\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $u'(x) = e^x(x-1)$, donc, u est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et

u est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

c) tableau de variation de u.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	4	↘	1,29	↗	$+\infty$

d) $\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}_u$ en trait discontinu.



e) signe de $u(x)$: $\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $u(x) > 0$.

B. $f(x) = \frac{e^x-2}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} \times \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)$;

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

1. limites de f sur D_f.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^x-2}{x^2}\right] = \frac{-2}{+\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2} \times \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0} \left[\frac{e^x-2}{x^2}\right] = \frac{1-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.

2. sens de variation de f.

$\forall\, x \in \mathrm{IR} - \{0\}$, $f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 4}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

tableau de variation de f.

x	$-\infty$			0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		⊠	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	⊠	$-\infty$	↗ $+\infty$

3. branche infinie en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x^3} \times \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)\right] = +\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

4. $T_3 : y = \frac{e^3+4}{27}x - \frac{2}{3}$.

5. $\mathcal{C}_f$, voir figure.

__Problème 136 :__ **unité graphique 2 cm.**

1. Soit u la fonction définie par

$$u(x) = xe^x - 2e^x + 2$$

a) Dresser le tableau de variations de u.

b) Déterminer le signe de $u\left(\frac{3}{2}\right)$. En déduire qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $\alpha \in [1,5; 1,6]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

c) Calculer $u(0)$. Déduire le signe de u sur IR.

2. On considère la fonction h définie par :

$h(x) = \frac{e^x-1}{x^2}$

a) **Calculer les limites de h sur D_h.**

b) **Montrer que $h(\alpha) = -\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ et en déduire le signe de $h(\alpha)$.**

c) **Montrer que $\forall\, x \neq 0, h'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.**

d) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

<u>Correction :</u> unité graphique 2 cm.

1. **$u(x) = xe^x - 2e^x + 2 = e^x(x-2) + 2$**

a) **Dresser le tableau de variations de u.**

$\forall\, x \in$ IR, $u'(x) = e^x(x-1)$, donc u est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et

u est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[xe^x - 2e^x + 2] = 2$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^x(x-2) + 2] = +\infty$.

tableau de variation de u.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$	$-$		$+$
$u(x)$	2 ↘	-072	↗ $+\infty$

b) $u(1{,}5) = -0{,}240 < 0$ et $u(1{,}6) = 1{,}87.10^{-2}$

u est continue et strictement croissante sur $[\mathbf{1{,}5}; \mathbf{1{,}6}]$. Or $u(\mathbf{1{,}5}) \times u(1{,}6) < 0$. Donc sur $[\mathbf{1{,}5}; \mathbf{1{,}6}]$, il a un unique antécédent. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{1{,}5}; \mathbf{1{,}6}]$.

c) $\boldsymbol{u(0) = 0}$ $\quad \forall\, x \in]0; \alpha[$, $u(x) < 0$ et $\forall\, x \in]-\infty; 0[\, \cup\,]\alpha; +\infty[$, $u(x) > 0$.

2. $\boldsymbol{h(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}}$

a) $\mathbf{D_h} =]-\infty; \mathbf{0}[\, \cup\,]\mathbf{0}; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{e^x - 1}{x^2}\right] = \frac{-1}{+\infty} = 0$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{x^2} \times \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0}\left[\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x}\right] = \begin{cases} -\infty \text{ si } x < 0 \\ +\infty \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

b) $u(x) = e^\alpha(\alpha - 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = -\frac{2}{\alpha - 2}$.

$h(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha^2} = \frac{-\frac{2}{\alpha-2} - 1}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha - 2} \times \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.

signe de $\boldsymbol{h(\alpha)}$: $1{,}5 \leq \alpha \leq 1{,}6 \Leftrightarrow -0{,}5 \leq \alpha - 2 \leq -0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}6 \leq -\alpha(\alpha - 2) \leq 0{,}8 \Leftrightarrow 1{,}25 \leq -\frac{1}{\alpha(\alpha-2)} \leq 1{,}66 \Leftrightarrow \mathbf{1{,}25} \leq \boldsymbol{h(\alpha)} \leq \mathbf{1{,}66}$.

Donc $\boldsymbol{h(\alpha)}$ est positif.

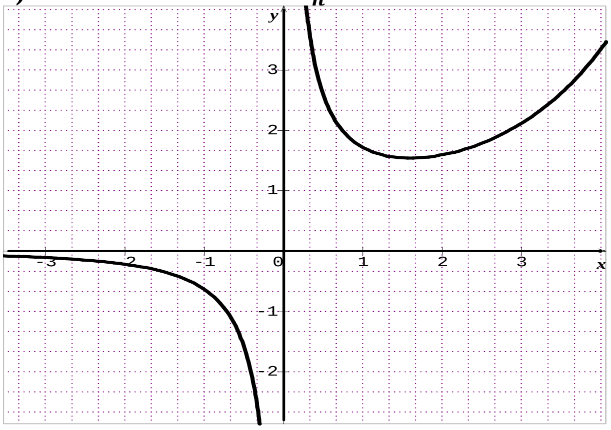
c) $\forall\, \boldsymbol{x} \neq 0, \boldsymbol{h'(x)} = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3} = \frac{u(x)}{x^3}$.

x	$-\infty$ 0	0 α	α $+\infty$
$\boldsymbol{x^3}$	$-$	$+$	$+$
$u(x)$	$+$	$-$	$+$
$\boldsymbol{h'(x)}$	$-$	$-$	$+$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\, \cup\,]0; \alpha[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; \alpha[$.
$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$ 0		α	$+\infty$
$\boldsymbol{h'(x)}$	$-$	‖	$-$	$+$
$h(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\boldsymbol{h(\alpha)}$	↗ $+\infty$

d) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**



<u>Problème 137 :</u> unité graphique (2 cm×10 cm).

1. **Soit u la fonction définie par $u(x) = \ln x - \frac{2x+1}{x^2}$.**

a) **Dresser le tableau de variations de u.**

b) **Montrer qu'il existe un unique réel α tel que à $\alpha \in [2{,}55; 2{,}56]$ et $u(\alpha) = 0$.**

c) **Déduire le signe de u sur $]0; +\infty[$.**

2. **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)e^{-x}$.**

a) **Calculer les limites de h sur D_h.**

b) **Montrer que $h(\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha}$. Donner un encadrement de $h(\alpha)$ à 10^{-3} près.**

c) **Montrer que $\forall\, x > 0\ h'(x) = -u(x).e^{-x}$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.**

d) **Démontrer qu'une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 1 est $y = 3e^{-1}x - 4e^{-1}$.**

e) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et T.**

3. **Soit λ est un réel supérieur à 5. Soit H la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = -\ln(x)\,e^{-x}$.**

a) **Démontrer que H est une primitive de f.**

b) **Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, l'axe (ox) et les droites d'équations $x = e$ et $x = \lambda$.**

c) **Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.**

<u>Correction :</u>

1. $\boldsymbol{u(x) = \ln x - \frac{2x+1}{x^2}}$

a) **Dresser le tableau de variations de u.**

$\forall\, x > 0\ u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x^2-4x^2-2x}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{-2x-2}{x^3} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$ son signe dépend de x^2+2x+2 :

$x^2+2x+2=0\ \Delta = 4-8=-4<0$ donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\ln x - \frac{2x+1}{x^2}\right] = \ln(0^+) - \frac{1}{0^+} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\ln x - \frac{2}{x}\right] = +\infty$.

tableau de variation de u.

x	0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$		$-\infty\ \nearrow$	$+\infty$

b) $u(2{,}55) = -0{,}002$ et $u(2{,}56) = 0{,}006$

u est continue et strictement croissante sur $[2,55;2,56]$. Or $u(2{,}55)\times u(2{,}56) < 0$. Donc sur $[1,5;1,6]$, il a un unique antécédent. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [2{,}55; 2{,}56]$.

c) $\forall\, x \in\ ]0;\alpha[,\ u(x) < 0$ et
$\forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[,\ u(x) > 0$.

2. $h(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)e^{-x} = \frac{\ln x}{e^x} - \frac{1}{xe^x}$

a) $D_h =]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\frac{\ln x}{e^x} - \frac{1}{xe^x}\right] = -\infty - \frac{1}{0^+} = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{\ln x}{e^x} - \frac{1}{xe^x}\right] = 0$.

b) $u(x) = \ln\alpha - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$.

$h(\alpha) = \left(\ln\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha}$.

signe de $h(\alpha)$:

$1{,}55 \le \alpha \le 1{,}56 \Leftrightarrow 2{,}55 \le \alpha+1 \le 2{,}56$

$2{,}4 \le \alpha^2 \le 2{,}43 \Leftrightarrow 0{,}411 \le \frac{1}{\alpha^2} \le 0{,}416$

On déduit que $1{,}048 \le \frac{\alpha+1}{\alpha^2} \le 1{,}064$ d'une part

$1{,}55 \le \alpha \le 1{,}56 \Leftrightarrow 4{,}711 \le e^{\alpha} \le 4{,}758$

$4{,}711 \le e^{\alpha} \le 4{,}758 \Leftrightarrow 0{,}210 \le e^{-\alpha} \le 0{,}212$

$$0{,}220 \le \frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha} \le 0{,}225$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{0{,}220 \le h(\alpha) \le 0{,}225}$$

c) $\forall\, x > 0\ \ h'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x} - \left(\ln x -\right.$
1xe−x=2x+1x2−lnxe−x=2x+1x2−lnxe−x=−lnx −2x+1x2e−x=− ***ux.e−x.***

x	0		α	$+\infty$
$-u(x)$		$+$	$-$	
$h'(x)$		$+$	$-$	

$\forall\, x \in\ ]0;\ \alpha[,\ h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]0;\ \alpha[$.

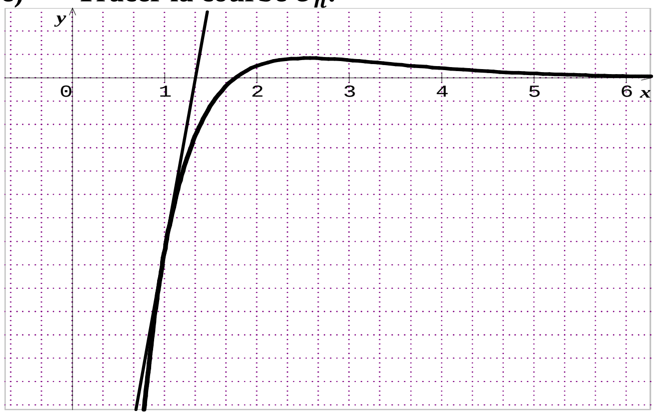
$\forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[,\ h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$	
$h(x)$		$-\infty\ \nearrow$	$\frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	$\searrow$	0

d) $h(1) = -e^{-1}$ et $h'(1) = 3e^{-1}$.

T $y = h'(1)(x-1) + h(1) = 3e^{-1}x - 4e^{-1}$

e) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**



3. Soit λ est un réel supérieur à 5. H la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $H(x) = -\ln(x)\,e^{-x}$.

a) $\forall\, x > 0\ H'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} + \ln(x)\,e^{-x} = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)e^{-x} = h(x)$ alors H est une primitive de f.

b) $\mathcal{A}(\lambda) = 20\int_e^{\lambda} h(x)dx\ cm^2 = 20[H(x)]_e^{\lambda}cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = 20\left(e^e - \ln(\lambda)\,e^{-\lambda}\right)cm^2$.

c) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[20\left(e^e - \ln(\lambda)\,e^{-\lambda}\right)\right] = \mathbf{20e^e}cm^2$

<u>Problème 138 :</u> unité graphique 2 cm.

1. Soit u la fonction définie par $u(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

a) Calculer $u'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction u.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une unique solution dans IR . On note α cette solution. Montrer que 0,20 < α < 0,21.

c) Donner le signe de $u(x)$, pour $x \in$ IR.

2. On considère la fonction h définie par $h(x) = x^2e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2$.

a) Calculer les limites de h sur D_h.

b) Montrer que $h(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$. En déduire une valeur approchée de $h(\alpha)$ en prenant α = 0,2.

c) Montrer que $\forall\, x \in$ IR $h'(x) = x.u(x)$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

3. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, l'axe (ox) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

<u>Correction :</u> unité graphique 2 cm.

1. $\boldsymbol{u(x) = (x+2)e^{x-1} - 1}$

a) Dresser le tableau de variations de $\boldsymbol{u}$.

$\forall\, x \in$ IR, $u'(x) = (\boldsymbol{x+3})\boldsymbol{e^{x-1}}$, donc u est strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$ et

u est strictement croissante sur $]-3; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(\boldsymbol{x+2})\boldsymbol{e^{x-1}} - \boldsymbol{1}] = -1$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(\boldsymbol{x+2})\boldsymbol{e^{x-1}} - \boldsymbol{1}] = +\infty$.

tableau de variation de $\boldsymbol{u}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	-1	$\searrow$	$-1{,}081$	$\nearrow$	$+\infty$

b) u est continue et strictement croissante sur $]\boldsymbol{-3}; +\infty[\, \subset$ IR. Or $u(\boldsymbol{-3}) \times u(+\infty) < 0$. Donc sur $]\boldsymbol{-3}; +\infty[$, il a un unique antécédent. Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]\boldsymbol{-3}; +\infty[$

$u(0{,}20) = -0{,}014$ et $u(0{,}21) = 0{,}00299$ alors $\alpha \in]\,0{,}20; 0{,}21[$.

c) $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[$, $u(x) < 0$ et $\forall\, x \in \cup\,]\alpha; +\infty[$, $u(x) > 0$.

2. $\boldsymbol{h(x) = x^2e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2}$

a) $\mathbf{D}_{\boldsymbol{h}} =]-\infty; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\boldsymbol{x^2e^{x-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x^2}\right] = -\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\left(\boldsymbol{e^{x-1}} - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{x^2}\right] = +\infty$.

b) $u(x) = e^{\alpha-1}(\alpha+2) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$

$h(\alpha) = \left(e^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 = \left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 = \left(\frac{2-\alpha-2}{2(\alpha+2)}\right)\alpha^2 = -\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

$\boldsymbol{h(0,2)} = -\frac{(0{,}2)^3}{2(0{,}2+2)} = 1{,}8181.10^{-3}$.

c) $\forall\, x \in$ IR $h'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = x[(x+2)e^{x-1} - 1] = x.u(x)$.

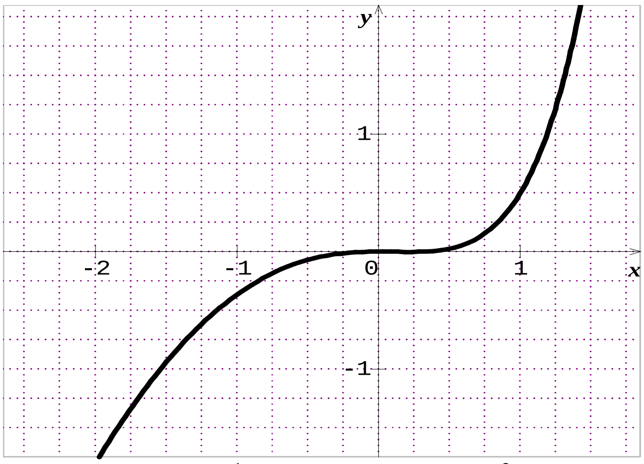
x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$\boldsymbol{x}$	$-$	$+$		$+$
$u(x)$	$-$	$-$		$+$
$\boldsymbol{h'(x)}$	$+$	$-$		$+$

$\forall\, x \in]0; \alpha[$, $h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$.

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\, \cup\,]\alpha; +\infty[$, $h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\boldsymbol{h'(x)}$		$+$		$-$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\boldsymbol{h(\alpha)}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Tracer la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$.



3. $\mathcal{A} = 4cm^2 \int_{-1}^{1} h(x)dx = -4cm^2 \int_{-1}^{0} h(x)dx + 4cm^2 \int_{0}^{1} h(x)dx$. **Or** $\boldsymbol{I} = 4\ cm^2 \int_{-1}^{0} h(x)dx = 4\ cm^2 \left[\boldsymbol{x^2e^{x-1} - 2xe^{x-1} + 2e^{x-1} - \frac{1}{6}x^3}\right]_{-1}^{0} = \left[\boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)e^{x-1} - \frac{1}{6}x^3}\right]_{-1}^{0} 4\ cm^2 = 2\left(4\boldsymbol{e^{-1}} -\right.$

10e−2−13 cm2

$J = 4cm^2 \int_{0}^{1} h(x)dx = 4\ cm^2 \left[\boldsymbol{(x^2 - 2x + 2)e^{x-1}} -\right.$

16x301=22−13−4e−1 cm2

$\mathcal{A} = 4cm^2 \int_{-1}^{1} h(x)dx = -I + J = -2\left(4\boldsymbol{e^{-1}} -\right.$

10e−2−13 cm2+22−13−4e−1 cm2

$\mathcal{A} = 2\left(-4\boldsymbol{e^{-1}} + 10\boldsymbol{e^{-2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + 2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \boldsymbol{4e^{-1}}\right)\ cm^2$

$\mathcal{A} = 4(-4\boldsymbol{e^{-1}} + 5\boldsymbol{e^{-2}} + \mathbf{1})\ cm^2$.

<u>Problème 139 :</u> unité graphique 2 cm

1. Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie par :

$\boldsymbol{g(x) = x^3 - 3x^2 - 1}$

a) Etudier le sens de variation de la fonction $\boldsymbol{g}$.

b) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{g}$.

c) Démontrer que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ a une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$.

Vérifier que la double inégalité : $\boldsymbol{3,10 < \alpha <}$ 3,11.

d) Déterminer le signe de $\boldsymbol{g(x)}$ suivant les valeurs de $\boldsymbol{x}$.

2. On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par :

$\boldsymbol{f(x) = e^{-x}(1 - x^3)}$

a) Etudier le sens de variation de $\boldsymbol{f}$ et ses limites en $+\infty$ *et* $-\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$.

c) Montrer que $\boldsymbol{f(\alpha) = -3\alpha^2e^{-\alpha}}$. En déduire un encadrement de $\boldsymbol{f(\alpha)}$.

d) Déterminer l'équation de la tangente T à $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ au point d'abscisse $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$.

e) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et T.

3. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

a) Montrer qu'il existe des nombres réels a, b et c, que l'on déterminera, tels que la fonction F définie sur IR par $F(x) = e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx + c)$ est une primitive de f.

b) Déterminer la valeur en cm^2 de $\mathcal{A}(\alpha)$.

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α vers .

Correction :

1. $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

a) $\forall\, x \in$ IR $g'(x) = 3x(x-2)$, donc $\forall\, x \in\,]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ g est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$.

Et $\forall\, x \in [0; 2]$ g est décroissante sur $[0; 2]$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x^3 - 3x^2 - 1] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[x^3 - 3x^2 - 1] = -\infty$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

c) g est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[\, \subset$ IR. Et $g(2) \times g(+\infty) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α. **Vérifier que la double inégalité :** $g(3{,}10) = -0{,}039$ et $g(3{,}11) = 0{,}064$. Comme $g(3{,}10) \times g(3{,}11) < 0$ alors $3{,}10 < \alpha < 3{,}11$. Et $\alpha = 3{,}08$.

d) $\forall\, x \in\,]-\infty; \alpha[$ $g(x) < 0$ et $\forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[$ $g(x) > 0$.

2. $\boldsymbol{f(x) = e^{-x}(1 - x^3)}$

a) $\forall\, x \in$ IR $f'(x) = e^{-x}(-1 + x^3 - 3x^2) = e^{-x}g(x)$, donc $\forall\, x \in\,]-\infty; \alpha[$ f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

Et $\forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[$ f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^{-x}(1 - x^3)] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^{-x}(1 - x^3)] = +\infty$

b) Dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

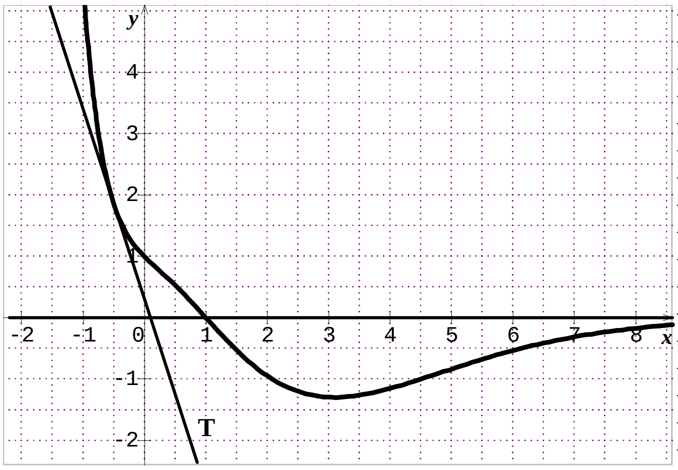
c) $g(x) = \alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 + 1$ et $f(x) = e^{-\alpha}(1 - \alpha^3) = e^{-\alpha}(1 - 3\alpha^2 - 1) = -3\alpha^2 e^{-\alpha}$. **En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.**

$3{,}10 < \alpha < 3{,}11 \Leftrightarrow -29{,}01 < -3\alpha^2 < -28{,}83$ et $3{,}10 < \alpha < 3{,}11 \Leftrightarrow 22{,}19 < e^{\alpha} < 22{,}42 \Leftrightarrow 4{,}46.10^{-2} < e^{-\alpha} < 4{,}50.10^{-2}$ en multipliant les deux inégalités, on aura : $-1{,}297 < -3\alpha^2 e^{-\alpha} < -1{,}293$ ou $-1{,}297 < \boldsymbol{f(\alpha)} < -1{,}293$.

d) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}e^{\frac{1}{2}}$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{8}e^{\frac{1}{2}}$.

T $y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{8}e^{\frac{1}{2}}x + \frac{3}{16}e^{\frac{1}{2}}$

e) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et T



3. $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_{\alpha}^{4} f(x)dx =$ l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.

a) $\forall\, x \in$ IR $F(x) = e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx + c)$

$\forall\, x \in$ IR $F'(x) = e^{-x}(3x^2 + 2ax + b) - e^{-x}(x^3 + ax^2 + bx + c) = e^{-x}[-x^3 + (3-a)x^2 +$ $2a−bx+b−c=fx$ par identification on aura

$3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$; $2a - b = 0 \Leftrightarrow b = 6$ et $b - c = 1 \Leftrightarrow c = 6 - 1 = 5$

Donc $\forall\, x \in$ IR $F(x) = e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 5)$

b) $\mathcal{A}(\alpha) = -4\int_{\alpha}^{4} f(x)dx\, cm^2 = -4[F(x)]_{\alpha}^{4} cm^2 = 4[e^{-x}(-5 - x^3 - 3x^2 -$ $6xα4cm2=4−141e−4+e−α5+α3+3α2+6αcm2$

c) $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = 4(-141e^{-4} + 5)cm^2$.

Problème 140 : On considère la fonction h définie par : $h(x) = e^{2x}\ln x$.

1. Quel est l'ensemble de définition de h ?

2. Soit u la fonction définie par :

$u(x) = \begin{cases} 2x\ln x + 1 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de u en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Étudier les variations de u sur D_u.

c) En déduire le signe de $u(x)$ sur D_u.

3. Etudier les limites de h sur D_h.

4. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = \frac{e^{2x}u(x)}{x}$. En déduire le sens de variation de h.
Dresser le tableau de variation de h.

5. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_h$ et celles de $\mathcal{C}_u$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et celle de $\mathcal{C}_u$.

<u>**Correction :**</u> $h(x) = e^{2x}\ln x$

1. $D_h = \{x / x \in IR, x > 0\} =]0; +\infty[$.

2. $u(x) = \begin{cases} 2x\ln x + 1 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

a) **Continuité de u en 0:** $\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = 1$ et $u(0) = 1$, alors u est continue en 0.

Dérivabilité de u en 0: $\frac{u(x)-u(0)}{x-0} = 2\ln x$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = -\infty$; alors u n'est pars dérivable en 0, par conséquent $\mathcal{C}_u$ admet en cet point 0 une demi-tangente verticale.

b) $\lim\limits_{x \mapsto 0} u(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = +\infty$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[$, $u'(x) = 2(\ln x + 1)$ alors u est strictement décroissante sur $]0; e^{-1}[$ et u est strictement croissante sur $]e^{-1}; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de u.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	1	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$m = -2e^{-1} + 1 = 0{,}26 > 0$.

c) $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $u(x) > 0$ car $m > 0$.

3. $\lim\limits_{x \mapsto 0} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = +\infty$.

4. $\forall\, x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = 2e^{2x}\ln x + \frac{e^{2x}}{x} = \frac{e^{2x}u(x)}{x}$ alors h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

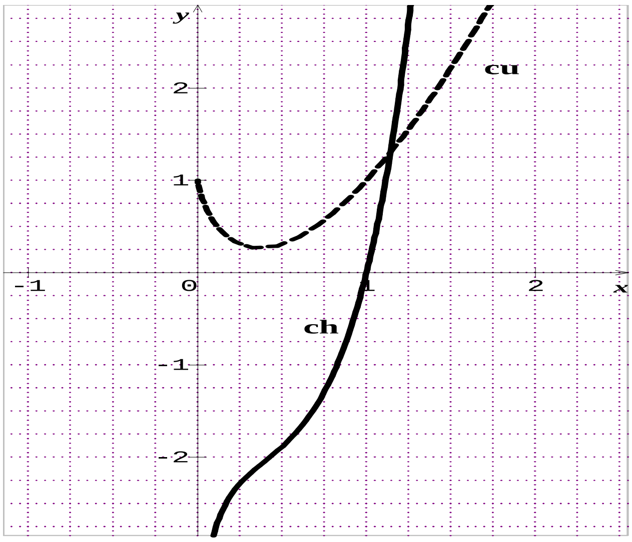
x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **branches infinies de $\mathcal{C}_u$.** Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{u(x)}{x} = +\infty$.

branches infinies de $\mathcal{C}_h$. Branche parabolique de direction (Oy) car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.

Asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

6. **$\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_u$.**



<u>**Problème 141 :**</u> **On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{e^x+2}{e^x+2x}$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de h ?**
2. **Soit u la fonction définie par :**
$u(x) = e^x(x-2) - 2$.
a) **Étudier les variations de u sur D_u.**
b) **Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution x_0, appartient à l'intervalle $[2; 2,5]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près. En déduire le signe de $u(x)$ sur D_u.**
3. **Etudier les limites de h sur D_h.**
Montrer que pour tout réel $x \in IR$, $h'(x) = \frac{2u(x)}{(e^x+2x)^2}$.
En déduire le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$.
4. **Montrer que $h(x_0) = \frac{1}{x_0-1}$.**
Dresser le tableau de variation de h sur $[0; +\infty[$.
5. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ sur $[0; +\infty[$.**
6. **Soit α est un réel appartenant à $]3; 4[$.**
a) **Calculer, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{\imath})$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 0$ et $\mathcal{C}_f$.**
b) **Calculer $\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha) =$.**

<u>**Correction :**</u> $h(x) = \frac{e^x+2}{e^x+2x}$

1. $D_h = \{x / x \in IR,\ e^x + 2x \neq 0\} =]-\infty; +\infty[$.
2. $u(x) = e^x(x-2) - 2$

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = +\infty$.

$\forall\, x \in]-\infty; +\infty[$, $u'(x) = e^x(x-1)$; alors u est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et u est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Dressons le tableau de variation de u.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	-2	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$m=-e-2=-4{,}71.$

b) $u(2)=-2$ et $u(2{,}5)=4{,}09$

u est continue et strictement croissante sur $[2;2{,}5]$. Or $u(2)\times u(2{,}5)<0$. Donc sur $[2;2{,}5]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $x_0\in[2;2{,}5]$ et $x_0=2{,}19$.

$\forall\, x\in\,]-\infty;x_0]$, $u(x)\le 0$ et

$\forall\, x\in[x_0;+\infty[$, $u(x)\ge 0$.

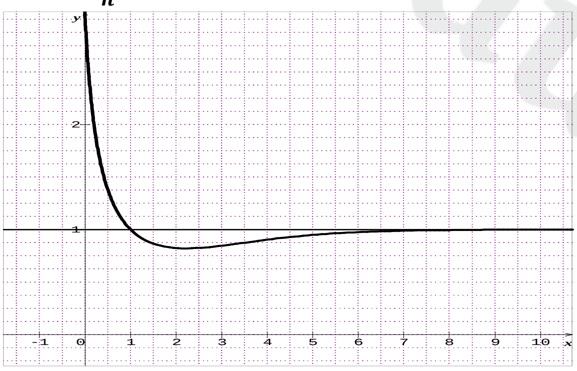
3. $\lim\limits_{x\mapsto 0} h(x)=3$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x)=1$.

$\forall\, x\ge 0$, $h'(x)=\frac{2u(x)}{(e^x+2x)^2}$ alors h est décroissante sur $[0;x_0[$ et h est croissante sur $[x_0;+\infty[$.

4. On sait que $u(x_0)=e^{x_0}(x_0-2)-2=0 \Leftrightarrow$ $e^{x_0}=\frac{2}{x_0-2}$ alors $h(x_0)=\frac{e^{x_0}+2}{x_0+2x_0}=\frac{\frac{2}{x_0-2}+2}{\frac{2}{x_0-2}+2x_0}=\frac{1}{x_0-1}$.

x	0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	3	$\searrow$	$\frac{1}{x_0-1}$	$\nearrow$	1

5. $.\mathcal{C}_h$.



6. $\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha\left[\frac{e^x+2}{e^x+2x}\right]dx$

a) $\mathcal{A}(\alpha)=[\ln(e^x+2x)]_0^\alpha=\ln(e^\alpha+2\alpha)$.

b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\ln 2\alpha$.

<u>Problème 142 :</u>

1. Soit u définie par : $u(x)=e^x+x+1$.

a) Etudier le sens de variation de u et ses limites en $+\infty$ *et* $-\infty$.

b) Montrer que l'équation $u(x)=0$ a une solution et une seule α et que l'on a : $\alpha\in\,]-1{,}28;\ -1{,}27[$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{xe^x}{1+e^x}$

a) Etudier le sens de variation de f et ses limites en $+\infty$ *et* $-\infty$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\alpha+1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport (Δ).

Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et (Δ).

3. Soit h définie sur $[0;1]$ par : $h(x)=\ln(1+e^x)$.

On note les points $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 et B son point d'abscisse 1.

a) Etudier brièvement les variations de h et construire la courbe $\mathcal{C}_h$.

b) Donner une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}_h$.

c) On note P l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$.

Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$.

<u>Correction :</u>

1. $u(x)=e^x+x+1$.

a) $\forall\, x\in$ IR, $u'(x)=1+e^x>0$, donc, u est strictement croissante sur IR.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[e^x+x+1]=-\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[e^x+x+1]=+\infty$.

b) $u(-1{,}28)=-1{,}96.10^{-3}$ et $u(-1{,}27)=1{,}08.10^{-2}$

u est continue et strictement croissante sur $]-1{,}28;-1{,}27[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a $u(-1{,}28)\times u(-1{,}27)<0$ et $]-1{,}96.10^{-3};1{,}08.10^{-2}[$ alors l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $-1{,}28<\alpha<-1{,}27$ tel que $u(\alpha)=0$.

c) $\forall\, x\in\,]-\infty;\alpha]$, $u(x)\le 0$ et

$\forall\, x\in[\alpha;+\infty[$, $u(x)\ge 0$.

2. $f(x)=\frac{xe^x}{1+e^x}=\frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

a) $\forall\, x\in$ IR, $f'(x)=\frac{e^x(e^x+x+1)}{(1+e^x)^2}=e^x.\frac{u(x)}{(1+e^x)^2}$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha[$ et f est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}\right]=0$;

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}\right]=+\infty$.

b) On sait que $u(\alpha) = e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = -\alpha - 1$ et $f(\alpha) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}} = \frac{\alpha e^{\alpha}}{1-\alpha-1} = -e^{\alpha} = \alpha + 1$.

déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27 \Leftrightarrow -0{,}28 < \alpha + 1 < -0{,}27$ ou $-0{,}28 < f(\alpha) < -0{,}27$.

c) **tableau de variation de f.**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	0 $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

d) $f(x) - y = \frac{xe^x}{1+e^x} - x = \frac{-x}{1+e^x} = \frac{-1}{\frac{1}{x}+\frac{e^x}{x}}$.

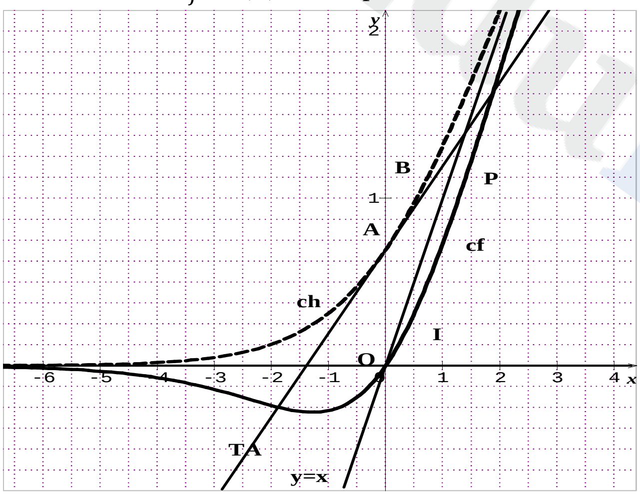
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{-1}{\frac{1}{x}+\frac{e^x}{x}}\right] = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport (Δ).

Sur $]-\infty; 0[$, $f(x) - y = \frac{-x}{1+e^x} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (Δ).

Sur $]0; +\infty[$, $f(x) - y = \frac{-x}{1+e^x} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (Δ).

Si $x = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ et (Δ) se coupent



3. **h définie sur $[0; 1]$ par : $h(x) = \ln(1 + e^x)$**

a) **variations de h et construire la courbe $\mathcal{C}_h$.**

$\forall\, x \in [0; 1]$, $h'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} > 0$ alors h est croissante sur $[0; 1]$.

Et $h(0) = \ln 2 = 0{,}69$; $h(1) = \ln(1 + e) = 1{,}31$.

x	0	1
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$0{,}69$ $\nearrow$	$1{,}31$

$\mathcal{C}_h$, voir figure.

b) $\mathrm{T_A} : y = \frac{1}{2}x + \ln 2$.

c) $\mathrm{P} = \mathrm{T_A} \cap [\mathrm{IB}] \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(1; \frac{1}{2} + \ln 2\right)$.Calculer les aires des trapèzes $\mathcal{A}(OIPA) = \frac{(\mathrm{OA+IP})\mathrm{OI}}{2}$ et $\mathcal{A}(OIBA) = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \ln(1 + e^x)\, dx$.

$\mathrm{OA} = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = 0{,}69$.

$\mathrm{IP} = \sqrt{(x_P - x_I)^2 + (y_P - y_I)^2} = 1{,}19$.

$\mathrm{OI} = 1$ donc $\mathcal{A}(OIPA) = \frac{(\mathrm{OA+IP})\mathrm{OI}}{2} = 0{,}94$.

$\mathcal{A}(OIBA) = \int_0^1 \ln(1 + e^x)\, dx = \ln(1 + e) - \int_0^1 f(x)dx$.

Problème 143 :

A. **On considère la fonction f définie par :**

$f(x) = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x}$.

1.

a) **Déterminer les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.**

b) **Dresser le tableau de variations de f.**

c) **Donner une équation de la tangente T au point d'abscisse nulle.**

2. **Soit la fonction h définie par :**

$h(x) = f(x) + 2x$.

a) **Démontrer que $h''(x) = \frac{8e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.**

b) **En déduire le sens de variation et signe de h', puis le sens de variation et signe de h.**

c) **Quelle est la position de courbe de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente T ?**

3. **Démonter que f est une fonction impaire. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T (unité graphique 2 cm).**

B.

1.

a) **Calculer l'intégrale de $\mathrm{I} = \int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx$.**

b) **Vérifier que, pour tout réel x,**

$f(x) = 4 - \frac{8e^x}{1+e^x}$.

c) **Déduire des questions précédentes l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses de la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.**

2. **On considère ici la région du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite T et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$.**

a) **Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de cette région.**

b) **Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.**

3. **Résolution de l'équation $f(x) = m$ où m est un nombre réel donné.**

a) **Déterminer graphiquement le nombre de solutions de $f(x) = m$ suivant les valeurs de m.**

b) Résoudre l'équation $f(x) = 2$. Résoudre l'équation $f(x) = m$ pour m quelconque dans IR.

4. A partir de la représentation de f, le nombre de solutions de l'équation $f(x) + x = 0$.

5. Soit $\varphi(x) = f(x) + x$.

a) Etudier les limites de la fonction en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Vérifier que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = \frac{e^{2x}-6e^x+1}{(1+e^x)^2}$.

En déduire les variations de φ.

c) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique dans $]\ln(3+2\sqrt{2})\,;+\infty[$.

__Correction :__

A. $f(x) = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x}$.

1.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{4(1-e^x)}{1+e^x}\right] = 4$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{4(1-e^x)}{1+e^x}\right] = -4$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -4$ en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

$\forall\, x \in$ IR $f'(x) = \frac{-8e^x}{(1+e^x)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;+\infty[$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	-4

c) **T** $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -2x$.

2. $h(x) = f(x) + 2x$.

a) $\forall\, x \in$ IR $h'(x) = f'(x) + 2 = \frac{-8e^x}{(1+e^x)^2} + 2 \Leftrightarrow$

$h''(x) = \frac{-8e^x(1+e^x)^2+16e^x.e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{8e^x(1+e^x)(-1-e^x+2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{8e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

b) Le signe de $h''(x)$ de celui de $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h''(x)$	$-$		$+$

Comme $h'(x) = 0$ qui est un minimum alors h' est positive sur IR et donc que h est croissants sur IR.

c) $f(x) + 2x = h(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$+$

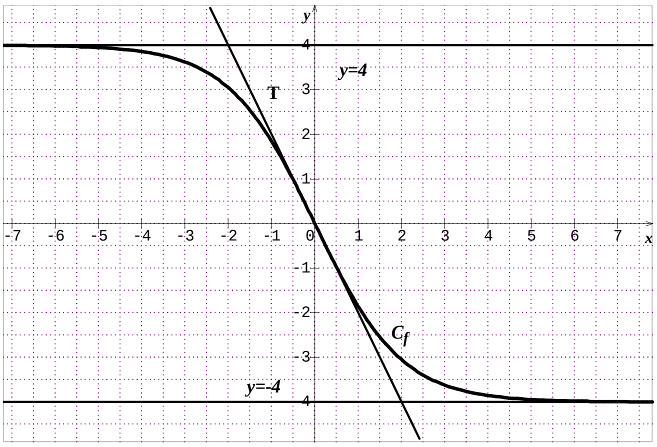
Sur $]-\infty;0[$, $f(x) - y < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T sur $]-\infty;0[$.

Sur $]0;+\infty[$, $f(x) - y = \frac{-x}{1+e^x} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $]0;+\infty[$.

Si $x = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ et T se coupent

3. $f(-x) = \frac{4(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{4(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{4(e^x-1)}{1+e^x} = -\frac{4(1-e^x)}{1+e^x} = -f(x)$ alors f est une fonction impaire.

Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.



B.

1.

a) $\mathrm{I} = \int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = [\ln(1+e^x)]_{-3}^{0} = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-3}}\right)$.

b) $\forall\, x \in$ IR $f(x) = 4 - \frac{8e^x}{1+e^x} = \frac{4+4e^x-8e^x}{1+e^x} = \frac{4-4e^x}{1+e^x} = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x} = f(x)$

c) $\mathrm{U} = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0}\left[4 - \frac{8e^x}{1+e^x}\right]dx = \int_{-3}^{0} 4\,dx - 8\int_{-3}^{0}\frac{e^x}{1+e^x}\,dx = [4x]_{-3}^{0} - 8\,\mathrm{I}$

$\mathrm{U} = 12 - 8\ln\left(\frac{2}{1+e^{-3}}\right)$

$\mathcal{A} = 4\,\mathrm{U}\ \mathrm{cm}^2 = 16\left[3 - 2\ln\left(\frac{2}{1+e^{-3}}\right)\right]\mathrm{cm}^2$; une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire est $\mathcal{A} = 27{,}37\ \mathrm{cm}^2$.

2.

a) $\mathrm{U}' = -\int_{-3}^{0} h(x)\,dx = \int_{-3}^{0}[-2x - f(x)]\,dx = -\int_{-3}^{0} 2x\,dx - \mathrm{U} = [-x^2]_{-3}^{0} - \mathrm{U} = 9 - \mathrm{U}$

$\mathcal{A}' = 4\,\mathrm{U}'\ \mathrm{cm}^2 = \left[36 - 48 + 32\ln\left(\frac{2}{1+e^{-3}}\right)\right]\mathrm{cm}^2$

$\mathcal{A}' = \left[32\ln\left(\frac{2}{1+e^{-3}}\right) - 12\right]\ \mathrm{cm}^2$

b) une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire est $\mathcal{A}' = 8{,}625\ \mathrm{cm}^2$.

3. l'équation $f(x) = m$ où $m \in$ IR.

a) Si $m < -4$ alors il n'y a aucune solution.

Si $4 < m$ alors il n'y a aucune solution

Si $-4 < m < 4$ alors il y a une unique solution

b) $f(x) = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x} = 2 \Leftrightarrow 3e^x = 1 \Leftrightarrow x = -\ln 3$

$f(x) = m \Leftrightarrow (4+m)e^x = 4 - m \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4-m}{4+m}\right)$.

4. A partir de la représentation de f, le nombre de solutions de l'équation $f(x) + x = 0$.

Or $f(x) = m$ alors $f(x) + x = 0 \Leftrightarrow x = -m$ il y a une seule solution.

5. **Soit $\varphi(x) = f(x) + x = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x} + x$.**

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{4(1-e^x)}{1+e^x} + x\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{4(1-e^x)}{1+e^x} + x\right] = +\infty$.

b) $\forall\, x \in \text{IR}\ \varphi'(x) = f'(x) + 1 = 1 - \frac{8e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-8e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x}-6e^x+1}{(1+e^x)^2}$ son signe dépend de celui de $e^{2x} - 6e^x + 1$. **Posons** $e^{2x} - 6e^x + 1 = 0$

$\Delta = 36 - 4 = 32$ on aura $e^x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$\forall\, x \in \text{IR}\ \varphi'(x) = \frac{(e^x-3+2\sqrt{2})(e^x-3-2\sqrt{2})}{(1+e^x)^2}$

$\forall\, x \in \left]-\infty; \ln(3-2\sqrt{2})\right[\cup \left]\ln(3+2\sqrt{2});\ +\infty\right[$ $\boldsymbol{\varphi}'(x) > 0$ donc $\boldsymbol{\varphi}$ est strictement croissante sur $\left]-\infty; \ln(3-2\sqrt{2})\right[$ et sur $\left]\ln(3+2\sqrt{2});\ +\infty\right[$.

$\forall\, x \in \left]\ln(3-2\sqrt{2}); \ln(3+2\sqrt{2})\right[$ $\boldsymbol{\varphi}'(x) < 0$ donc $\boldsymbol{\varphi}$ est strictement décroissante sur $\left]\ln(3-2\sqrt{2}); \ln(3+2\sqrt{2})\right[$.

c) $\boldsymbol{\varphi}\left(\ln(3+2\sqrt{2})\right) = -1{,}065$

$\boldsymbol{\varphi}$ est continue et strictement croissante sur $\left]\ln(3+2\sqrt{2});\ +\infty\right[$. De plus $\boldsymbol{\varphi}\left(\ln(3+2\sqrt{2})\right) \times \boldsymbol{\varphi}(+\infty) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique dans $\left]\ln(3+2\sqrt{2}); +\infty\right[$.

Problème 144 :

A. **On considère la fonction f définie par :**
$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{2+x}}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de f ?**
Déterminer les limites de f sur D_f.
2. **Etudier le sens de variation de f sur D_f.**
3. **Dresser le tableau de f sur D_f.**
4. **Construire $\mathcal{C}_f$.**

B. **Soit la fonction g définie par :**
$\boldsymbol{g(x) = \frac{e^x}{x(2+x)}}$.

1. **Quel est l'ensemble de définition de g ?**
Déterminer les limites de g sur son domaine.
2. **Etudier les variations de g sur D_g.**
3. **Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet trois solutions notées α, β et γ avec $\alpha < \beta < \gamma$. Etablir les égalités $\alpha < -2$; $\beta \in]0,7; 0,8[$ et $\gamma > \sqrt{2}$.**
4. **Construire $\mathcal{C}_g$**

Correction :

A. $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{2+x}}$.

1. $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

Déterminer les limites de f sur D_f.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^x}{2+x}\right] = \frac{0}{-\infty} = 0 \times \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{2+x}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^-} \left[\frac{e^x}{2+x}\right] = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^+} \left[\frac{e^x}{2+x}\right] = \frac{e^{-2}}{0^+} = +\infty$

2. **Etudier le sens de variation de f sur D_f.**

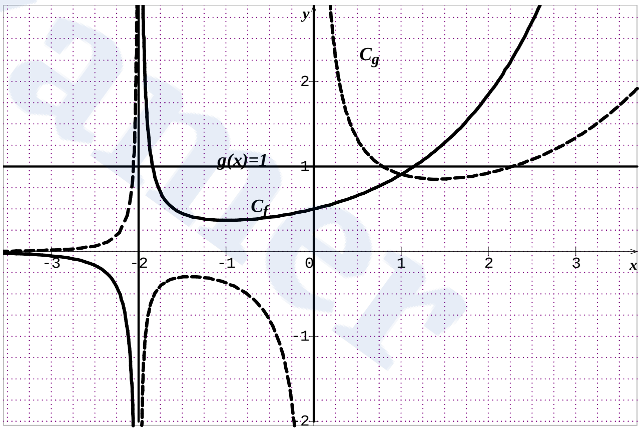
$\forall\, x \neq -2\ \ f'(x) = \frac{e^x(2+x)-e^x}{(2+x)^2} = \frac{e^x(1+x)}{(2+x)^2}$

$\forall\, x \in]-\infty; -2[\cup]-2;\ -1[$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]-2;\ -1[$
$\forall\, x \in]-1; +\infty[$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

3. **Dresser le tableau de f sur D_f.**

x	$-\infty$ $\quad$ -2		-1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ e^{-1} $\nearrow$ $+\infty$

4. **Construire $\mathcal{C}_f$.**



B. $\boldsymbol{g(x) = \frac{e^x}{x(2+x)}}$.

1. $D_g =]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; +\infty[$

Déterminer les limites de g sur son domaine.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^x}{x(2+x)}\right] = \frac{0}{-\infty} = 0 \times \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x(2+x)}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto -2^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^-} \left[\frac{e^x}{x(2+x)}\right] = \frac{e^{-2}}{0^+} = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -2^+} \left[\frac{e^x}{x(2+x)}\right] = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\frac{e^x}{x(2+x)}\right] = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\frac{e^x}{x(2+x)}\right] = \frac{e^{-2}}{0^+} = +\infty$

2. **Etudier les variations de g sur D_g.**

$\forall\, x \neq \{-2; 0\}$ $g'(x) = \frac{e^x(2x+x^2)-e^x(2+2x)}{(2x+x^2)^2} = \frac{(x^2-2)e^x}{(2x+x^2)^2}$

$\forall\, x \in]-\infty; -2[\, \cup\,]-2; -\sqrt{2}[\, \cup\,]\sqrt{2}; +\infty[$ $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty; -2[$, sur $]-2; -\sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.

$\forall\, x \in]-\sqrt{2}; 0[\, \cup\,]0; \sqrt{2}[$ $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-\sqrt{2}; 0[$ et sur $]0; \sqrt{2}[$.

$g(-\sqrt{2}) = -0{,}293$ $\qquad g(\sqrt{2}) = 0{,}851$.

3. On sait que g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -2[$ et sur $]\sqrt{2}; +\infty[$. Pour chacun de ces intervalles g admet une bijection. De plus $1 \in]0; +\infty[$ et $1 \in]0{,}851; +\infty[$: ce qui fait les deux solutions d'après le théorème des valeurs intermédiaires à savoir α et γ.

Aussi g est continue et strictement décroissante sur $]0; \sqrt{2}[$. Elle réalise donc une bijection de $]0; \sqrt{2}[$ sur $]0{,}851; +\infty[$. De plus $1 \in]0{,}851; +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 1$ admet une solution notée β.

Ainsi l'équation $g(x) = 1$ admet trois solutions notées α, β et γ avec $\alpha < \beta < \gamma$. De ce qui précède $\alpha < -2$; $\beta \in]0{,}7; 0{,}8[$ et $\gamma > \sqrt{2}$.

4. **C_g voir graphique**

<u>Problème 145 :</u> (d'unité graphique 2 cm)

Soit a un nombre réel. On considère f_a la fonction définie sur IR par $f_a(x) = (x^2 + ax - a)e^{-x}$.

A.

1. **Soit le polynôme p défini par $p(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a$. Résoudre dans IR $p(x) = 0$.**
2. **Etudier les limites de f_a en $-\infty$ et en $+\infty$.**
3. **Montrer pour tout réel a qu'il existe un point A commun à toutes les courbes C_{f_a} dont on déterminera son coordonnée.**
4. **Montrer que $\forall\, x \in$ IR $f'_a(x) = p(x).e^{-x}$. En déduire suivant les valeurs de a, on prendra ($a < -2$; $a = -2$ ou $a > -2$), le sens de variation de f_a sur IR. Pour chaque valeur de a, dresser le tableau de variations de f_a sur IR.**
5. **On suppose que $a \neq -2$. Démontrer que l'ensemble des points du plan en lesquels la tangente à C_{f_a} est parallèles à l'axe des abscisses, est la réunion d'une partie de la droite (d) et d'une parie de courbe C_g dont on donnera une équation cartésienne de la forme $y = g(x)$.**
6. **Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{-x}$. Tracer la courbe C_g.**

B. On pose $a = 1$.

1. **Donner le tableau de variation de f_1 sur IR .**
2. **Etudier la position de C_{f_1} par rapport à C_g.**
3. **Préciser les points d'intersection de C_{f_1} avec l'axe des ordonnées. Tracer C_{f_1}.**
4. **Déterminer les réels α et β tels que pour tout x réels $f_1(x) = \alpha f''_1(x) + \beta f'_1(x) + 2e^{-x}$. En déduire les primitives de la fonction de f_1 sur IR.**
5. **Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.**

a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région du plan délimitée par la courbe C_{f_1}, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

B. On pose $a = -2$.

1. **Etudier la fonction h définie sur IR par $h(x) = f_{-2}(x) - x$.**
2. **Démontrer que l'équation $f_{-2}(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.**
3. **Montrer que f_{-2} est une bijection de l'ensemble des réels sur un intervalle J que l'on précisera. Donner le tableau de variation de f^{-1}_{-2}.**
4. **Construire les courbes $C_{f_{-2}}$ et $C_{f^{-1}_{-2}}$.**

<u>Correction :</u> a un nombre réel

$$f_a(x) = (x^2 + ax - a)e^{-x}.$$

A.

1. **$p(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a$.**

Résoudre dans IR $p(x) = 0$.

$$\Delta = (a-2)^2 + 8a = (a+2)^2$$

$x' = \frac{a-2-a-2}{-2} = 2$ et $x'' = \frac{a-2+a+2}{-2} = -a$

$S_{IR} = \{-a; 2\}$

2. **limites de f_a en $-\infty$ et en $+\infty$**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(x^2)e^{-x}] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x^2}{e^x} + a\frac{x}{e^x} - \frac{a}{e^x}\right] = 0$

3. $f_a(x) = f_{a+1}(x) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ alors il existe un point A commun à toutes les courbes C_{f_a} dont de coordonnée $(1; e^{-1})$.

4. $\forall\, x \in$ IR $f_a^{'}(x) = (2x + a - x^2 - ax +$
ae−x=−x2−a−2x+2ae−x=px.e−x.
Son signe dépend de $p(x)$.

- **Pour $a < -2$**

$f_a^{'}(x) = p(x).e^{-x} = -(x-2)(x+a)e^{-x}$

x	$-\infty$	2		$-a$		$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$		$+$		$-$	

$\forall\, x \in]-\infty; 2[\, \cup\,]-a;\ +\infty[\ f_a^{'}(x) < 0$ alors $\boldsymbol{f_a}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]-a;\ +\infty[$.
$\forall\, x \in]2; -a[\ f_a^{'}(x) > 0$ alors $\boldsymbol{f_a}$ est strictement croissante sur $]2; -$a$[$.
$f_a(2) = (4+a)e^{-2}$ $\qquad f_a(-a) = -ae^{-a}$

x	$-\infty$		2		$-a$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(4+a)e^{-2}$	$\nearrow$	$-ae^{-a}$	$\searrow$	0

- Pour $\boldsymbol{a = -2}$ **et** $\boldsymbol{f_{-2}(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x}}$

$f_{-2}^{'}(x) = -(x-2)^2 e^{-x} < 0$ alors $\boldsymbol{f_{-2}}$ est strictement décroissante sur IR.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_{-2}'(x)$		$-$	
$f_{-2}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

- Pour $\boldsymbol{a > -2}$

$f_a^{'}(x) = p(x).e^{-x} = -(x-2)(x+a)e^{-x}$

x	$-\infty$	$-a$		2		$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$		$+$		$-$	

$\forall\, x \in]-\infty; -a[\, \cup\,]2;\ +\infty[\ f_a^{'}(x) < 0$ alors $\boldsymbol{f_a}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; -a[$ et sur $]2;\ +\infty[$.
$\forall\, x \in]-a; 2[\ f_a^{'}(x) > 0$ alors $\boldsymbol{f_a}$ est strictement croissante sur $]-a; 2[$.
$f_a(2) = (4+a)e^{-2}$ $\qquad f_a(-a) = -ae^{-a}$

x	$-\infty$		$-a$		2		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-ae^{-a}$	$\nearrow$	$(4+a)e^{-2}$	$\searrow$	0

5. **On suppose que $a \neq -2$.**

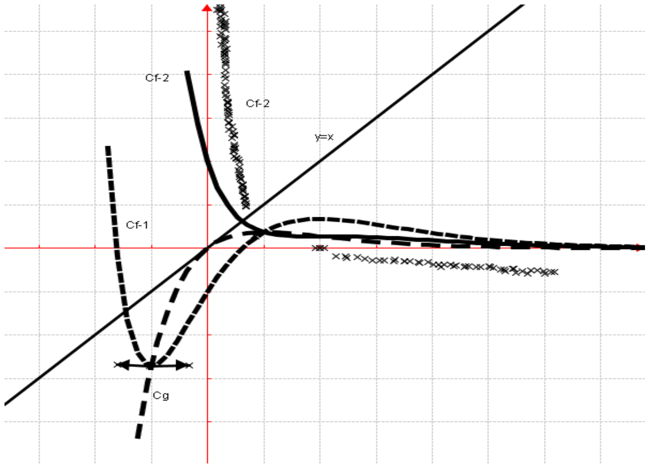
$f_a^{'}(x) = -(x-2)(x+a)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \text{(d) } x = 2 \\ y = g(x) = (x+a)e^{-x} \end{cases}$.

6. $\boldsymbol{g(x) = xe^{-x}}$

$\forall\, x \in$ IR $g'(x) = (1-x)e^{-x}$
$\forall\, x \in]-\infty; 1[\ g'(x) > 0$ alors $\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$.
$\forall\, x \in]1;\ +\infty[\ g'(x) < 0$ alors $\boldsymbol{g}$ est strictement décroissante sur $]1;\ +\infty[$.
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[xe^{-x}] = -\infty$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boldsymbol{e^{-1}}$	$\searrow$	0

Tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.



B. On pose $a = 1$ $\ f_1(x) = \left(x^2 + -1\right)e^{-x}$

1. Donner le tableau de variation de f_1 sur IR .

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$5e^{-2}$	$\searrow$	0

2. $f_1(x) - g(x) = (x^2 - 1)e^{-x} \Leftrightarrow x = \pm 1$

- $\forall\, x \in]-\infty; -1[\, \cup\,]1;\ +\infty[\ \ f_1(x) - g(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_{f_1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1;\ +\infty[$.
- $\forall\, x \in]-1; 1[\ \ f_1(x) - g(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_{f_1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-1; 1[$.
- Si $x = -1$ ou $x = 1$ $\ \mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent.

3. $\mathcal{C}_{f_1} \cap (Oy) \Leftrightarrow y = f_1(0) = -e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$
donc ce point a point coordonnée $(\boldsymbol{0};\ \boldsymbol{-1})$.

Tracer $\mathcal{C}_{f_1}$ voir graphique

4. $\forall\, x \in$ IR $f_1^{'}(x) = (-x^2 + x + 2)e^{-x} \Leftrightarrow$
$f_1^{''}(x) = (x^2 - 3x - 1)e^{-x}$
$\alpha f_1^{''}(x) + \beta f_1^{'}(x) + 2e^{-x} = [(\alpha - \beta)x^2 +$
β−3αx+2β−α+2e−x=x2+x−1e−x
$f_1(x) = \alpha f_1^{''}(x) + \beta f_1^{'}(x) + 2e^{-x}$. Par identification on aura : $\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \beta - 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$

les primitives de la fonction de f_1 sur IR.

$\mathrm{F}_1(x) = -(x^2 + 3x + 2)e^{-x} + k$ avec $k \in Cte$.

5. **Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.**

a) $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_1^{\lambda} f_1(x)dx\, cm^2 = 4[\mathrm{F}_1(x)]_1^{\lambda} cm^2}$
$\mathcal{A}(\lambda) = 4\left[6e^{-1} - (\lambda^2 + 3\lambda + 2)e^{-\lambda}\right]cm^2$

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[24e^{-1} - 4\lambda^2 e^{-\lambda}\right] = 24e^{-1}cm^2$

C. On pose $a = -2$.

1. $\boldsymbol{h(x) = f_{-2}(x) - x = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x} - x}$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{h}(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^{-x}] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{h}(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x^2}{e^x} - 2\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - x\right] = -\infty$

f_{-2} est continue et strictement décroissante sur IR. Ce qui induit que $\boldsymbol{h}$ est continue et strictement décroissante sur IR. De plus $\boldsymbol{h}(x) = 0 \in]-\infty;\ +\infty[$. Donc l'équation $\boldsymbol{h}(x) = 0$ admet une solution unique α sur IR. Or $h(x) = f_{-2}(x) - x = 0 \Leftrightarrow f_{-2}(x) = x$ d'où l'équation $f_{-2}(x) = x$ admet une solution unique α. **valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.**

$$h(0{,}61) = f_{-2}(0{,}61) - 0{,}61 = 1{,}59.10^{-2}$$
$$h(0{,}62) = f_{-2}(0{,}62) - 0{,}62 = -4{,}37.10^{-2}$$

$h(0{,}61) \times h(0{,}62) < 0$ donc $\boldsymbol{\alpha = 061}$ **à $\boldsymbol{10^{-2}}$ près.**

3. f_{-2} est continue et strictement décroissante sur IR. Donc f_{-2} est une bijection de l'ensemble des réels sur un intervalle J $=]0;\ +\infty[$.

le tableau de variation de f_{-2}^{-1}.

x	0		$+\infty$
$(f_{-2}^{-1})'(x)$		$-$	
$f_{-2}^{-1}(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

4. **$\mathcal{C}_{f_{-2}}$ et $\mathcal{C}_{f_{-2}^{-1}}$ voir graphique.**

<u>**Problème 146 :**</u> **On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.**

1.

b) Déterminer les limites f sur D_f.

c) Montrer que la droite (D) l'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

d) Montrer que $\forall\ x \in D_f$

$f(x) = \ln(1 + e^{x}) - \frac{2}{3}x$.

e) Montrer que la droite (D') l'équation $y = -\frac{2}{3}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

2. Étudier les variations f et construire $\mathcal{C}_f$.

3. Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \text{n}(1 + e^{-x})\,dx$.

b) On admet que $\forall\ x \in$ IR $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$. Montrer que $\forall\ n \geq 1$ on a $d_n \leq 1$.

c) La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

4. On note (T) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

a) Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

b) Soient M et N deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

<u>**Correction :**</u> **$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.**

1.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x\right] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\ln(1 + e^{-x})] = 0$, donc la droite (D) l'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

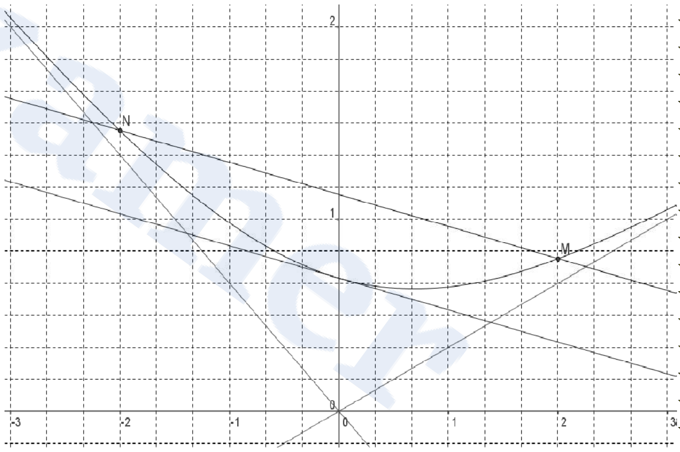
c) $f(x) = \ln(1 + e^{x}) + \ln(e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{x}) - x + \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{x}) - \frac{2}{3}x$.

d) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\ln(1 + e^{x})] = 0$, donc la droite (D'): $y = -\frac{2}{3}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

2. $\forall\ x \in$ IR, $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{2}{3} = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2]$ et f est strictement croissante sur $[\ln 2\,; +\infty[$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	p	↗	$+\infty$

$\text{p} = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$.



3.

a) La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (D) pour tout x réel, $n \geq 0$ donc $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\,dx$.

b) Les fonctions $x \longmapsto \ln(1 + e^{-x})$ et $x \longmapsto e^{-x}$ sont continues sur IR et $\forall\ x \in$ IR $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ de plus $n \geq 1$ donc :

$\int_0^n \ln(1 + e^{-x})\,dx \leq \int_0^n e^{-x}dx \Leftrightarrow$

$d_n \leq [-e^{-x}]_0^n = 1 - e^{-x} \leq 1$.

$d_{n+1} - d_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x})\,dx$.

La fonction $x \longmapsto \ln(1 + e^{-x})$ est continue et positive sur IR , $n < n + 1$ donc $\int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x})\,dx \geq 0$, donc la suite $d_n$est croissante.

c) La suite d_n est croissante majorée par 1 donc est convergente.

4. Soient M et N deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses non nulles et opposées.

a) le coefficient directeur de (T) est $\boldsymbol{f'(0)} = -\frac{1}{6}$.

b) **Montrer que la droite (MN) // (T) :** Les coordonnées sont : M $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ et N $\begin{pmatrix} -x \\ f(-x) \end{pmatrix}$.

$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\ln(1+e^x) - \frac{2}{3}x - \left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{2}{3}x\right)}{x-(-x)} = \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$ donc la droite (MN) a le même coefficient directeur que la droite (T)

d'où la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

<u>**Problème 147 :**</u>

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{f(x)} = \frac{x-1+x\ln x}{x}$. **(unité : $2cm$).**

a) Calculer $f'(x)$. Etudier son signe.

b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c) Dresser le tableau de variation de f. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

d) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x .

2. On considère la fonction g définie par :

$\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 1[\,, g(x) = e^{x-1} - 1 \\ \text{pour } x \in [1; +\infty[, g(x) = (x-1)\ln x \end{cases}$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g.

c) Etudier le sens de variation de g.

d) Tracer $\mathcal{C}_g$ (unité : $2cm$).

3.

a) Déterminer sur $[1; +\infty[$, l'ensemble des primitives de la fonction définie par :

$\boldsymbol{h(x) = (x-1)\ln x}$.

b) Déterminer l'aire A en cm^2 de la partie de plan limitée par $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

c) Calculer la limite de cette aire.

4.

a) Démontrer que g détermine une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.

b) On désigne par $\mathcal{C}^{-1}$ la courbe représentative de g^{-1}. Construire g^{-1}.

<u>**Correction :**</u> **(unité : $2cm$).**

1. $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x-1+x\ln x}{x} = \boldsymbol{1 - \frac{1}{x} + \ln x}$

a) $\forall\, x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2} > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b) **T** $\boldsymbol{y} = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x - 2$.

c) **tableau de variation de f. Tracer $\mathcal{C}_f$.**

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[1 - \frac{1}{x} + \ln x\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[1 - \frac{1}{x} + \ln x\right] = +\infty$

x	0			$+\infty$
$f'(x)$	||		+	
$f(x)$	||	$-\infty$	↗	$+\infty$

d) $f(1) = 0$

$\forall\, x \in]0; 1]$ $f(x) \leq 0$

$\forall\, x \in [1; +\infty[$ $f(x) \geq 0$.

2. $\begin{cases} \text{pour } x \in]-\infty; 1[\,, g(x) = e^{x-1} - 1 \\ \text{pour } x \in [1; +\infty[, g(x) = (x-1)\ln x \end{cases}$

a) $\mathbf{D_g = IR}$

b) **continuité et la dérivabilité de g :**

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^-}[e^{x-1} - 1] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}[(x-1)\ln x] = 0$

Alors g est continue sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\right] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 1^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-1} = \lim\limits_{x \mapsto 1^+}[\ln x] = -\infty$.

Alors g est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur $[1; +\infty[$.

c) **Etudier le sens de variation de g.**

$\forall\, x \in]-\infty; 1[$ $g'(x) = e^{x-1} > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$.

$\forall\, x \in]1;\ +\infty[$ $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x = f(x)$

$\forall\, x \in]1; +\infty[$ $g(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

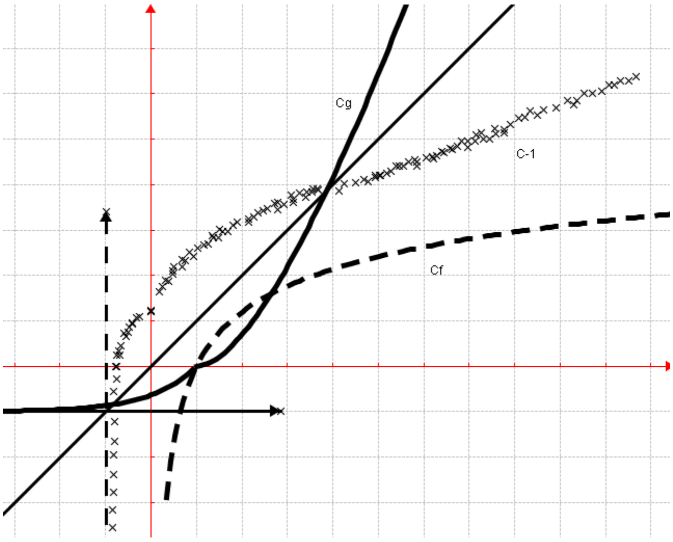
d) **Tracer $\mathcal{C}_g$ (unité : $2cm$).**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^{x-1} - 1] = -1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(x-1)\ln x] = +\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	||	+	
$g(x)$	-1	↗	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\ln x - \frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$ alors $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



3.

a) **Sur** $[1;+\infty[$ **,** $\boldsymbol{h(x) = (x-1)\ln x}$**.**

$\mathrm{H}(x) = \int \boldsymbol{h(x)} = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - x\ln x + x$

$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - x\ln x + x$

b) $\mathrm{A} = 4\int_1^3 g(x)dx\, cm^2 = 4[\mathrm{H}(x)]_1^3 cm^2 =$

$\mathrm{A} = 4\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - x\ln x + x\right]_1^3 cm^2 =$

$$\mathrm{A} = (6\ln 3 + 3)cm^2$$

valeur approchée à $\boldsymbol{10^{-2}}$ **près :** $\mathrm{A} = 9{,}59\ cm^2$

c) **limite de cette aire** $(6\ln 3 + 3)cm^2$

4.

a) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;\ +\infty[$.

b) **Construire** $\boldsymbol{g^{-1}}$ **voir graphique**

<u>Problème 148 :</u> On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ **définie par :** $\boldsymbol{f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}}$**.**

1. **Déterminer les limites de** $\boldsymbol{f}$ **sur** $\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$**.**

2.

a) **Étudier le sens de variation de la fonction** $\boldsymbol{f}$**.**

b) **Dresser le tableau de variation de** $\boldsymbol{f}$**.**

c) **Montrer que la droite (D) d'équation** $\boldsymbol{y = x - \frac{1}{2}}$ **est une asymptote oblique en** $+\infty$**.**

Etudier la position relative de (D) et $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$**.**

d) **Tracer la courbe** $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **et la droite (D).**

D'après le graphique, indiquer le nombre et le signe de solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = m}$**.**

3.

a) **Soit** $\boldsymbol{f(x) = g(x) + x}$**. Calculer sa dérivée et vérifier que** $\boldsymbol{g}$ **est strictement décroissante sur l'intervalle** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$**.**

b) **Montrer que** $\boldsymbol{g\left(\frac{1}{2}\right)}$ **et** $\boldsymbol{g\left(-\frac{1}{2}\right)}$ **sont des nombres réels non nuls de signes contraires.**

En déduire que l'équation $\boldsymbol{f(x) = -x}$ **a une solution** $\boldsymbol{\alpha}$ **sur** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$**.**

4. **Pour tout** $\boldsymbol{n}$ **entier naturel, on considère la suite** $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ **définie par**

$\boldsymbol{u_n = \int_n^{n+1}\left[f(t) - t + \frac{1}{2}\right]dt}$**.**

a) **Interpréter géométriquement la suite** $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

b) **Monter que la suite** $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ **est une suite géométrique dont on précisera la raison.**

c) **Soit la somme** $\boldsymbol{S_{0,n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$

Exprimer $\boldsymbol{S_{0,n}}$ **en fonction de** $\boldsymbol{n}$**.**

d) **Etudier la convergence de la suite** $\boldsymbol{S_{0,n}}$**.**

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}}$**.**

1. **Déterminer les limites de** $\boldsymbol{f}$ **sur** $\mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$**.**

$\mathrm{D}_f =]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[x\left(\mathbf{1} - \frac{e^{-2x}}{-2x}\right) - \frac{1}{2}\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\boldsymbol{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{e^{-2x}}\right] = +\infty$

2.

b) **Étudier le sens de variation de** $\boldsymbol{f}$**.**

$\forall\, x \in \mathrm{IR}\ \ f'(x) = 1 - e^{-2x}$

$\forall\, x \in]-\infty;0[\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\forall\, x \in]0;+\infty[\ \ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) **Dresser le tableau de variation de** $\boldsymbol{f}$**.**

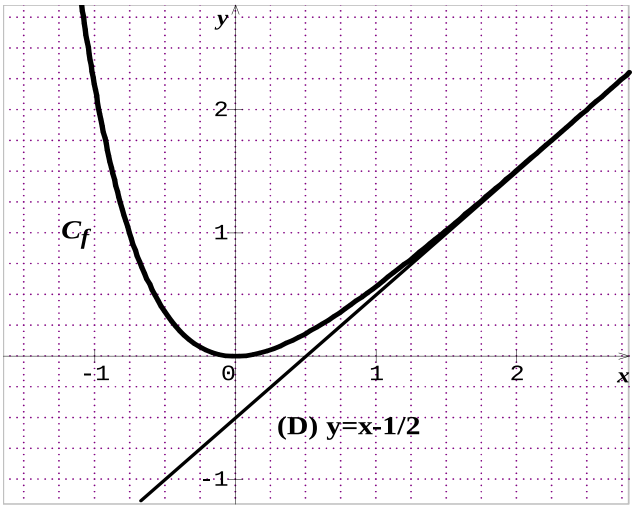
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

d) $\boldsymbol{f(x) - y = \frac{1}{2}e^{-2x}}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{\mathbf{1}}{e^{2x}}\right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $\boldsymbol{y = x - \frac{1}{2}}$ est une asymptote oblique en $+\infty$**. Etudier la position relative de (D) et** $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$**.**

$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-2x} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (D) en $+\infty$.

e) **Tracer la courbe** $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **et la droite (D).**



le nombre et le signe de solution de $f(x) = m$.

a) Si $m < 0$ il y a aucune solution

b) Si $m = 0$ il y a une seule solution : le point O

c) Si $m > 0$ il y a deux (2) solutions positives

3.

a) $\boldsymbol{f(x) = g(x) + x \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}(e^{-2x} - 1)}$.

$\forall\, x \in$ IR $g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-2x} < 0$ alors g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

b) $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -3{,}16$ **et** $g\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0{,}86$ sont des nombres réels non nuls de signes contraires.

$f(x) = -x \Leftrightarrow g(x) + x = -x \Leftrightarrow g(x) = -2x$

g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. De plus $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -x$ a une solution α sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

4. $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ **/** $\boldsymbol{u_n = \int_n^{n+1}\left[f(t) - t + \frac{1}{2}\right]dt}$ **pour tout n entier naturel.**

a) Interpréter géométriquement.

$f(t) - t + \frac{1}{2} = t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-2t}$ qui est continue sur $[n; n+1]$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur $[n; n+1]$ d'où son existence.

$u_n = \int_n^{n+1}\left[f(t) - t + \frac{1}{2}\right]dt = \int_n^{n+1}\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\right]dt$

$u_n = \left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2n}(1 - e^{-2})$

b) $u_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2n-2}(1 - e^{-2}) = e^{-2}u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison et $q = e^{-2}$ du 1^er^ terme $u_0 = \frac{1}{4}(1 - e^{-2})$.

c) $\boldsymbol{S_{0,n} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$

$S_{0,n} = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{4}(1 - e^{-2n-2})$

d) Etudier la convergence de la suite $S_{0,n}$.

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_{0,n} = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{4}(1 - e^{-2n-2})\right] = \frac{1}{4}$ donc $\boldsymbol{S_{0,n}}$ converge vers $\frac{1}{4}$.

<u>Problème 149 :</u> Soit la fonction f définie par $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1.

a) Montrer que, pour tout x de IR, $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$.

b) Montrer que, pour tout x de IR, $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Montrer que les droites (d) et (d') d'équation $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes obliques à $\mathcal{C}_f$. Préciser les positions relatives des droites (d) et (d') par rapport à $\mathcal{C}_f$.

2. Étudier la parité de la fonction f. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

3. Déterminer les variations de f sur IR. Dresser son tableau de variations sur IR.

4.

a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$, il suffit d'étudier le signe de $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{e^x-1}{e^x+1}$. En déduire la position de T par rapport à $\mathcal{C}_f$.

c) Montrer que, pour tout réel a, le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ est supérieur à $\frac{1}{2}$.

5. Tracer $\mathcal{C}_f$, (d), (d'), T.

<u>Correction :</u> $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

$D_f = \{x / x \in \text{IR}, e^x + 1 > 0\} =]-\infty; +\infty[$.

1.

a) $\forall\, x \in$ IR $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x + \frac{-e^x-1+2}{e^x+1} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$.

b) $\forall\, x \in$ IR $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + \frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x+1}$, on a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{e^x+1} = 0$

$f(x)-(x+1)=\frac{-2e^x}{e^x+1}$, on a $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{-2e^x}{e^x+1}=0$. Donc les droites (d) et (d') d'équation respectives $y=x-1$ et $y=x+\ 1$ sont asymptotes obliques à $\mathcal{C}_f$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.
$\forall\ x\in$ IR, $f(x)-(x+1)=\frac{-2e^x}{e^x+1}<0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (d') en $-\infty$.
$\forall\ x\in$ IR, $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}>0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (d) en $+\infty$.

2. $f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x-\frac{e^x}{e^x}\times\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x-\frac{1-e^x}{1+e^x}=-x+\frac{e^x-1}{e^x+1}=-\left[x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right]=-f(x)$, donc f est impaire alors $\mathcal{C}_f$ admet l'origine comme centre de symétrie.

3. $\forall\ x\in$ IR $f'(x)=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}>0$, alors f est strictement croissante sur IR.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

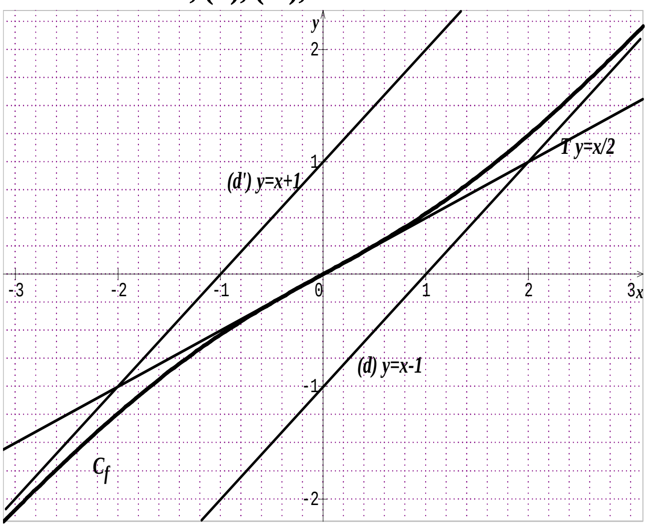
4.

a) **T :** $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{1}{2}x$.

b) $f(x)-\frac{x}{2}=x-\frac{x}{2}-\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{x}{2}-\frac{e^x-1}{e^x+1}=g(x)$, $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{2(e^x+1)^2}>0$, donc la fonction g est strictement croissante sur IR. De plus, $g(0)=0$, donc la fonction g est négative sur $]-\infty\ ;0]$ et positive sur $[0\ ;+\infty\ [$. Donc T est au-dessus de $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ sur $]-\infty\ ;0]$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $[0\ ;+\infty[$.

c) Pour montrer que, pour tout réel a, le coefficient directeur de la tangente en $x=a$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, il suffit de montrer que pour tout réel a, $f'(a)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^{2a}+1}{(e^a+1)^2}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow(e^a+1)^2\geq0$, ce qui est vérifié pour tout réel a. Donc, pour tout réel a, le coefficient directeur de la tangente en $x=a$ est supérieur à $\frac{1}{2}$.

5. **Tracer C, (d), (d'), T.**



Problème 150 :

A. On note la fonction P définie sur IR par : $\mathbf{P}(x)=e^{2x}-5e^x+4$.

1. Résoudre dans IR l'équation $\mathbf{P}(x)=0$.

2. Démontrer que
$\forall\ x\in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]\ln 4\ ;+\infty[$, $\mathbf{P}(x)>0$;
$\forall\ x\in\ ]0;\ln 4[$, $\mathbf{P}(x)<0$.

B. On considère la fonction f définie par $f(x)=x-1+\frac{1}{e^x-2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Déterminer les limites de f sur D_f.

3.

a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b. Préciser la position relative de (D) et de $\mathcal{C}_f$.

4.

a) Montrer que pour tout $x\in\ \mathrm{D}_f$ $f(x)=x-\frac{3}{2}+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

c) Préciser la position relative de (Δ) et de $\mathcal{C}_f$.

5. Montrer que $x\in\ \mathrm{D}_f$, $f'(x)=\frac{\mathrm{P}(x)}{(e^x-2)^2}$. En déduire la sens de variation de $\mathcal{C}_f$. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f.

6. Tracer (D) ; (Δ) et $\mathcal{C}_f$ (unité graphique 2 cm)

C. Soit λ un nombre réel strictement négatif.

1. Calculer, en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe $(\mathrm{O}\vec{\imath})$, les droites d'équations $x=\lambda$, $x=0$, $y=x-\frac{3}{2}$ et $\mathcal{C}_f$.

2. Calculer $\lim\limits_{\lambda\mapsto-\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

Correction :

A. $\mathrm{P}(x)=e^{2x}-5e^x+4=e^x(e^x-5)+4$.

1. Résoudre dans IR l'équation $\mathbf{P}(x)=0$.
Posons $e^x=t>0$, $t^2-5t+4=0$, $\Delta=9$, on aura :
$t^2-5t+4=(t-1)(t-4)=0$
$e^x=t=1\Leftrightarrow x=0$ et $e^x=t=4\Leftrightarrow x=\ln 4$.
donc $S_{\mathrm{IR}}=\{0;\ln 4\}$.

2. $\forall\ x\in$ IR, $\mathrm{P}(x)=(e^x-1)(e^x-4)$
$\mathrm{P}(0)=0$ et $\mathrm{P}(\ln 4)=0$

x	$-\infty$ 0	ln 4	$+\infty$
e^x-1	$-$	$+$	$+$
e^x-4	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{P}(x)$	$+$	$-$	$+$

Donc $\forall\, x \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]\ln 4\,; +\infty[$, $\mathrm{P}(x) > 0$;
$\forall\, x \in\ ]0; \ln 4[$, $\mathrm{P}(x) < 0$.

B. $\boldsymbol{f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x - 2}}$.

1. $\mathrm{D}_f =]-\infty; \ln 2[\ \cup\ ]\ln 2\,; +\infty[$.

2. $\lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^-} \left[x - 1 + \frac{1}{e^x-2}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto (\ln 2)^+} \left[x - 1 + \frac{1}{e^x-2}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[x - 1 + \frac{1}{e^x-2}\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x - 1 + \frac{1}{e^x-2}\right] = +\infty$.

3.

a) $f(x) - y = x - 1 + \frac{1}{e^x-2} - (x-1) = \frac{1}{e^x-2}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{e^x-2}\right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b) Sur $]\ln 2\,; +\infty[$ on a : $f(x) - y = \frac{1}{e^x-2} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (D) en $+\infty$.

4.

a) $\forall\, x \neq \ln 2$ $f(x) = x - 1 + 1 - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)} =$ $x - 1 + \left[1 - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)}\right] = x - 1 + \left[-\frac{1}{2} + \right.$
ex2ex−2=x−1+−ex+2+ex2ex−2=x−1+1ex−2=fx

b) $f(x) - y = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)} - \left(x - \frac{3}{2}\right) =$ $\frac{e^x}{2(e^x-2)}$ ainsi $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right] = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

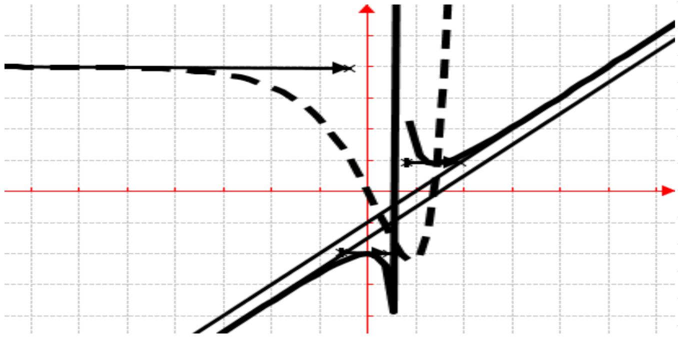
c) Sur $]-\infty; \ln 2[$ on a : $f(x) - y = \frac{e^x}{2(e^x-2)} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (Δ) en $-\infty$.

5. $\forall\, x \neq \ln 2$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{(e^x-2)^2} = \frac{(e^x-2)^2 - e^x}{(e^x-2)^2} =$ $\frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(e^x-2)^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{(e^x-2)^2}$ son signe dépend de $\mathrm{P}(x)$.

$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]\ln 4\,; +\infty[$ $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\ln 4\,; +\infty[$.
$\forall\, x \in\ ]0; \ln 2[\ \cup\ ]\ln 2\,; \ln 4[$ $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; \ln 2[$ et sur $]\ln 2\,; \ln 4[$.

x	$-\infty$ 0	$\ln 2$	$\ln 4$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $-$	‖	$-$ $+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow -2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0{,}88 \nearrow +\infty$

6. **Tracer (D) ; (Δ) et $\mathcal{C}_f$ (unité graphique 2 cm)**



C. **Soit λ un nombre réel strictement négatif.**

Sur $]-\infty; \ln 2[$ on a : $f(x) - y = \frac{e^x}{2(e^x-2)} < 0$

1. $\mathrm{U} = \int_\lambda^0 [f(x) - y]dx = \int_\lambda^0 \left[\frac{e^x}{2(e^x-2)}\right] dx$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}[\ln|e^x - 2|]_\lambda^0 = -\frac{1}{2}\ln|e^\lambda - 2|$$

Comme sur $]-\infty; \ln 2[$ on a : $f(x) - y = \frac{e^x}{2(e^x-2)} < 0$

Alors $\mathrm{U} = +\frac{1}{2}\ln(2 - e^\lambda)$

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4\mathrm{U}\mathrm{cm}^2 = 2\ln(2 - e^\lambda)\ \mathrm{cm}^2$$

2. $\lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} [2\ln(2 - e^\lambda)\mathrm{cm}^2] = 2\ln 2\ \ \mathrm{cm}^2$

<u>Exercice 151 :</u> BAC 2013 unité graphique 2cm.

A. **On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 2y' + y = -x + 3$.**

1. **Vérifier que la fonction g définie sur IR par $g(x) = -x + 1$ est une solution de (E).**

2.

a) **Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 2y' + y = 0$.**

b) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**

c) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

d) **Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = -1$.**

B. **On considère la fonction numérique u définie sur IR par $u(x) = xe^x - 1$.**

1. **Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.**

2.

a) **Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α.**

b) **Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.**

c) **En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x.**

C. **Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (x - 1)(e^x - 1)$.**

1. **Montrer que $\forall\, x \in\ ]-\infty; +\infty[$, $f'(x) = u(x)$. Dresser le tableau de variation de f.**

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et (D).

3. Tracer (D) et $\mathcal{C}_f$ (prendre $\alpha = 0,55$).

4. Soit λ un réel strictement négatif.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (D) et les droites $x = \lambda$ et $x = 0$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ en $-\infty$.

5.

a) Montrer que la restriction de f à $]-\infty; 0]$ est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer la courbe représentation Γ de la réciproque $\mathcal{C}_\Gamma$ de cette bijection sur le même graphique $\mathcal{C}_f$.

Correction :

A. (E) : $y'' - 2y' + y = -x + 3$.

1. $\forall x \in \mathrm{IR}, g(x) = -x + 1 \Leftrightarrow g'(x) = -1 \Leftrightarrow g''(x) = 0$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3 \Leftrightarrow 0 + 2 - x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 0 = 0$, d'où $\forall x \in \mathrm{IR}\ g(x) = -x + 1$ est une solution de (E).

2.

a) $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = -x + 3$

Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :

$(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$ ce qui donne

$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$

Or $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 3$

donc $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = -x + 3$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation **(E)**.

b) $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, a pour racine double 1. Les solutions de l'équation (F) sont de la forme donc $y = (\mathrm{A} + x\mathrm{B})e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (\mathrm{A} + x\mathrm{B})e^x - x + 1$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

d) $\forall x \in \mathrm{IR}, h(x) = (\mathrm{A} + x\mathrm{B})e^x - x + 1$

$\forall x \in \mathrm{IR}, h'(x) = (\mathrm{A} + x\mathrm{B} + \mathrm{B})e^x - 1$

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + 1 = 0 \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -1 \\ \mathrm{B} = 1 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathrm{IR}, h(x) = (-1 + x)e^x - x + 1$

$\forall x \in \mathrm{IR}, h(x) = -(1 - x)e^x + (1 - x)$

$\forall x \in \mathrm{IR}, h(x) = (1 - x)(1 - e^x)$

$\forall x \in \mathrm{IR}, h(x) = (x - 1)(e^x - 1)$

B. $u(x) = xe^x - 1$.

1. variations de u :

$\lim_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}[xe^x - 1] = -1$ et

$\lim_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}[xe^x - 1] = +\infty$.

$\forall x \in \mathrm{IR}, u'(x) = (x+1)e^x$, alors u strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et u est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. $u(-1) = -1{,}367$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	-1	$\searrow$	$-1{,}367$	$\nearrow$	$+\infty$

2.

a) u est continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[-1; +\infty[$ sur $[-1{,}367; +\infty[$. Or $u(-1).u(+\infty) < 0$ et $0 \in [-1{,}367; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $u(\alpha) = 0$.

b) Vérifier que $0,5 < \alpha < 0{,}6$.

$$\begin{cases} u(0{,}5) = -0{,}1756 \\ u(0{,}6) = 9{,}32.10^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(0{,}5).u(0{,}6) < 0 \\ donc\ on\ a\ \mathbf{0,5} < \alpha < 0{,}6 \end{cases}.$$

c) signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$		$+$	

C. $f(x) = (x - 1)(e^x - 1)$.

1. $\forall x \in]-\infty; +\infty[, f'(x) = (e^x - 1) + (x-1)e^x = e^x - 1 + xe^x - e^x = xe^x - 1 = u(x)$.

tableau de variation de f :

$\forall x \in]-\infty; +\infty[, f'(x) = u(x)$ alors f strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}[x \times (-1)] = +\infty$ et

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}[xe^x] = +\infty$

$$\begin{cases} u(\alpha) = \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \\ f(\alpha) = (\alpha - 1)(e^\alpha - 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) = 2 - (e^\alpha + \alpha)$$

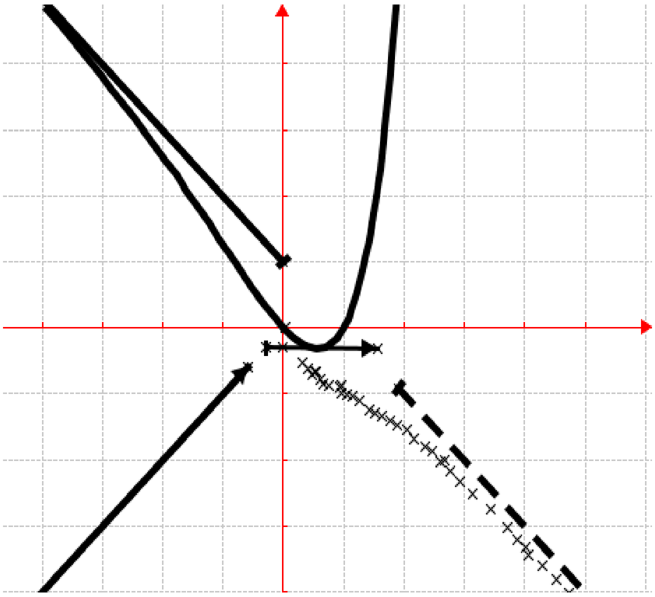
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{2 - (e^\alpha + \alpha)}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $\lim_{x \mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim_{x \mapsto -\infty}[-(1 - x)e^x] = 0$, alors la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et (D).

$\forall x \in]-\infty; \alpha], f(x) - y = -(1 - x)e^x < 0$ alors $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ est au-dessous de (D).

3. Tracer (D) et $\mathcal{C}_f$ (prendre $\alpha = 0,55$)



4. Soit λ un réel strictement négatif.
$f(x) - y = -(1-x)e^x < 0 \Leftrightarrow (1-x)e^x > 0.$

a) $\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_{\lambda}^{0}(1-x)e^x dx\ cm^2 = \Big([(1-$
$xex\lambda 0+\lambda 0exdx4cm2=42-xex\lambda 0cm2=$

$\mathcal{A}(\lambda) = [8 - 4(2-\lambda)e^{\lambda}]cm^2$

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty}[8 - 4(2-\lambda)e^{\lambda}] = 8\ cm^2.$

5.

a) f est continue et strictement décroissante sur $\mathrm{I} =]-\infty; 0]$. Elle réalise une bijection de I vers $\mathrm{J} = [0; +\infty[$.

b) **Voir le graphique de $\mathcal{C}_\Gamma$ en trait discontinue.**

<u>Problème 152 :</u> **BAC 2012 unité graphique 2cm.**

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' + y' - 2y = -3e^x$.

1. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = axe^x$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

2.

a) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' + y' - 2y = 0$.

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

d) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

B. Soit f la fonction définie par :
$f(x) = (1-x)e^x$.

1.

a) Déterminer les limites de f sur D_f.

b) Etudier le sens de variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = -1$.

3. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.

4. Soit α est un nombre supérieur à 1.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

5. Soit la restriction f_1 de f sur $\mathrm{I} =]-\infty; 0]$.

a) Montrer que f_1 est une bijection de I vers J que l'on précisera.

b) Tracer $\mathcal{C}_{f_1}$.

6. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de réel m, le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ avec la droite (D_m) d'équation $y = m$.

<u>**Correction :**</u>

A. (E) : $y'' + y' - 2y = -3e^x$.
(F) : $y'' + y' - 2y = 0$.

1. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = axe^x \Leftrightarrow g'(x) = a(x+1)e^x \Leftrightarrow g''(x) = a(x+2)e^x$.
$g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) + g'(x) - 2g(x) = a(x+$
$1ex+ax+2ex-2axex=-3ex\Leftrightarrow a2x+3-2x=-3\Leftrightarrow a$
$= -1$,
d'où $\forall\, x \in$ IR $g(x) = -xe^x$.

2.

a) $h \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow h''(x) + h'(x) - 2h(x) = -3e^x$
Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :
$(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}) \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow (h-g)''(\quad) + (h-g)'(x) - 2(h-g)(x) = 0$ ce qui donne
$h''(x) + h'(x) - 2h(x) = g''(x) + g'(x) - 2g(x)$
Or $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) + g'(x) - 2g(x) = -3e^x$
donc $h''(x) + h'(x) - 2h(x) = -3e^x$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation **(E).**

b) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**
L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$, $\Delta = 9$, a pour racines -2 et 1. Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) **l'ensemble des solutions de (E) :**
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (\mathrm{A} - x)e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

d) $\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (\mathrm{A} - x)e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$
$\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = (\mathrm{A} - x - 1)e^x - 2\mathrm{B}e^{-2x}$

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$ est : $\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (1 - x)e^x$.

B. $\boldsymbol{f(x) = (1 - x)e^x = e^x - xe^x}$.

1.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x - xe^x] = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(1 - x)e^x] = -\infty$.

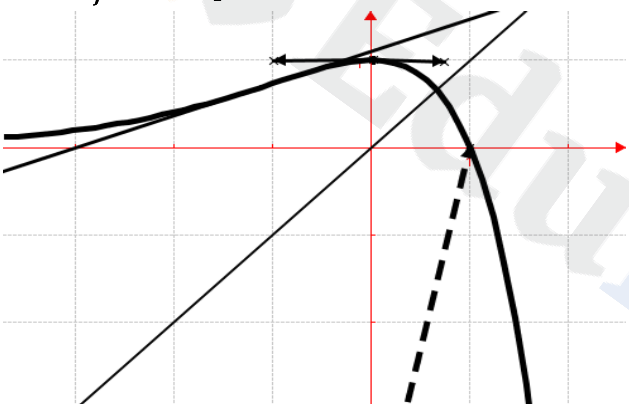
b) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = -xe^x$ alors f strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. **équation de la tangente T au point -1 :**
T : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = e^{-1}x + 3e^{-1}$.

3. **$\mathcal{C}_f$ en trait plein et T**



4. $\alpha > 1$.

a) $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_1^\alpha f(x)dx \times \mathbf{4}cm^2 = \mathbf{4}cm^2 \int_1^\alpha [xe^x - e^x]dx = [(x - 2)e^x]_1^\alpha \mathbf{4}cm^2 = [(\alpha - 2)e^\alpha + e]\mathbf{4}cm^2$.

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(\alpha - 2)e^\alpha + e] = +\infty$.

5. f_1 de f sur I $=]-\infty; 0]$.

a) f_1 est continue et strictement croissante sur I $=]-\infty; 0]$. Elle réalise une bijection de I vers J $=]0; 1]$.

b) $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$ en trait pointé, voir graphique.

6. $\begin{cases} (\mathrm{D}_m) \,//\, (Ox) \\ (\mathrm{D}_m) \cap \mathcal{C}_f \end{cases}$.

- $m \in]-\infty; 0[$, il y a un seul point d'intersection ;
- $m \in]0; 1]$, il y a deux points d'intersection ;
- $m = 1$, il y a un seul point d'intersection ;
- $m \in]1; +\infty[$, il y a aucun point d'intersection ;

__Problème 153 :__ unité graphique 3 cm.

A.

1. Résoudre (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 6y' + 5y = 0$.

2. On lance trois (3) fois un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a, b et c les résultats des premier, deuxième et troisième jets du dé. Quelle est la probabilité pour que les solutions de l'équation différentielle:(F) $ay'' + by' + cy = 0$ soient les fonctions de la forme :

a) $x \mapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}x)e^{rx}$.

b) $x \mapsto \mathrm{A}e^{r_1x} + \mathrm{B}e^{r_2x}$

c) $x \mapsto [\mathrm{A}\cos(\beta x) + \mathrm{B}\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$.

B. Soit f la fonction définie par :

$f(x) = |1 + x|e^{-3x}$.

1.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer les limites de f sur D_f.

c) Etudier le sens de variations de f.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2.

a) Montrer que la restriction de f à $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$ admet une bijection réciproque f_1.

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f_1}$.

3. Soit λ est réel positif tel que $\lambda > -1$.

a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

C. On suppose que $f(x) = (1 + x)e^{-3x}$.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r telle que pour tout n, $u_n \neq -1$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $v_n = \frac{f(u_n)}{u_n+1}$.

a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, qu'on exprimera en fonction de r.

b) Discuter suivant les valeurs de r la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Calculer en fonction de u_0 et de n la somme $S_{0,n} = \frac{f(u_0)}{u_0+1} + \frac{f(u_1)}{u_1+1} + \cdots + \frac{f(u_n)}{u_n+1}$ et discuter suivant les valeurs de r la limite de la suite $(S_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On donne $u_0 = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{3}$.

a) Exprimer v_n puis $S_{0,n}$ en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n}$.

Correction : **unité graphique 3 cm.**

A.

1. (E) $y'' - 6y' + 5y = 0$

$E_c : r^2 - 6r + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 4$; $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 5 \end{cases}$ les solutions de générale(E) sont de la forme : $y = Ae^{x} + Be^{5x}$.

2. **la probabilité pour que les solutions de:(F) $ay'' + by' + cy = 0$ soient les fonctions de la forme : triplet (a, b, c)**

$E_c : ar^2 + br + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $card(\Omega) = 6^3$

Les différentes valeurs de $4ac$:

$4a$ \ c	1	2	3	4	5	6
4	4	8	12	16	20	24
8	8	16	24	32	40	48
12	12	24	36	48	60	72
16	16	32	48	64	80	96
20	20	40	60	80	100	120
24	24	48	72	96	120	144
Les différentes valeurs de b^2:						
b^2	1	4	9	16	25	36

Nous aurons $card(\Omega) = 6^3 = 216$ triplets.

a) **$x \mapsto (A + Bx)e^{rx}$: soit A cet événement :**

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$,

- Pour $b^2 = 1$ il ya 0 triplet
- Pour $b^2 = 4$ il ya 1 triplet
- Pour $b^2 = 9$ il ya 0 triplet
- Pour $b^2 = 16$ il ya 3 triplets
- Pour $b^2 = 25$ il ya 0 triplet
- Pour $b^2 = 36$ il ya 1 triplet

$\text{card}(A) = 5 \Leftrightarrow p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{5}{216} = 0{,}0231$.

b) **$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ soit B cet événement :**

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4ac$,

- Pour $b^2 = 1$ il ya 0 triplet
- Pour $b^2 = 4$ il ya 0 triplet
- Pour $b^2 = 9$ il ya 3 triplets
- Pour $b^2 = 16$ il ya 5 triplets
- Pour $b^2 = 25$ il ya 14 triplets
- Pour $b^2 = 36$ il ya 16 triplets

$\text{card}(B) = 38 \Leftrightarrow p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{38}{216} = 0{,}1759$.

c) **$x \mapsto [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$ soit C cet événement :** $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$,

- Pour $b^2 = 1$ il ya 36 triplets
- Pour $b^2 = 4$ il ya 35 triplets
- Pour $b^2 = 9$ il ya 33 triplets
- Pour $b^2 = 16$ il ya 28 triplets
- Pour $b^2 = 25$ il ya 22 triplets
- Pour $b^2 = 36$ il ya 19 triplets

$\text{card}(C) = 173 \Leftrightarrow p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{173}{216} = 0{,}80$.

B. **$f(x) = |1 + x|e^{-3x}$.**

1.

a) $D_f =]-\infty; +\infty[$.

$\forall\ x \in]-\infty; -1]$, $f(x) = -(1 + x)e^{-3x}$.

$\forall\ x \in [-1; +\infty[$, $f(x) = (1 + x)e^{-3x}$

Continuité de f en -1 :

$\lim_{x \mapsto -1^-} f(x) = \lim_{x \mapsto -1^-}[-(1 + x)e^{-3x}] = 0$ et

$\lim_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim_{x \mapsto -1^+}[(1 + x)e^{-3x}] = 0$ alors f est continue en -1.

dérivabilité de f en -1 :

$\lim_{x \mapsto -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \mapsto -1^-}[-e^{-3x}] = -e^{3}$ alors f est dérivable à gauche en -1.

$\lim_{x \mapsto -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \mapsto -1^+}[e^{-3x}] = e^{3}$ alors f est dérivable à droite en -1.

Par conséquent f n'est pas dérivable en -1 et admet en ce point deux demi-tangentes gauche et droite de ce point anguleux.

b) **Déterminer les limites de f sur D_f.**

$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}[-(1 + x)e^{-3x}] = +\infty$

$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{e^{3x}} + \frac{x}{e^{3x}}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$.

c) **Etudier le sens de variations de f.**

- $\forall\ x \in]-\infty; -1[$, $f'(x) = (2 + 3x)e^{-3x}$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.
- $\forall\ x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) = -(2 + 3x)e^{-3x}$

$\forall\ x \in \left]-1; -\frac{2}{3}\right]$ $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur $\left]-1; -\frac{2}{3}\right]$.

$\forall\ x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[$ $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

d) **Dresser le tableau de variation de f :**

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)e^{2} = \frac{1}{3}e^{2}$.

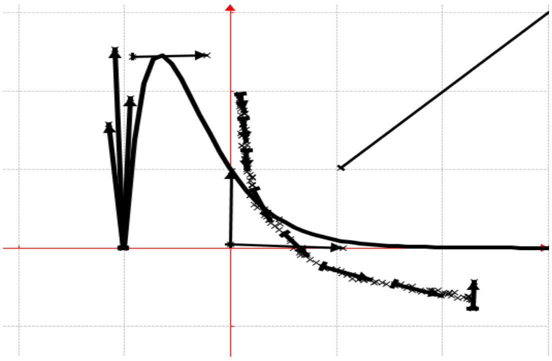
x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{3}e^{2}$	↘	0

2.

a) Comme f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$. Alors la restriction de f

est continue et strictement décroissante sur $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$.
Elle réalise une bijection de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ vers $\left]0;\frac{1}{3}e^2\right[$ et admet une bijection réciproque f_1 définie sur $\left]0;\frac{1}{3}e^2\right[$.

b) **Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f_1}$:**



3. **Soit λ est réel positif tel que $\lambda > -1$.**

a) $\mathcal{A}(\lambda) = 9\int_{-1}^{\lambda}(1+x)e^{-3x}dx\, cm^2 = -3\left[\left(\frac{4}{3}+x\right)e^{-3x}\right]_{-1}^{\lambda} cm^2 = -[(4+3x)e^{-3x}]_{-1}^{\lambda} cm^2 = \left(e^3-(4+3\lambda)e^{-3\lambda}\right)cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[e^3-(4+3\lambda)e^{-3\lambda}\right] = e^3$.

C. **On suppose que $f(x) = (1+x)e^{-3x}$.**

1. **$u_{n+1} = u_n + r$ telle que pour tout n, $u_n \neq -1$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ /**
$\forall\, n \in \mathbb{N}\; v_n = \frac{f(u_n)}{u_n+1} = \frac{(1+u_n)e^{-3u_n}}{u_n+1} = e^{-3u_n}$.

a) $v_{n+1} = e^{-3u_{n+1}} = e^{-3(u_n+r)} = e^{-3r}.e^{-3u_n} = e^{-3r}.v_n$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{-3r}$ et de 1er terme $v_0 = e^{-3u_0}$.

b) **Discuter suivant les valeurs de r la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.** $v_n = e^{-3nr}.e^{-3u_0} = e^{-3(u_0+nr)}$

- Si $r = 0 \Leftrightarrow v_n = e^{-3u_0} = v_0$, donc
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}[e^{-3u_0}] = v_0$
- Si $r > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = e^{-3nr}.e^{-3u_0} \\ q = e^{-3r} < 1 \end{cases}$, donc
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}[e^{-3nr}.e^{-3u_0}] = 0$
- Si $r < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_n = e^{-3nr}.e^{-3u_0} \\ q = e^{-3r} > 1 \end{cases}$, donc
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}[e^{-3nr}.e^{-3u_0}] = +\infty$

c) **Calculer en fonction de u_0 et de n la somme $S_{0,n} = \frac{f(u_0)}{u_0+1}+\frac{f(u_1)}{u_1+1}+\cdots+\frac{f(u_n)}{u_n+1}$ et discuter suivant les valeurs de r la limite de la suite $(S_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$.**

$S_{0,n} = \frac{f(u_0)}{u_0+1}+\frac{f(u_1)}{u_1+1}+\cdots+\frac{f(u_n)}{u_n+1} = v_0+v_1+\cdots+v_n$

$S_{0,n} = e^{-3u_0}+e^{-3u_1}+\cdots+e^{-3u_n}$

- **$r \neq 0$, donc** $S_{0,n} = e^{-3u_0}\frac{1-e^{-3nr-3r}}{1-e^{-3r}}$
- **$r = 0$, donc** $S_{0,n} = e^{-3u_0}(n+1)$.

limite de la suite $(S_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$

- $r = 0$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = +\infty$
- $\begin{cases} r > 0 \\ q < 1 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = \frac{e^{-3u_0}}{1-e^{-3r}}$
- $\begin{cases} r < 0 \\ q > 1 \end{cases}$, donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = +\infty$

2. **On donne $u_0 = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{1}{3}$.**

a) **Exprimer v_n puis $S_{0,n}$ en fonction de n :**

$$v_n = e^{-n}.e^{-1} = e^{-(n+1)}$$

$$S_{0,n} = e^{-1}\frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}$$

b) $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[e^{-(n+1)}\right] = e^{-\infty} = 0$ et

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_{0,n} = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[e^{-1}\frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}\right] = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$.

<u>Problème 154 :</u> unité graphique 4 cm.

A.

1. **Résoudre (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' + 2y' + y = 0$.**
2. **Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 2e^{-1}$.**

B. **Soit f la fonction définie par :**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}(1+x)e^{-x} & si\ x \in]-1;+\infty[\\ f(-1) = 0 \end{cases}.$$

1.

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Etudier le sens de variations de f.**

c) **Dresser le tableau de variation de f.**

2. **Soit f_1 la restriction de f à $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$**

a) **Montrer que f_1 est une bijection de $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f_1^{-1} la bijection réciproque de f_1. Calculer $f_1^{-1}\left(\sqrt{e/2}\right)$.**

b) **Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} en 0. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$.**

3.

a) **Montrer que $\forall\, x \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ on a :**
$0 \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}e$.

b) **En déduire que : $0 \le \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \le \frac{\sqrt{2}}{4}e$.**

c) Calculer en cm^2 l'aire S délimitée par la courbe $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0$; $x = \sqrt{e/2}$ et $y = -\frac{1}{2}$.

Donner un encadrement de S à 10^{-2} près.

4. Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx.$

a) Démontrer que $\forall\, x \in [n+1; n]$ on a :

$f(n+1) \le f(x) \le f(n)$. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

<u>**Correction :**</u> **unité graphique 4 cm.**

A.

1. (E) $y'' + 2y' + y = 0$

$E_c : r^2 + 2r + 1 = 0,\ \Delta = 4 - 4 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 0$;

$r_1 = -1$ les solutions de générale(E) sont de la forme : $y = (Ax + B)e^{-x}$

2. $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h(x) = (Ax + B)e^{-x}$

$h(0) = B = 1$ et $h(1) = (A + B)e^{-1} = 2e^{-1} \Leftrightarrow A + B = 2 \Leftrightarrow A = 1.$

B. $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}(1+x)e^{-x} & si\ x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}.$

1.

a) Continuité de f en -1 :

$\forall\, x > -1,\ f(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = e^{-x}\sqrt{x+1}$

$f(-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} [e^{-x}\sqrt{x+1}] = 0$ alors f est continue en -1.

dérivabilité de f en -1 :

$\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \left[\frac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}}\right] = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en -1. Par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet en ce point une demi-tangente verticale.

b) Etudier le sens de variations de f.

$\forall\, x > -1,\ f'(x) = e^{-x}\sqrt{x+1} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}} = -e^{-x}\sqrt{x+1} = \frac{1-2x-2}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} = \frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}}e^{-x}$

$\forall\, x \in \left]-1; \frac{-1}{2}\right]$, $f'(x) \ge 0$ alors f est croissante sur $\left]-1; \frac{-1}{2}\right]$.

$\forall\, x \in \left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) \le 0$ alors f est décroissante sur $\left[\frac{-1}{2}; +\infty\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [e^{-x}\sqrt{x+1}] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$

$f(-1/2) = e^{1/2}\sqrt{1/2} = \sqrt{e/2}$

x	-1		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	$\boxtimes$	$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e/2}$	$\searrow$	0

2. Soit f_1 la restriction de f à $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$

a) Comme f est continue et strictement croissante sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$. Alors f_1 est continue et strictement croissante sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$. Elle réalise une bijection de $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ vers $J = \left[0; \sqrt{e/2}\right]$ et admet une bijection réciproque f_1^{-1} définie sur $\left[0; \sqrt{e/2}\right]$.

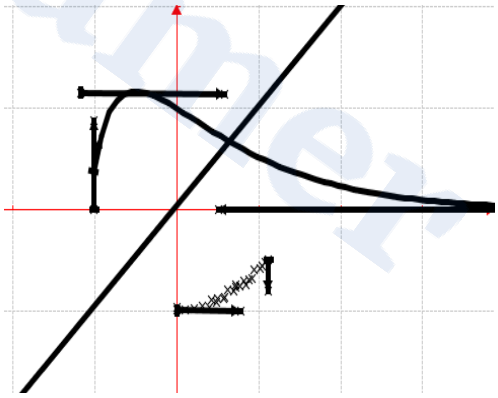
Comme $f(-1/2) = \sqrt{e/2} \Leftrightarrow f_1^{-1}\left(\sqrt{e/2}\right) = -\frac{1}{2}$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} en . Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$.

dérivabilité de f_1^{-1} en 0 : $f_1^{-1}(0) = -1$

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{f_1^{-1}(x) - f_1^{-1}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{y \mapsto -1} \frac{y+1}{f(y) - f(-1)} = \lim\limits_{y \mapsto -1} \frac{1}{\frac{f(y)}{y+1}} =$ or $\frac{f(y)}{y+1} = \frac{e^{-y}}{\sqrt{y+1}}$

donc $\lim\limits_{y \mapsto -1} \frac{1}{\frac{f(y)}{y+1}} = \lim\limits_{y \mapsto -1} \frac{1}{\frac{e^{-y}}{\sqrt{y+1}}} = \frac{1}{\frac{e^{-1}}{0^+}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ alors f_1^{-1} **est dérivable en 0 par conséquent f_1^{-1}** est continue en 0.



3.

a) $\forall\, x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ on a : $-1 \le x \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le -x \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \le e^{-x} \le e.$

$\forall\, x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ on a : $0 \le x + 1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x+1} \le \sqrt{1/2}$ or $f(x) = e^{-x}\sqrt{x+1}$

$\begin{cases} 0 \le \sqrt{x+1} \le \sqrt{1/2} \\ \sqrt{e} \le e^{-x} \le e \end{cases} \Leftrightarrow$ en multipliant on aura

$\forall\, x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ on a : $0 \le f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}e$

b) $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e \Leftrightarrow 0 \leq \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e\int_{-1}^{-1/2} dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \leq \left[\frac{\sqrt{2}}{2}ex\right]_{-1}^{-1/2}$

Or $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}ex\right]_{-1}^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e \times \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}e = \frac{\sqrt{2}}{4}e$ donc

$\boldsymbol{0 \leq \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}e}$.

c) $S = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \times 16\, \boldsymbol{cm^2}$

$0 \leq \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \times 16cm^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}e \times 16\, cm^2$

$0 \leq S \leq \frac{\sqrt{2}}{4}e \times 16cm^2 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4e\sqrt{2}\, cm^2$.

encadrement de S à 10^{-2} près : $0 \leq S \leq 15{,}37\, cm^2$

4. $\boldsymbol{(u_n)}$ **/** $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx}$.

a) Démontrer que $\forall\, x \in [n+1; n]$ on a :
$\boldsymbol{f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)}$.

Comme f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors $\forall\, x \in \mathbb{N}$
$n \leq x \leq n+1 \Leftrightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

En déduire que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{f(n+1) \leq u_n \leq f(n)}$

$\forall\, x \in \mathbb{N}\ \int_n^{n+1} \boldsymbol{f(n+1)dx} \leq \int_n^{n+1} \boldsymbol{f(x)dx} \leq \int_n^{n+1} \boldsymbol{f(n)dx} \Leftrightarrow f(n+1) \leq \boldsymbol{u_n} \leq f(n)$

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente. $\begin{cases} f(n+1) \leq \boldsymbol{u_n} \leq f(n) \\ f(n+2) \leq \boldsymbol{u_{n+1}} \leq f(n+1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$f(n+2) - f(n+1) \leq u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

De plus $\forall\, x \in [n+1; n]$ on a : $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)dx \geq 0$, d'où $u_n \geq 0$. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée (par) 0 alors elle converge.

<u>**Problème 155 :**</u> **Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $ay'' + by' + cy = 3e^{-2x}$ où a, b et c sont des nombres réelles tels que :**

- **$a, 4b, -3c - 1$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique ;**
- **$-c, a, b$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique à termes positifs ;**

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{-2x}$ soit solution de (E).

2. Soit (E_0) : $2y'' + y' - 3y = 0$.

a) Montrer que si f est une solution de (E_0) alors $h = |f|$ est aussi solution de (E_0).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0).

c) Déterminer la solution f de cette équation, définie sur IR et qui vérifie les conditions $f(0) = -\frac{2}{3}$ et $f'(0) = 1$.

d) Montrer que $h(x) = \frac{2}{3}e^{-3x/2}$.

3. Soit Ψ la fonction définie par :
$\boldsymbol{\Psi(x) = x - 2 + \frac{2}{3}e^{-3x/2}}$.

a) Etudier les variations de Ψ et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_\Psi$ en $+\infty$. En déduire la position relative entre (d) et $\mathcal{C}_\Psi$.

c) Tracer $\mathcal{C}_\Psi$ et (d).

d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n = \Psi(n)$. Calculer en fonction de n la somme $S_{0,n} = \Psi(0) + \Psi(1) + \cdots + \Psi(n)$ et calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty}[S_{0,n}] =$.

<u>**Correction :**</u>

A. (E) : $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 3e^{-2x}}$ **où a, b et c sont des nombres réelles tels que :**

- $a, 4b, -c - 1$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique $\Leftrightarrow \frac{4b}{a} = \frac{-c-1}{4b} \Leftrightarrow 16b^2 = -3ac - a$
- $-c, a, b$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique à termes positifs $\Leftrightarrow b - a = a + c \Leftrightarrow 2a = b - c$;

1. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = \boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow$
$g'(x) = -2\boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow g''(x) = 4\boldsymbol{e^{-2x}}$.
$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = 3\boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 3$.

$$\begin{cases} 16b^2 = -3ac - a \\ 2a = b - c \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 = -3ac - a \\ 4a - 2b = -2c \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 16b^2 = -3ac - a \\ 4a - 2b = -2c \\ -2c + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 = 9a - a \\ 4a - 2b = 6 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

2. Soit (E_0) : $2y'' + y' - 3y = 0$.

a) $f \in S_{(E_0)} \Leftrightarrow 2f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0 \Leftrightarrow -2f''(x) - f'(x) + 3f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(-f)''(x) + (-f)'(x) - 3(-f)(x) = 0$ d'où $(-f) \in S_{(E_0)}$.
Comme

$$\boldsymbol{h = |f|} = \begin{cases} \boldsymbol{f\ sur\ tout\ intervalle\ où}\ f(x) \geq 0 \\ \boldsymbol{-f\ sur\ tout\ intervalle\ où}\ f(x) \leq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $h = |f|$ est aussi solution de (E_0).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$E_c : 2r^2 + r - 3 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 5$; $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$ les solutions de générale(E) sont de la forme : $y = Ae^{x} + Be^{-3x/2}$

c) $y = Ae^{x} + Be^{-(3/2)x} \Leftrightarrow y' = Ae^{x} - \frac{3}{2}Be^{-(3/2)x}$, la solution particulière de $(\mathbf{E_0})$ vérifiant les conditions $\begin{cases} f(0) = -\frac{2}{3} \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -\frac{2}{3} \\ 2A - 3B = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 3B = -2 \\ 2A - 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{2}{3}, \end{cases}$

donc $f(x) = -\frac{2}{3}e^{-(3/2)x}$.

d) Comme $\boldsymbol{h} = |\boldsymbol{f}| \Leftrightarrow \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \left|-\frac{2}{3}e^{-(3/2)x}\right| = \left|\frac{2}{3}\right| e^{-3x/2} = \frac{2}{3}e^{-3x/2}$.

3. Soit Ψ la fonction définie par :

$\boldsymbol{\Psi(x) = x - 2 + \frac{2}{3}e^{-3x/2}}$.

a) $\forall\, x \in IR$, $\Psi'(x) = 1 - e^{-3x/2}$

$\forall\, x \in]-\infty; 0]$, $\Psi'(x) \leq 0$, $\boldsymbol{\Psi}$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

$\forall\, x \in [0; +\infty[$, $\Psi'(x) \geq 0$, $\boldsymbol{\Psi}$ est croissante sur $[0; +\infty[$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{\Psi(x)} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{3xe^{3x/2}}\right)\right] = +\infty$

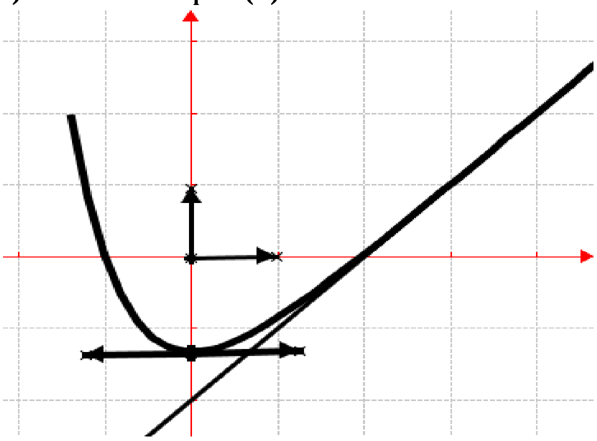
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{\Psi(x)} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[x - 2 + \frac{2}{3}e^{-3x/2}\right] = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\boldsymbol{\Psi'(x)}$		$-$		$+$	
$\boldsymbol{\Psi(x)}$	$+\infty$	$\searrow$	$\boldsymbol{-1,33}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\boldsymbol{\Psi(x) - y}] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{2}{3}\boldsymbol{e^{-3x/2}}\right] = \boldsymbol{e^{-\infty} = 0}$

alors la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_\Psi$ en $+\infty$. Comme $\Psi(x) - y = \frac{2}{3}e^{-3x/2} > 0$ donc la droite (d) est au-dessous de $\mathcal{C}_\Psi$

c) Tracer $\mathcal{C}_\Psi$ et (d).



d) $\Psi(0) = 0 - 2 + \frac{2}{3}e^{0}$

$\Psi(1) = 1 - 2 + \frac{2}{3}\left(e^{-3/2}\right)^{1}$

$\Psi(2) = 2 - 2 + \frac{2}{3}\left(e^{-3/2}\right)^{2}$ …

$\Psi(n) = n - 2 + \frac{2}{3}\left(e^{-3/2}\right)^{n}$.

$S_{0,n} = \Psi(0) + \Psi(1) + \cdots + \Psi(n)$

$S_{0,n} = \frac{n(n+1)}{2} - 2n + \frac{2}{3} \times \frac{1 - e^{-3(n+1)/2}}{1 - e^{-3/2}}$

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[e^{-3(n+1)/2}\right] = \mathbf{0}$

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[S_{0,n}\right] = \lim\limits_{n \mapsto +\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = +\infty$.

<u>Problème 157 :</u>

<u>Partie A</u>

1. Résoudre dans IR l'équation différentielle (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.

2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$. Vérifier que le polynôme h défini sur IR par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E), c'est-à-dire que, pour tout x de R, $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.

3.

a) Montrer que si f est solution de (E), c'est-à-dire, si pour tout x réel, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction g, telle que $g = f - h$, est solution de (E_0).

b) Réciproquement, montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction f, telle que $f = g + h$, est solution de (E).

c) En déduire la forme générale des solutions de (E) sur IR.

8. En déduire une solution ϕ de (E) satisfaisant à $\phi(1) = 1$ et $\phi'(1) = 0$.

<u>Partie B</u> Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative.

1. On considère la fonction définie sur IR, par $f(x) = x^2 - 2(x - 1)e^{x-1}$.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire le sens de variation de f sur IR.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur IR une solution unique. On note α cette solution.

b) Montrer que α appartient à $]1,7; 1,8[$.

3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Γ).

b) Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$.

c) Tracer $\mathcal{C}_f$ et (Γ) d'unité graphique 1×2.

<u>Partie C</u> Calculs d'aires

Soit λ un nombre réel strictement inférieur à 1.

On appelle D_λ le domaine du plan limité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et (Γ) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

On note $A(\lambda)$ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire.

1. Montrer que $A(\lambda) = 2(\lambda - 1)e^{\lambda-1} - 2e^{\lambda-1} + 2$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

2. Calculer l'aire $A(0)$ du domaine D_0.

3. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$.

Correction :

Partie A

1. (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.

$E_c : r^2 - 2r + 1 = 0$, $\Delta = 4 - 4 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 0$; $r_1 = 1$ les solutions de générale(E_0) sont de la forme : $y = (Ax + B)e^x$.

2. (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.

$\forall\, x \in IR$ $h(x) = x^2 \Leftrightarrow h'(x) = 2x \Leftrightarrow h''(x) = 2$

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 2 - 4x + x^2 = x^2 - 4x + 2$ alors h définie sur IR par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E).

3.

a) Si $f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$ or

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$

en soustrayant on aura : $f''(x) - 2f'(x) + f(x) - [h''(x) - 2h'(x) + h(x)] = x^2 - 4x + 2 - (x^2 - 4x + 2)$

$[f''(x) - h''(x)] - 2[f'(x) - h'(x)] + [f(x) - h(x)] = 0 \Leftrightarrow (f-h)''(x) - 2(f-h)'(x) + (f-h)(x) = 0$ or $g \in S_{(E_0)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$ c'est-à-dire $(g = f - h) \in S_{(E_0)} \Leftrightarrow (f-h)''(x) - 2(f-h)'(x) + (f-h)(x) = 0$ d'où $g = f - h$, est solution de (E_0).

b) $f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$ c'est-à-dire $(g + h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow (g+h)''(x) - 2(g+h)'(x) + (g+h)(x) = x^2 - 4x + 2$ en développant on aura : $g''(x) - 2g'(x) + g(x) + h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$ or $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$ donc $g''(x) - 2g'(x) + g(x) + x^2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 2$ c'est-à-dire $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = 0$ d'où g est solution de (E_0).

c) Comme $f = g + h$ est solution de (E) alors $f(x) = g(x) + h(x)$ les solutions de générale (E) sont de la forme : $f(x) = (Ax + B)e^x + x^2$.

4. $\phi(x) = (Ax + B)e^x + x^2 \Leftrightarrow \phi'(x) = (A + Ax + B)e^x + 2x$.

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions

$$\begin{cases}\phi(1) = 1\\ \phi'(1) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A+B)e + 1 = 1\\ (2A+B)e + 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = -2e^{-1}\\ B = 2e^{-1}\end{cases}$$

$\forall\, x \in IR$ $\phi(x) = (2e^{-1} - 2e^{-1}x)e^x + x^2$

$\forall\, x \in IR$ $\phi(x) = 2(1 - x)e^x e^{-1} + x^2$

$\forall\, x \in IR$ $\phi(x) = 2(1 - x)e^{x-1} + x^2$

$$\forall\, x \in IR\ \phi(x) = x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$$

Partie B

1. $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Posons $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x \mapsto \infty\\ t \mapsto \infty\end{cases}$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto -\infty}[(t+1)^2 - 2te^t] = \lim\limits_{t \mapsto -\infty}[t^2] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}[t^2 - 2te^t] = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}\left[t^2\left(1 - 2\frac{e^t}{t}\right)\right] = -\infty$

b) $f'(x) = 2x - 2xe^{x-1} = 2x(1 - e^{x-1})$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ $f'(x) < 0$, alors f strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$.

$\forall\, x \in]0; 1[$ $f'(x) > 0$, alors f strictement croissante sur $]0; 1[$.

c) Dresser le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2e^{-1}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2.

a) On remarque que f strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. De plus $0 \in]-\infty; 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet sur IR une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

b) Montrer que α appartient à$]1,7; 1,8[$.

$f(1{,}7) = 7{,}07.10^{-2}$ et $f(1{,}8) = -0{,}32$

$f(1{,}7).f(1{,}8) < 0$ ou $0 \in]-0{,}32; 7{,}07.10^{-2}[$

donc on a $\mathbf{1{,}7} < \alpha < 1{,}8$

3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Γ).

$f(x) - y = f(x) - x^2 = -2(x-1)e^{x-1}$ son signe dépend de celui de $-2(x-1)$

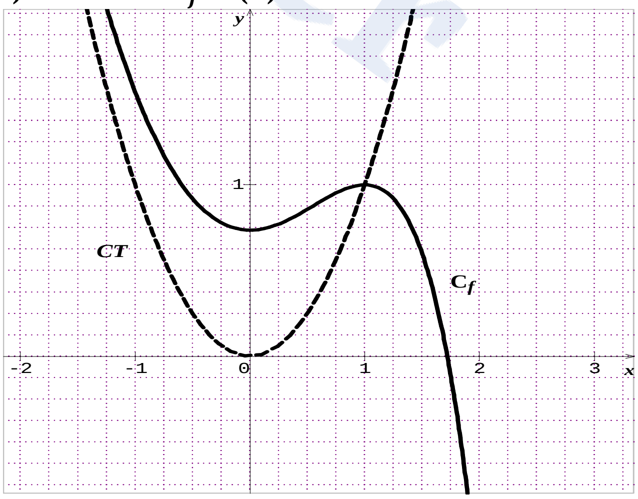
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - x^2$	$+$		$-$

$\forall\, x \in]-\infty; 1[$ $f(x) - x^2 > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la parabole (Γ) sur $]-\infty; 1[$.

$\forall\, x \in]1; +\infty[$ $f(x) - x^2 < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la parabole (Γ) sur $]1; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - x^2] = \lim\limits_{t \mapsto -\infty}[-2te^t] = 0$.

c) Tracer $\mathcal{C}_f$ et (Γ)



Partie C Calculs d'aires

$\forall\, x \in]-\infty; 1[$ $f(x) - x^2 = f(x) - x^2 > 0$.

1. $A(\lambda) = \int_\lambda^1 [f(x) - x^2]dx = \int_\lambda^1 (2 - 2x)e^{x-1}dx$

$A(\lambda) = 2\int_\lambda^1 e^{x-1}dx - 2\int_\lambda^1 xe^{x-1}dx$

Or $\int_{\lambda}^{1} xe^{x-1}dx = [xe^{x-1}]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} e^{x-1}dx$

$A(\lambda) = 2\int_{\lambda}^{1} e^{x-1}dx - 2[xe^{x-1}]_{\lambda}^{1} + 2\int_{\lambda}^{1} e^{x-1}dx =$

$A(\lambda) = 4\int_{\lambda}^{1} e^{x-1}dx - 2[xe^{x-1}]_{\lambda}^{1} = 2[(2-x)e^{x-1}]_{\lambda}^{1}$

$A(\lambda) = 2 - 2(2-\lambda)e^{\lambda-1} = 2 + 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} =$
$2 + 2(\lambda-1-1)e^{\lambda-1} = 2(\lambda-1)e^{\lambda-1} - 2e^{\lambda-1} + 2$

$$A(\lambda) = 2(\lambda-1)e^{\lambda-1} - 2e^{\lambda-1} + 2$$

2. $\mathbf{A(0)} = 2(0-1)e^{0-1} - 2e^{0-1} + 2 = 2 - \frac{4}{e}$.

3. $\lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto -\infty} \left[2 - 2(2-\lambda)e^{\lambda-1}\right] = 2$.

<u>Problème 158 :</u>

1. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 2y' + y = x^2 - 11$.

a) Vérifier que la fonction g définie sur IR par $x^2 + 4x - 5$ est une solution de (E).

b) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 2y' + y = 0$.

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

e) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = -5$ et $h'(0) = 5$.

2. On considère les fonctions numériques u et v définie sur IR par $\begin{cases} v(x) = (x+2)e^x + 2 \\ u(x) = (x+1)e^x + 2x + 4 \end{cases}$.

a) Etudier les variations de v et dresser son tableau de variation. En déduire le signe de $v(x)$.

b) Etudier les variations de u et dresser son tableau de variation.

c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $-2 < \alpha < -1,9$. En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.

3. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = xe^x + x^2 + 4x - 5$.

a) Montrer que $\forall\, x \in]-\infty; +\infty[$, $f'(x) = u(x)$. Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = x^2 + 4x - 5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

c) Tracer $\mathcal{C}_f$.

<u>Correction :</u>

b) (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 11$.

a) $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = \boldsymbol{x^2 + 4x - 5} \Leftrightarrow$
$g'(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow g''(x) = 2$.
$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = \boldsymbol{x^2 - 11} \Leftrightarrow$
$2 + 2 - 4x - 8 + \boldsymbol{x^2 + 4x - 5} = \boldsymbol{x^2 - 11} \Leftrightarrow 0 = 0$,
d'où $\forall\, x \in$ IR $g(x) = \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$ est solution de (E)

b) $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - 2h'(x) + h(x) = \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$ Or cette hypothèse sera vérifier à partir de : $(\boldsymbol{h - g}) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h-g)''(x) - 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$ ce qui donne
$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = g''(x) - 2g'(x) + g(x)$
Or $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$ donc $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation **(E).**

c) $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, a pour racine double 1. Les solutions de l'équation (F) sont de la forme donc $y = (A + xB)e^x$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

d) Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (A + xB)e^x + \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

e) $\forall\, x \in$ IR, $h(x) = (A + xB)e^x + \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$
$\forall\, x \in$ IR, $h'(x) = (A + xB + B)e^x + 2x + 4$
la solution particulière de (E) vérifiant les conditions
$\begin{cases} h(0) = -5 \\ h'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 1 = -5 \\ A + B + 4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$
$\forall\, x \in$ IR, $h(x) = xe^x + \boldsymbol{x^2 + 4x - 5}$

2. $\begin{cases} \boldsymbol{v(x) = (x+2)e^x + 2} \\ \boldsymbol{u(x) = (x+1)e^x + 2x + 4} \end{cases}$.

a) variations de v :
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} v(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(\boldsymbol{x+2})\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{2}] = 2$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} v(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(\boldsymbol{x+2})\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{2}] = +\infty$.
$\forall\, x \in$ IR, $v'(x) = (x+3)e^x$, alors v strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$ et u est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$. $u(-3) = 1,95$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$v'(x)$		$-$		$+$	
$v(x)$	2	$\searrow$	1,95	$\nearrow$	$+\infty$

comme le minimum est positif $u(-3) = 1,95$ **alors** $\forall\, x \in$ IR, $v(x) > 0$.

b) variations de u:
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(\boldsymbol{x+1})\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{2x + 4}] = -\infty$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(\boldsymbol{x+1})\boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{2x + 4}] = +\infty$.
$\forall\, x \in$ IR, $u'(x) = (x+2)e^x + 2 = v(x) > 0$, alors u strictement croissante sur IR.

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) u est continue et strictement croissante sur IR. Elle réalise une bijection de IR sur IR. Or $u(-\infty).u(+\infty) < 0$ et $0 \in]-\infty; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation

$u(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $u(\alpha) = 0$.

Vérifier que $-2 < \alpha < -1{,}9$.

$\begin{cases} u(-2) = -0{,}135 \\ u(-1{,}9) = 6{,}53.10^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u(-2).u(-1{,}9) < 0 \\ donc\ on\ a\ -2 < \alpha < -1{,}9 \end{cases}$.

signe de $u(x)$ suivant les valeurs du réel x

x	$-\infty$ α	$+\infty$
$u(x)$	$-$	$+$

i. $f(x) = xe^x + x^2 + 4x - 5$.

a) $\forall x \in]-\infty;+\infty[$, $f'(x) = (x+1)e^x + 2x + 4 = u(x)$.

tableau de variation de f :

$\forall x \in]-\infty;+\infty[$, $f'(x) = u(x)$ alors f strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}\left[xe^x + x^2 + 4x - 5\right] = +\infty$ et

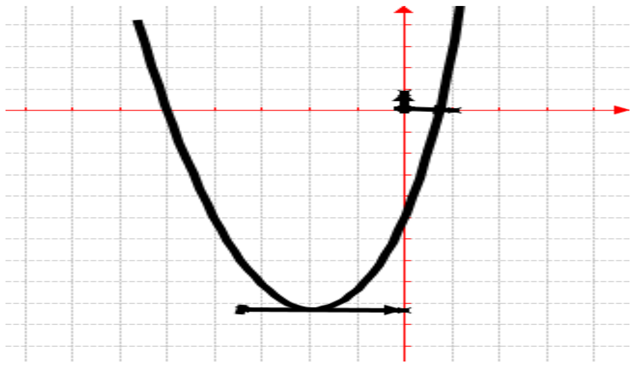
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}\left[xe^x + x^2 + 4x - 5\right] = +\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}[xe^x] = 0$,

alors la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 + 4x - 5$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

c) **Tracer C_f**



Problème 159 : **unité graphique 2 cm**

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - y' - 2y = x - 2$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

2.

a) Démontrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - y' - 2y = 0$.

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

d) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 6$.

B. Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} + x - 2 & si\ x < 0 \\ 1 + \ln(x+1) & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

1. Déterminer les limites de f sur D_f.

2. Etudier le sens de variations de f.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. En déduire que C_f admet deux demi-tangentes T_{0^-} et T_{0^+} au point d'abscisse 0 dont on déterminera les équations réduites.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Déduire l'existence d'une asymptote (d) oblique à C_f ; donner son équation et préciser les positions relatives de C_f et (d). Montrer que C_f admet une branche infinie en $+\infty$. Laquelle ?

6. Tracer C_f ; (d) ; T_{0^-} et T_{0^+}.

7. On considère la restriction de f sur $]-\infty;0[$. Soit λ est un nombre inférieur à 0.

a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région du plan limitée par la courbe C_f, la droite (d) et les droites $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ en $+\infty$.

8. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de réel m, le nombre de points d'intersections de C_f avec la droite (D_m) d'équation $y = m$.

Correction :

A. (E) : $y'' - y' - 2y = x - 2$.

(F) : $y'' + y' - 2y = 0$.

1. Déterminons le réel a pour que g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) :

$\forall x \in$ IR, $g(x) = ax + b \Leftrightarrow g'(x) = a \Leftrightarrow g''(x) = 0$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + g'(x) - 2g(x) = 0 + a - ax - b = x - 1 \Leftrightarrow -ax + a - b = x - 2 \Leftrightarrow a = -1$ ou $b = 1$, d'où $\forall x \in g(x) = -x + 1$.

2.

a) $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) - h'(x) - 2h(x) = x - 2$

Or cette hypothèse sera vérifier à partir de :

$(h-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h-g)''(x) + (h-g)'(x) - 2(h-g)(x) = 0$ ce qui donne

$h''(x) - h'(x) - 2h(x) = g''(x) - g'(x) - 2g(x)$

Or $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) - g'(\quad) - 2g(x) = x - 2$ donc $h''(x) - h'(x) - 2h(x) = x - 2$ ce qui prouve que h est une solution de l'équation (**E**).

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, $\Delta = 9$, a pour racines -1 et 2. Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

c) l'ensemble des solutions de (E) : Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-x} + x - 2$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

d) $\forall x \in \mathrm{IR}$, $h(x) = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{-x} + x - 2$

$\forall x \in \mathrm{IR}$, $h'(x) = 2\mathrm{A}e^{2x} - \mathrm{B}e^{-x} + 1$

la solution particulière de (E) vérifiant les conditions $\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 3 \\ 2\mathrm{A} - \mathrm{B} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 3 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases}$ est : $\forall x \in \mathrm{IR}$, $h(x) = 3e^{2x} + x - 2$.

B. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} + x - 2 & si\ \ x < 0 \\ 1 + \ln(x+1) & si\ x \geq 0 \end{cases}}$.

1. $\mathrm{D}_f = \mathrm{IR}$. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [3e^{2x} + x - 2] = -\infty$

et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [1 + \ln(x+1)] = +\infty$.

2. $\forall x < 0$, $f'(x) = 6e^{2x} + 1 > 0$ et $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$ alors f strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

3. continuité en 0 :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} [3e^{2x} + x - 2] = 1$;

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} [1 + \ln(x+1)] = 1$ et $f(0) = 1$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité de f en 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3e^{2x} + x - 3}{x} = 6\frac{e^{2x} - 1}{2x} + 1$, on en déduit que

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[6\frac{e^{2x} - 1}{2x} + 1\right] = 7$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_d(0) = 1$, donc f n'est pas dérivable en 0. Par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 dont les équations réduites sont :

$\mathrm{T}_{0^-} : y = 7x + 1$ et $\mathrm{T}_{0^+} : y = x + 1$

4. Dressons le tableau de variation de f.

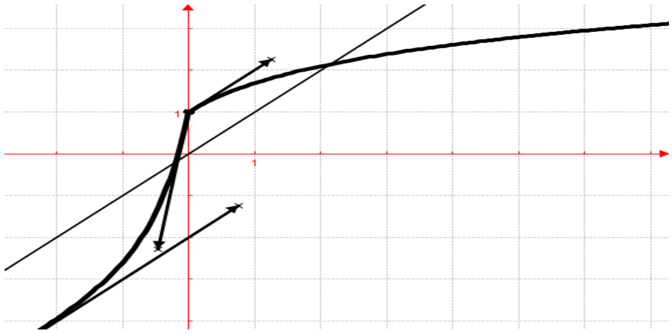
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. On remarque $f(x) - (x - 2) = 3e^{2x}$ et son limite est $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [3e^{2x}] = 0$ alors la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

Comme $\forall x \in \mathrm{IR}$ $f(x) - (x - 2) = 3e^{2x} > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (d) sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 0$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

6. $\mathcal{C}_f$ en trait plein ; (d) ; T_{0^-} et T_{0^+} :



7. $\lambda < 0$ et $f(x) - (x - 2) = 3e^{2x} > 0$

a) $\mathrm{U} = \int_\lambda^0 [f(x) - (x - 2)]dx = \int_\lambda^0 [3e^{2x}]dx = \left[\frac{3}{2}e^{2x}\right]_\lambda^0 = \frac{3}{2}[e^{2x}]_\lambda^0 = \frac{3}{2}(1 - e^{2\lambda})$.

$\mathcal{A}(\lambda) = 4\mathrm{U}\boldsymbol{cm^2} = 6(1 - e^{2\lambda})\boldsymbol{cm^2}$

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} [6 - 6e^{2\lambda}] = 6\ \boldsymbol{cm^2}$ car $\lambda < 0$

8. $\begin{cases} (\mathrm{D}_m) \,//\, (Ox) \\ (\mathrm{D}_m) \cap \mathcal{C}_f \end{cases}$.

$m \in \mathrm{IR}$, il y a un seul point d'intersection.

<u>Problème 160 :</u>

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y' + y = x - 1$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t - 1)dt$.

2.

a) Soit u une fonction dérivable sur IR, on pose $g(x) = u(x)e^{-x}$. Montrer que la fonction g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x de IR, $u'(x) = (x - 1)e^x$.

b) A l'aide de la question n°2 a), déterminer toutes les fonctions u vérifiant, pour tout x de IR, $u'(x) = (x - 1)e^x$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière de (E) pour laquelle l'image de 1est 0.

B. Soit f la fonction définie par :

$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} (x - 2) + e^{-x+1} & si\ \ x \leq 1 \\ 1 - e^{-x+1} & si\ x > 1 \end{cases}}$.

1. Déterminer les limites de $f$sur D_f.

2. Etudier le sens de variations de f.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 1 dont on déterminera les équations réduites.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

6. Tracer $\mathcal{C}_f$ et les demi-tangentes T_{1^-} et T_{1^+}.

7. On considère la restriction de f sur $]1;+\infty[$. Soit α est un nombre supérieur à 3.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x=2$ et $x=\alpha$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

8. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de réel m, le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ avec la droite (D_m) d'équation $y=m$.

Correction ::

A. (E) : $y'+y=x-1$.

1. $\int_1^x e^t(t-1)dt=[e^t(t-1)]_1^x-\int_1^x e^t dt=[e^t(t-2)]_1^x=e^x(x-2)+e$.

2.

a) $u'(x)=(x-1)e^x \Leftrightarrow u(x)=\int_1^x e^t(t-1)dt$
$u(x)=e^x(x-2)+e$ donc $g(x)=u(x)e^{-x}=$
$g(x)=x-2+e^{1-x} \Leftrightarrow g'(x)=1-e^{1-x}$ vérifions cette hypothèse : g est solution de (E) ssi
$g'(x)+g(x)=1+e^{1-x}+x-2-e^{1-x}=x-1$
ainsi la fonction g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x de IR, $u'(x)=(x-1)e^x$.

b) On sait $g'(x)+g(x)=x-1$
$g(x)=u(x)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x)=u'(x)e^{-x}-u(x)e^{-x}$
$g'(x)+g(x)=u'(x)e^{-x}-u(x)e^{-x}+u(x)e^{-x}=u'(x)e^{-x}=x-1 \Leftrightarrow u'(x)=(x-1)e^x$.

3. l'ensemble des solutions de (E).

Comme g est solution de (E) avec $g(x)=u(x)e^{-x}=e^{-x}[e^x(x-2)+k_1]=(x-2)+k_1e^{-x}$ où k_1 est une constante réelle quelconque ($k_1=k+e$). Donc les solutions de (E) dont les fonctions $x\mapsto(x-2)+k_1e^{-x}$.

4. la solution particulière de (E) pour laquelle l'image de 1est 0 : $g(1)=0$
$g(1)=(1-2)+k_1e^{-1}=0 \Leftrightarrow k_1=e$. Donc la solution particulière de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0 est $x\mapsto(x-2)+e^{-x+1}$.

B. $f(x)=\begin{cases}(x-2)+e^{-x+1} & si\ x\le 1\\ 1-e^{-x+1} & si\ x>1\end{cases}$.

1. $D_f=$ IR. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[e^{-x+1}]=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[1-e^{-x+1}]=1$.

2. $\forall\, x\le 1$, $f'(x)=1-e^{-x+1}<0$ donc f strictement décroissante sur $]-\infty;1]$
$\forall\, x>0$, $f'(x)=+e^{-x+1}>0$ donc f strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

3. **continuité en 1 :**
$\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto1^-}[(x-2)+e^{-x+1}]=0$;
$\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto1^+}[1-e^{-x+1}]=0$ et $f(1)=0$, alors f est continue en 1.

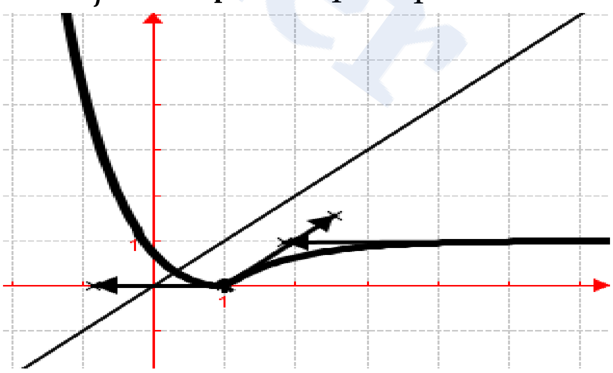
Dérivabilité de f en 1 : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}=\frac{e^{-x+1}-1}{-x+1}$, on en déduit que
$\lim\limits_{x\mapsto1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\mapsto1^-}\left[\frac{e^{-x+1}-1}{-x+1}\right]=1$ et
$\lim\limits_{x\mapsto1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'_d(1)=0$, donc f n'est pas dérivable en 1. Par conséquent $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 dont les équations réduites sont :
T_{1^-} : $y=0$ et T_{1^+} : $y=x-1$.

4. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

5. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[1-\frac{2}{x}+\frac{e^{-x+1}}{x}\right]=+\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

6. **$\mathcal{C}_f$ en trait plein et T_{1^-} et T_{1^+} :**



7. $\alpha>3$.

a) $\mathcal{A}(\alpha)=\int_2^\alpha f(x)dx=\int_2^\alpha[1-e^{-x+1}]dx=[x+e^{-x+1}]_2^\alpha=\alpha+e^{-+1}-2-e$.

b) $\lim\limits_{\alpha\mapsto+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[\alpha+e^{-\alpha+1}-2-e]=+\infty$

8. $\begin{cases}(D_m)\ //\ (Ox)\\ (D_m)\cap\mathcal{C}_f\end{cases}$.

$m = 0$, il y a un seul point d'intersection.
$m \in]0; +\infty[$, il y a deux points d'intersection.

Problème 161 :

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $2y' + y = x^2 + 2x - 2$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

2.

a) Démontrer qu'une fonction h une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $2y' + y = 0$.

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

d) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $z(0) = 0$.

B. Soit f et u les fonctions définies par :

$f(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$ et

$u(x) = e^{-\frac{x}{2}} + 2x - 2$.

1.

a) Etudier les variations de u sur IR.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur l'intervalle $[-5; -4,8]$ et une autre β sur l'intervalle $[0,5; 0,7]$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.

2. Déterminer les limites de f sur D_f.

3. Etudier le sens de variations de f.

4. Montrer que $f(\alpha) = (\alpha + 1 - \sqrt{3})(\alpha + 1 +$ 3 et fβ=β+1−3β+1+3.

Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer $\mathcal{C}_f$(étudier les branches infinies).

Correction :

A. (E) : $2y' + y = x^2 + 2x - 2$.

(F) : $2y' + y = 0$.

1. Déterminons les réels a, b et c pour que g définie sur IR par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) : $\forall\, x \in \text{IR}, g(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow g'(x) = 2ax + b$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow 2g' + g = 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow a = 1, b = -2$ et $c = 2$ d'où $\forall\, x \in \text{IR}, g(x) = x^2 - 2x + 2$.

2.

a) Démontrons que h 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $h - g$ est solution de (F) :

$h \in S_{(E)} \Leftrightarrow 2h' + h = x^2 + 2x - 2$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow 2g' + g = x^2 + 2x - 2$. En soustrayant membre à membre, on a $2(h-g)' + (h-g) = 0$, or $(h-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow 2(h-g)' + (h-g) = 0$, alors $h \in S_{(E)}$.

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = Ae^{-\frac{x}{2}}$, où A est constante réelle quelconque.

c) l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $z(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$, où A est constante réelle quelconque.

d) $\forall\, x \in \text{IR}, z(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$

$z(0) = Ae^{-\frac{0}{2}} + 0^2 - 2 \times 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow A = -2$.

$\forall\, x \in \text{IR}, z(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$.

B. $f(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2$ et

$u(x) = e^{-\frac{x}{2}} + 2x - 2$.

1.

a) les variations de u sur IR :

$\forall\, x \in \text{IR}, u'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + 2$; alors u est strictement décroissante sur $]-\infty; -4\ln 2]$ et u est strictement croissante sur $[-4\ln 2 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[e^{-\frac{x}{2}} + 2x - 2\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[e^{-\frac{x}{2}} + 2x - 2\right] = +\infty$.

x	$-\infty$		$-4\ln 2$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3,54	$\nearrow$	$+\infty$

b) $u(-5) = 0{,}1824$; $u(-4{,}8) = -0{,}576$

$u(0{,}5) = -0{,}2214$; $u(0{,}7) = 0{,}1046$.

u est continue et strictement décroissante sur $[-5; -4{,}8]$ et u est continue et strictement croissante sur $[0{,}5; 0{,}7]$.

Sur $[-5; -4{,}8]$, u est bijective et $u(-5) \times u(-4{,}8) < 0$.

Sur $[0{,}5; 0{,}7]$, u est bijective et $u(0{,}5) \times u(0{,}7) < 0$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur l'intervalle $[-5; -4{,}8]$ et une autre β sur l'intervalle $[0{,}5; 0{,}7]$.

c) le signe de $u(x)$ sur IR.

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha] \cup [\beta; +\infty[$, $u(x) \geq 0$.

$\forall\, x \in [\alpha; \beta]$, $u(x) \leq 0$.

d) limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[-2e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 2x + 2\right] = +\infty$

e) **sens de variations de f :**

$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + 2 = (x)$; alors f est décroissante sur $[\alpha; \beta]$ et f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et sur $[\beta; +\infty[$.

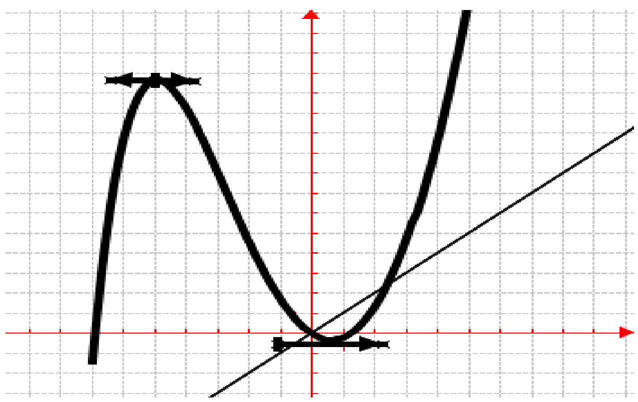
f) On sait que $u(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{2}} + 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\alpha}{2}} = 2 - 2\alpha$ ou $u(\beta) = e^{-\frac{\beta}{2}} + 2\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{\beta}{2}} = 2 - 2\beta$ en remplaçant, on aura : $f(\alpha) = -2e^{-\frac{\alpha}{2}} + \alpha^2 - 2\alpha + 2 = -4 + 4\alpha + \alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 + 2\alpha - 2 = (\alpha + 1 - \sqrt{3})(\alpha + 1 + \sqrt{3})$ et $f(\beta) = -2e^{-\frac{\beta}{2}} + \beta^2 - 2\beta + 2 = -4 + 4\beta + \beta^2 - 2\beta + 2 = \beta^2 + 2\beta - 2 = (\beta + 1 - \sqrt{3})(\beta + 1 +$ 3.

tableau de variation de f :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$f(\alpha)$ $\searrow$	$f(\beta)$ $\nearrow$	$+\infty$

g) $\mathcal{C}_f$ **en trait plein**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \infty} \left[-2\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} + x - 2 + \frac{2}{x}\right] = \infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) à l'infinie.



Problème 162 :

A. Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $4f'' + 4f' + f = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans IR.

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, tracée dans un repère orthonormal (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), passe par le point A(0 ;4) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.

B. Soit f la fonction définie par :

$f(x) = (x + 4)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1.

a) Déterminer les limites de f.

b) Etudier le sens de variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$; donner son équation. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $-\infty$. Laquelle ?

3. Donner une équation de la tangente T au point d'abscisse nulle.

4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.

5. $n \in$ IR, on appelle D_n la droite passant par le point A et de coefficient directeur n.

a) Déterminer une équation de la droite D_n.

b) Préciser, lorsque $n = 1$, les points d'intersection de D_n et $\mathcal{C}_f$.

6. On désigne par F la fonction définie par :

$F(x) = (ax + b)e^{-\frac{1}{2}x}$.

a) Déterminer les constantes a et b pour que F soit une primitive.

b) α est un nombre supérieur à -4. En déduire l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = -4$, $x = \alpha$.

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

C.

1. Utiliser la courbe $\mathcal{C}_f$ pour représenter graphiquement, dans le même repère, la fonction définie par $h(x) = |x + 4|e^{-\frac{1}{2}x}$.

2. Résoudre graphiquement l'équation $|x +$ *4e−12x=m* où *m*∈IR.

Correction :

A. (E) : $4f'' + 4f' + f = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans IR.

L'équation caractéristique $4r^2 + 4r + 1 = 0$, $\Delta = 0$ a pour racine $-\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc $y = (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. **solution particulière g :** Au point A(0 ;4) on a : $g(0) = (A \times 0 + B)e^{-\frac{1}{2}0} = 4 \Leftrightarrow B = 4$.

$g(x) = (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow g'(x) = \left(-\frac{1}{2}Ax - \frac{1}{2}B + A\right)e^{-\frac{1}{2}x}$. **Tangente au point A :** on a : $g'(0) =$

$\left(-\frac{1}{2}A\times 0-\frac{1}{2}B+A\right)e^{-\frac{1}{2}0}=-1 \Leftrightarrow A=1$. On a la solution particulière : $g(x)=(x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$.

B. $\boldsymbol{f(x)=(x+4)e^{-\frac{1}{2}x}}=xe^{-\frac{1}{2}x}+4e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. .

a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[(x+4)e^{-\frac{1}{2}x}\right]=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{4}{e^{\frac{1}{2}x}}\right]=0$.

b) $\forall\, x\in\,]-\infty;+\infty[,\ f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x-1\right)\ {}^{-\frac{1}{2}x}$; alors f est strictement croissante sur $]-\infty;-2]$ et f est strictement décroissante sur $[-2;+\infty[$.

c) **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	5,43	↘ 0

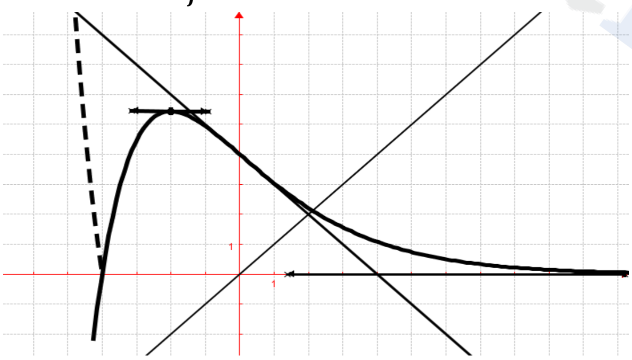
2. Asymptote horizontale d'équation $y=0$.

$\frac{f(x)}{x}=\left(1+\frac{4}{x}\right)e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{4}{xe^{\frac{1}{2}x}}$, on calcule

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}}+\frac{4}{xe^{\frac{1}{2}x}}\right]=-\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

3. T : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x+4$.

4. **Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.**



5. $n\in$ IR, on appelle D_n la droite passant par le point A et de coefficient directeur n.

a) $\boldsymbol{D_n}$ **:** $y_n=n(x-0)+f(0)=nx+4$

b) $f(x)=y_1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

6. $\mathrm{F}(x)=(ax+b)e^{-\frac{1}{2}x}$.

a) $\mathrm{F}'(x)=\left(-\frac{1}{2}ax+a-\frac{1}{2}b\right)e^{-\frac{1}{2}x}=f(x)=(x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$, par identification on a : $-\frac{1}{2}a=1 \Leftrightarrow a=-2$ et $a-\frac{1}{2}b=4 \Leftrightarrow b=-12$.

b) $\alpha>-4$. $\mathrm{F}(x)=(-2x-12)e^{-\frac{1}{2}x}$. En $\mathcal{A}(\alpha)=\int_{-4}^{\alpha}f(x)dx=[\mathrm{F}(x)]_{-4}^{\alpha}=(-2\alpha-12)e^{-\frac{1}{2}\alpha}+4e^2$.

c) $\lim\limits_{\alpha\mapsto+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\mapsto+\infty}\left[\frac{-2\alpha}{e^{\frac{1}{2}\alpha}}-\frac{12}{e^{\frac{1}{2}\alpha}}+4e^2\right]=+4e^2$.

C.

1. $\boldsymbol{h(x)=|x+4|e^{-\frac{1}{2}x}}=$

$\begin{cases}]-\infty;-4], & h(x)=-(x+4)e^{-\frac{1}{2}x} \\ [-4;+\infty[, & h(x)=(x+4)e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$

$\mathcal{C}_h=\mathcal{C}_{h-}\cup\mathcal{C}_{h+}$ or $\mathcal{C}_f=\mathcal{C}_{h+}$ donc $\mathcal{C}_h=\mathcal{C}_{h-}\cup\mathcal{C}_f$ avec $\mathcal{C}_h$ définie su IR ; $\mathcal{C}_{h-}$ définie sur $]-\infty;-4]$ et $\mathcal{C}_f$ définie sur $[-4;+\infty[$.

$\mathcal{C}_{h-}$ s'obtient par la symétrie des abscisses par rapport à la restriction de f sur $]-\infty;-4]$.

2. **Résoudre graphiquement $\boldsymbol{|x+4|e^{-\frac{1}{2}x}=m}$ où $\boldsymbol{m}\in$ IR.**

- Si $m<0$, aucune solution.
- Si $m\in\,]0;h(-2)[$, trois solutions.
- Si $m>h(-2)$, unique solution.
- Si $m=0$, unique solution : -4.
- Si $m=h(-2)$, deux solutions.

<u>Problème 163 :</u>

A. **On donne l'équation différentielle (E) : $\boldsymbol{f''+2f'+f=0}$. on pose : pour tout nombre $\boldsymbol{x}$ réel : $\boldsymbol{g(x)=e^{x}\mathrm{k}(x)}$.**

1. **Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si, pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{g''(x)=0}$.**

2. **Résoudre l'équation différentielle : $\boldsymbol{g''=0}$.**

3. **En déduire les solutions (E).**

4. **Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, tracée dans un repère orthonormal (O; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), passe par le point A(0 ;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.**

B. **Soit $\boldsymbol{h}$ la fonction définie par :**

$$\boldsymbol{h(x)=\begin{cases}(x+2)e^{-x} & si\ \ x<0 \\ \frac{2}{x+1}-\ln(x+1) & si\ \ x\geq 0\end{cases}}.$$

1. **Etudier la continuité et la dérivabilité de $\boldsymbol{h}$ en 0. En déduire que $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 dont on déterminera les équations réduites.**

2. **Déterminer les limites de $\boldsymbol{h}$.**

3. **Etudier le sens de variations de $\boldsymbol{h}$.**

4. **Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{h}$.**

5. **Déduire l'existence des branches infinies à $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.**

6. **Tracer $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ et les deux demi-tangentes.**

C.

1. **Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1; 1,5]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.**
2. **Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie comprise entre la courbe $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \alpha$ avec $\alpha \in [1; 1,5]$. Calculer $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha)$.**

__Correction :__

A. (E) : $f'' + 2f' + f = 0$ / $g(x) = e^x k(x)$.

1. **Démontrons que k est solution de (E) ssi, pour tout nombre réel x, $g''(x) = 0$:** $\forall x \in$ IR,
$g(x) = e^x k(x) \Leftrightarrow g'(x) = e^x[k'(x) + k(x)]$
$g'(x) = e^x[k'(x) + k(x)] \Leftrightarrow g''(x) = e^x[k''(x) + 2k'x + kx$ or $g''x = 0$ alors $k''x + 2k'x + kx = 0$ et k est solution de (E), alors $k'' + 2k' + k = 0 \Leftrightarrow k''(x) + 2k'(x) + k(x) = 0$
alors k est solution de (E).
2. **Résoudre $g'' = 0$.**
L'équation caractéristique $r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0$. Les solutions de l'équation $g'' = 0$ sont donc $g(x) = (Ax + B)$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.
3. $g(x) = e^x k(x) \Leftrightarrow k(x) = g(x)e^{-x}$. Comme $k \in S_E$ et $g(x) = (Ax + B)$ alors les solutions de (E) sont de la forme $k(x) = (Ax + B)e^{-x}$ ou $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.
4. **solution particulière f :** Au point A(0 ;2) on a : $f(0) = (A \times 0 + B)e^{-0} = 2 \Leftrightarrow B = 2$.
$f(x) = (Ax + B)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x) = (-Ax - B + A)e^{-x}$. Tangente au point A : on a : $f'(0) = (-A \times 0 - B + A)e^{-0} = -1 \Leftrightarrow A = 1$. On a la solution particulière : $f(x) = (x + 2)e^x$.

B. $h(x) = \begin{cases} (x+2)e^{-x} & si\ x < 0 \\ \frac{2}{x+1} - \ln(x+1) & si\ x \geq 0 \end{cases}$

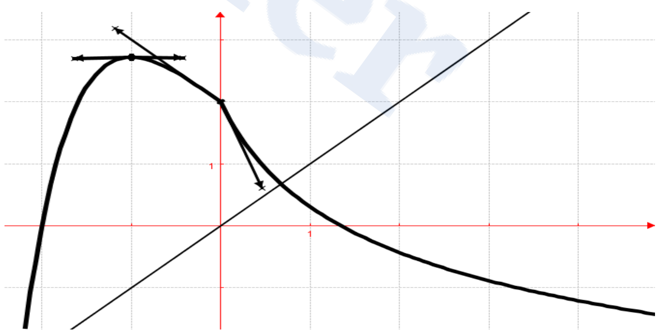
1. **la continuité et la dérivabilité de h en 0 :**
$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} [(x+2)e^{-x}] = 2$ et
$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{2}{x+1} - \ln(x+1)\right] = 2$ alors h est continue en 0.
$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{[(x+2)e^{-x}-2]e^x}{xe^x} = \frac{1}{e^x} - 2 \times \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{e^x}$.
$\forall x \geq 0$, $h'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x-3}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \left[\frac{1}{e^x} - 2 \times \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{e^x}\right] = -1$ et
$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = hd'(0) = \frac{-0-3}{(0+1)^2} = -3$, comme $hg'(0) \neq hd'(0)$ alors h n'est pas dérivable en 0. par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point 2 deux demi-tangentes : T_{0^-}: $y = -x + 2$ et T_{0^+}: $y = -3x + 2$. Ce point est anguleux.

2. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [(x+2)e^{-x}] = -\infty$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{2}{x+1} - \ln(x+1)\right] = -\infty$.
3. $\forall x < 0$, $h'(x) = (x+2)e^{-x} < 0$, alors h est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$et h est strictement décroissante sur $[-1; 0[$.
$\forall x \geq 0$, $h'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x-3}{(x+1)^2} < 0$, alors h est décroissante sur $[0; +\infty[$.
4. **Dressons le tableau de variation de h :**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$	||	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2{,}71$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5. $\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{e^x} + \frac{2}{xe^x}$, on a
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{1}{e^x} + \frac{2}{xe^x}\right] = -\infty$, donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (OY) en $-\infty$
$\frac{h(x)}{x} = \frac{2}{x^2+x} - \frac{\ln(x+1)}{x}$, on a
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{2}{x^2+x} - \frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 0$, donc $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (OX) en $+\infty$.
6. **Tracer $\mathcal{C}_h$ et les deux demi-tangentes.**



C.

1. h est continue et décroissante sur $[1; 1,5]$. Elle réalise donc une bijection de $[1; 1,5]$ vers $[h(1,5); h(1)] = [-0,11; 0,3]$. Or $h(1) \times h(1,5) < 0$. Donc sur $[1; 1,5]$, il a un unique antécédent. Ainsi l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; 1,5]$ et $\alpha = 1,34$.

2. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{-2}^{\alpha} h(x)dx = \int_{-2}^{0} h(x)dx + \int_{0}^{\alpha} h(x)dx = \int_{-2}^{0}[(x+2)e^{-x}]dx + \int_{0}^{\alpha}\left[\frac{2}{x+1} - \right.$ ln$x$+1dx=−x+3e−x−20+2ln$x$+1−x−1ln$x$+1+x0α =−3+e2+−α+3lnα+1+α.

Calculons $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \mathcal{A}(\alpha) = -3 + e^2$.

Problème 164 :

A. Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $f'' + 2f' + f = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans IR.

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, tracée dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, passe par le point A(0 ;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.

B. Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

1.

a) Déterminer les limites de f.

b) Etudier le sens de variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2. Déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$; donner son équation. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $-\infty$. Laquelle ?

3. Donner une équation de la tangente T au point d'abscisse nulle.

4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.

5. $n \in$ IR, on appelle D_n la droite passant par le point A et de coefficient directeur n.

a) Déterminer une équation de la droite D_n.

b) Préciser, lorsque $n = 1$, les points d'intersection de D_n et $\mathcal{C}_f$.

6. On désigne par F la fonction définie par : $F(x) = (ax+b)e^{-x}$.

a) Déterminer les constantes a et b pour que F soit une primitive.

b) α est un nombre supérieur à -2. En déduire l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = -2$, $x = \alpha$.

c) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

C.

1. Utiliser la courbe $\mathcal{C}_f$ pour représenter graphiquement, dans le même repère, la fonction définie par $h(x) = |x+2|e^{-x}$.

2. Résoudre graphiquement l'équation $|x+2|e^{-x} = m$ où $m \in$ IR.

Correction :

A. (E) : $f'' + 2f' + f = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 0$ a pour racine -1. Les solutions de l'équation (E) sont donc $y = (Ax+B)e^{-x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

2. **solution particulière g :** Au point A(0 ;2) on a : $g(0) = (A \times 0 + B)e^{-0} = 2 \Leftrightarrow B = 2$.
$g(x) = (Ax+B)e^{-x} \Leftrightarrow g'(x) = (-Ax - B + A)e^{-x}$. Tangente au point A : on a : $g'(0) = (-A \times 0 - B + A)e^{-0} = -1 \Leftrightarrow A = 1$. On a la solution particulière : $g(x) = (x+2)e^{x}$.

B. $f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x}$.

1.

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(x+2)e^{-x}] = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right] = 0$.

b) $\forall\, x \in]-\infty; +\infty[$, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$; alors f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$.

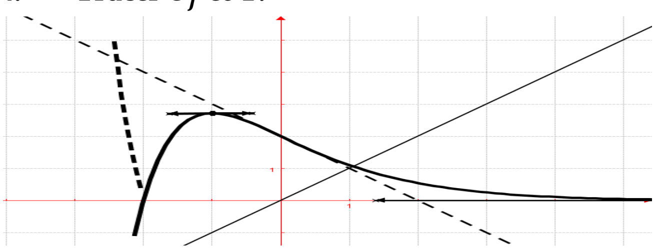
c) **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2,71	$\searrow$	0

2. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
$\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x} = \frac{1}{e^x} + \frac{2}{xe^x}$, on calcule $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{1}{e^x} + \frac{2}{xe^x}\right] = -\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $-\infty$.

3. T : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 2$.

4. **Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.**



5. $n \in$ IR, on appelle D_n la droite passant par le point A et de coefficient directeur n.

a) D_n : $y_n = n(x-0) + f(0) = nx + 2$.

b) $f(x) = y_1 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

6. $F(x) = (ax+b)e^{-x}$.

a) $F'(x) = (-ax + a - b)e^{-x} = f(x) = (x+2)e^{-x}$, par identification on a : $-a = 1 \Leftrightarrow a = -1$ et $a - b = 2 \Leftrightarrow b = -3$.

b) $\alpha > -2$. $F(x) = (-x-3)e^{-x}$. En $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{-2}^{\alpha} f(x)dx = [F(x)]_{-2}^{\alpha} = (-\alpha - 3)e^{-\alpha} + 2e^2$.

c) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \left[\frac{-\alpha}{e^{\alpha}} - \frac{3}{e^{\alpha}} + 2e^2\right] = 2e^2$.

C.

1. $\boldsymbol{h(x) = |x+2|e^{-x}} =$

$$\begin{cases}]-\infty;-2], & h(x) = -(x+2)e^{-\frac{1}{2}x} \\ [-2;+\infty[, & h(x) = (x+2)e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{h-} \cup \mathcal{C}_{h+}$ or $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{h+}$ donc $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_{h-} \cup \mathcal{C}_f$ avec $\mathcal{C}_h$ définie su IR ; $\mathcal{C}_{h-}$ définie sur $]-\infty;-2]$ et $\mathcal{C}_f$ définie sur $[-2;+\infty[$.

$\mathcal{C}_{h-}$ s'obtient par la symétrie des abscisses par rapport à la restriction de f sur $]-\infty;-2]$.

2. **Résoudre graphiquement $|x+2|e^{-x} = m$ où $m \in$ IR.**

- Si $m < 0$, aucune solution.
- Si $m \in]0; h(-1)[$, trois solutions.
- Si $m > h(-1)$, unique solution.
- Si $m = 0$, unique solution : -2.
- Si $m = h(-1)$, deux solutions.

<u>Problème 165 :</u>

A. Déterminer la solution de f de l'équation différentielle $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$ sachant que sa représentation graphique passe par le point A de $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 4$ et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

B. **Soit f la fonction définie par :**

$\boldsymbol{f(x) = (-x+4)e^{\frac{1}{2}x}}$.

1. **Déterminer les limites de f.**
2. **Etudier le sens de variations de f.**
3. **Dresser le tableau de variation de f.**
4. **Déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$; donner son équation. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $+\infty$.**
5. **Donner une équation de la tangente T au point d'abscisse -2.**
6. **Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.**
7. **$n \in$ IR, on appelle D_n la droite passant par le point A et de coefficient directeur n.**

a) **Déterminer une équation de la droite D_n.**

b) **Préciser, lorsque $n = -1$, les points d'intersection de D_n et $\mathcal{C}_f$.**

8. **On désigne par F la fonction définie par :**

$\boldsymbol{F(x) = (ax+b)e^{\frac{1}{2}x}}$.

a) **Déterminer les constantes a et b pour que F soit une primitive.**

b) **α est un nombre supérieur à -4. En déduire l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = -4$, $x = \alpha$.**

c) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.**

<u>Correction :</u>

A. **$(E) : f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$.**

Résoudre l'équation (E) dans IR.

L'équation caractéristique $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, $\Delta = 0$ a pour racine $\frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation (E) sont donc $f(x) = (Ax+B)e^{\frac{1}{2}x}$, où A et B sont des constantes réelles quelconques.

solution particulière g : Au point A(0 ;4) on a :

$g(0) = (A \times 0 + B)e^{\frac{1}{2}0} = 4 \Leftrightarrow B = 4$.

$g(x) = (Ax+B)e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow g'(x) = \left(\frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}B + A\right)e^{\frac{1}{2}x}$. **Tangente d'abscisse 2 parallèle à (Ox) :** on a : $g'(2) = \left(\frac{1}{2}A \times 2 + \frac{1}{2}B + A\right)e^{\frac{2}{2}} = 0 \Leftrightarrow A = -1$.

On a la solution particulière : $g(x) = (-x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

B. **$f(x) = (-x+4)e^{\frac{1}{2}x} = -xe^{\frac{1}{2}x} + 4e^{\frac{1}{2}x}$.**

1. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-xe^{\frac{1}{2}x} + 4e^{\frac{1}{2}x}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[(-x+4)e^{\frac{1}{2}x}\right] = -\infty$.

2. $\forall x \in]-\infty;+\infty[$, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{1}{2}x}$; alors f est strictement croissante sur $]-\infty;2]$ et f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

3. **Dressons le tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	0	↗	5,43	↘	$-\infty$

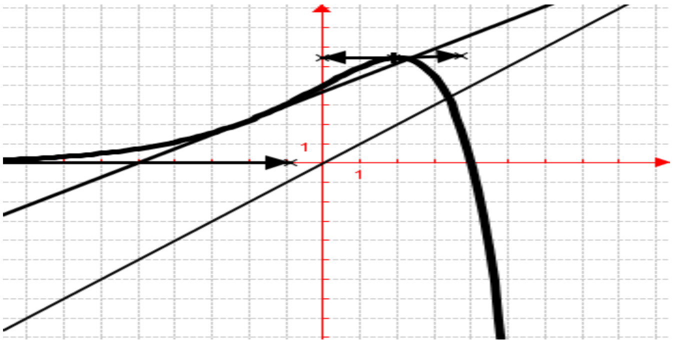
4. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$\frac{f(x)}{x} = \left(-1 + \frac{4}{x}\right)e^{\frac{1}{2}x}$, on calcule

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\left(-1 + \frac{4}{x}\right)e^{\frac{1}{2}x}\right] = -\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

5. T : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = 2e^{-1}x + 10e^{-1}$.

6. **Tracer $\mathcal{C}_f$ et T.**



7. $n \in$ IR, **on appelle D_n la droite passant par le point A et de coefficient directeur n.**

a) D_n : $y_n = n(x-0) + f(0) = nx + 4$

b) $f(x) = y_{-1} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

8. $F(x) = (ax+b)e^{\frac{1}{2}x}$.

a) $F'(x) = \left(\frac{1}{2}ax + a + \frac{1}{2}b\right)e^{\frac{1}{2}x} = f(x) = (-x+4)e^{\frac{1}{2}x}$, par identification on a : $\frac{1}{2}a = -1 \Leftrightarrow a = -2$ et $a + \frac{1}{2}b = 4 \Leftrightarrow b = 12$.

b) $\alpha > -4$. $F(x) = (-2x+12)e^{\frac{1}{2}x}$. En $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{-4}^{\alpha} f(x)dx = [F(x)]_{-4}^{\alpha} = (-2\alpha+12)e^{\frac{1}{2}\alpha} + 20e^{-2}$.

c) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \left[(-2\alpha+12)e^{\frac{1}{2}\alpha} + 20e^{-2}\right] = -\infty$.

Problème 166 :

A. **On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x}$.**

1. **Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^{-3x}$ soit solution de (E).**

2.

a) **Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' + 2y' - 3y = 0$.**

b) **Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).**

c) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**

d) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

e) **Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.**

B. **Soit f la fonction définies par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.**

1. **Déterminer les limites de f sur D_f.**

2. **Etudier le sens de variations de f.**

3. **Dresser le tableau de variation de f.**

4. **Tracer $\mathcal{C}_f$ (étudier les branches infinies).**

Correction :

A. (E) : $y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x}$.

(F) : $y'' + 2y' - 3y = 0$.

1. $\forall x \in$ IR, $g(x) = xe^{-3x} \Leftrightarrow g'(x) = (1-3x)e^{-3x} \Leftrightarrow g''(x) = (9x-6)e^{-3x}$. $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = (9x - 6 + 2 - 6x-3xe-3x=-4e-3x=0$.

Donc $g \in S_{(E)}$.

2.

a) $f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = -4e^{-3x}$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = -4e^{-3x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)''(x) + 2(f-g)'(x) - 3(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow h''(x) + 2h'(x) - 3h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.

b) $h \in S_{(F)} \Leftrightarrow h''(x) + 2h'(x) - 3h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = -4e^{-3x}$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)''(x) + 2(g+h)'(x) - 3(g+h)(x) = -4e^{-3x}$, or $f = (g+h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = -4e^{-3x}$, alors $h \in S_{(F)}$.

c) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1) = 0$, les solutions de l'équation homogène sont $h(x) = Ae^{x} + Be^{-3x}$.

d) **l'ensemble des solutions de (E) :**

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = g(x) + h(x) = xe^{-3x} + Ae^{x} + Be^{-3x}$, où A est constante réelle quelconque.

e) $\forall x \in$ IR, $f(x) = xe^{-3x} + Ae^{x} + Be^{-3x}$, $f(0) = 0 \times e^{0} + Ae^{0} + Be^{0} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow A + B = \frac{1}{3}$.

$\forall x \in$ IR, $f'(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} + Ae^{x} - 3Be^{-3x}$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[xe^{-3x} + Ae^{x} + Be^{-3x}] = 0$, on a : $A = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{3}$.

$\forall x \in$ IR, $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

B. $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}$.

1. **limites de f sur D_f :**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}\right] = -\infty$ et

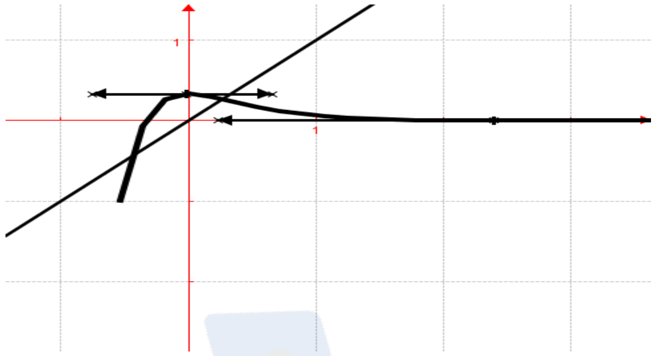
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-3x}\right] = 0$

2. **sens de variations de f :** $\forall x \in$ IR, $f'(x) = -3xe^{-3x}$; alors f est strictement croissante sur IR.

3. **tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

4. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{3x}\right)}{e^x}\right]=-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.



<u>Problème 167 :</u>

1. **On considère (E) et (E') les équations différentielles du 1er ordre respectivement définies par :** $\begin{cases} 2y'+y=0, (E) \\ 2y'+y=e^{\frac{-x}{2}}(x+1) \quad (E') \end{cases}$.

a) **Résoudre l'équation différentielle (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR.**

b) **Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur IR par :**

$f(x)=e^{\frac{-x}{2}}(ax^2+bx)$ **soit solution de (E').**

c) **Soit g une fonction définie et dérivable sur IR. Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g-f$ est solution de l'équation (E). Résoudre l'équation (E').**

2. **Soit h la fonction définie par :**

$h(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}(x^2+2x)$.

a) **Déterminer les limites de h sur D_h.**

b) **Etudier le sens de variations de h.**

c) **Dresser le tableau de variation de h.**

d) **Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_k$ la courbe de la fonction k définie par $k(x)=e^{\frac{-x}{2}}$.**

e) **Tracer $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_k$.**

<u>Correction :</u>

1. $\begin{cases} 2y'+y=0, (E) \\ 2y'+y=e^{\frac{-x}{2}}(x+1) \quad (E') \end{cases}$.

a) **Résoudre l'équation différentielle (E) :**

Cette équation peut se mettre sous la forme : $y'=\frac{-1}{2}y$, qui admet comme ensemble solution dans IR, l'ensemble des fonctions : $x\mapsto Ce^{\frac{-x}{2}}$ où C est une constante réelle quelconque.

b) **Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur IR par :**

$f(x)=e^{\frac{-x}{2}}(ax^2+bx)$ **soit solution de (E').**

$\forall\, x\in$ IR, $f(x)=e^{\frac{-x}{2}}(ax^2+bx) \Leftrightarrow 2f'(x)=[-ax^2+(4a-b)x+2b]e^{\frac{-x}{2}}$.

$f\in S_{(E')} \Leftrightarrow\ 2f'+f=[-ax^2+(4a-b)x+$ 2be−x2+e−x2ax2+bx=e−x24ax+2b=e−x2x+1 ⇔a=14⇔b=12, d'où ∀x∈fx=e−x214x2+12x.

c) $g\in S_{(E')}\Leftrightarrow 2g'+g=e^{\frac{-x}{2}}(x+1)$; $f\in S_{(E')}\Leftrightarrow 2f'(x)+f(x)=e^{\frac{-x}{2}}(x+1)$. En soustrayant membre à membre, on a $2(g-f)'(x)+(g-$ fx=0, or g−f∈SE⇔2g−f'x+g−fx=0, alors g∈SE'.

Résoudre l'équation (E') :

$g(x)=f(x)+Ce^{\frac{-x}{2}}=e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C\right)$.

2. $h(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}(x^2+2x)$. $D_h=$ IR

a) **limites de h sur D_h.**

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}(x^2+2x)\right]=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}(x^2+2x)\right]=0$.

b) **sens de variations de h.**

$\forall\, x\in$ IR, $h'(x)=\frac{1}{8}e^{\frac{-x}{2}}(-x^2+2x+4)$; $x=1\pm\sqrt{5}$; donc h est strictement décroissante sur $]-\infty;1-\sqrt{5}]$ et sur $[1+\sqrt{5};+\infty[$ et h est croissante sur $[1-\sqrt{5};1+\sqrt{5}]$.

c) $1-\sqrt{5}=-1{,}23$ et $1+\sqrt{5}=3{,}23$

x	$-\infty$		$-1{,}23$		$3{,}23$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0{,}44$	$\nearrow$	$0{,}8$	$\searrow$	0

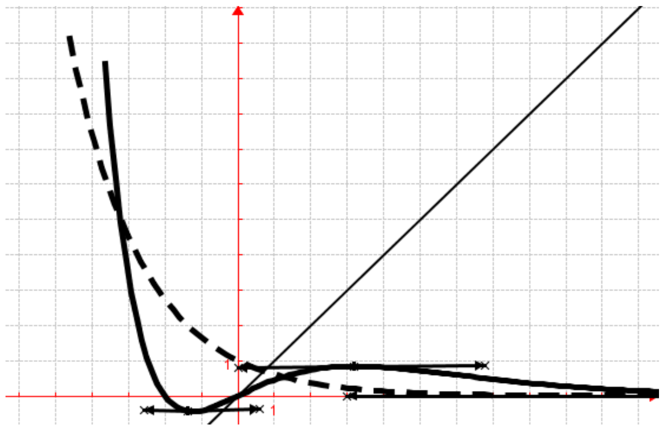
d) positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_k$ / $k(x)=e^{\frac{-x}{2}}$.

$h(x)-k(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}(x^2+2x-4)$

$\forall\, x\in\,]-\infty;-1-\sqrt{5}]\cup[-1+\sqrt{5};+\infty[$, $h(x)-k(x)>0$, donc $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_k$.

$\forall\, x\in[-1-\sqrt{5};-1+\sqrt{5}[$, $h(x)-k(x)<0$, donc $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de $\mathcal{C}_k$.

e) **$\mathcal{C}_h$ en trait plein et $\mathcal{C}_k$ en trait pointé**



Problème 168 :

1. On considère l'équation différentielle E : $y'(x) - y(x) = x + 2$.

a) Déterminer une fonction affine p solution de E.

b) Montrer que si y est solution de E, alors $y - P$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre. La résoudre.

c) Déterminer toutes les solutions de E.

2. On considère la fonction définie par $f(x) = e^x - x - 3$.

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote (D) d'équation $y = -x - 3$. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses et les équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$ avec $-2 <$ $\alpha < 0$. **Calculer sa limite en $-\infty$.**

3. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \ln(x + 3)$.
Etudier les variations de g.

4. Soit h la restriction de g à l'intervalle $\mathrm{I} = [0; +\infty[$.

a) Montrer que h est une bijection de I sur l'intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter et étudier la fonction réciproque de h notée h^{-1}.

5. Construire les courbes $\mathcal{C}_f$; $\mathcal{C}_g$et $\mathcal{C}^{-1}$.

6. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_{n+1} = \ln(P_n + 3) \end{cases}$$

a) Etudier le sens de variation de$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Correction :

1. E : $y'(x) - y(x) = x + 2$.

a) fonction affine p solution de E. soit $p(x) = ax + b \Leftrightarrow p'(x) = a$. En remplaçant dans E, on a : $p'(x) - p(x) = -ax - b + a = x + 2$, on en déduit que $a = -1$ et $b = -3$.
$\forall\, x \in$ IR, $p(x) = -x - 3$.

b) $y \in S_E \Leftrightarrow 2y'(x) - y(x) = x + 2$; $p \in S_E \Leftrightarrow p'(x) + p(x) = x + 2$. En soustrayant membre à membre, on a $(y - p)'(x) - (y - p)(x) = 0$, or $(y - p) \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow (y - p)'(x) + (y - p)(x) = 0$, alors $y \in S_{(\mathrm{E})}$.

Résoudre l'équation $y - p$: $y(x) - p(x) = Ce^x$.

c) toutes les solutions de E.
$y(x) = p(x) + Ce^x = Ce^x - x - 3$.

2. $f(x) = e^x - x - 3$.

a) les variations de f.
$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = e^x - 1$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x - x - 3] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^x - x - 3] = +\infty$

tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x] = 0$; donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote (D) d'équation $y = -x - 3$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) car $e^x > 0$.

c) $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_\alpha^0 f(x)dx = \left[-e^x + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_\alpha^0 = -e^\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + 3\alpha + 1$.

$\lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto -\infty}\left[-e^\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + 3\alpha + 1\right] = +\infty$.

3. $g(x) = \ln(x + 3)$.
$\forall\, x > -3$, $g'(x) = \frac{1}{x+3}$; donc g est strictement croissante sur $]-3 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -3} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -3}[\ln(x + 3)] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\ln(x + 3)] = +\infty$

tableau de variation de g.

x	0			$+\infty$
$g'(x)$	$\boxtimes$		$+$	
$g(x)$	$\boxtimes$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

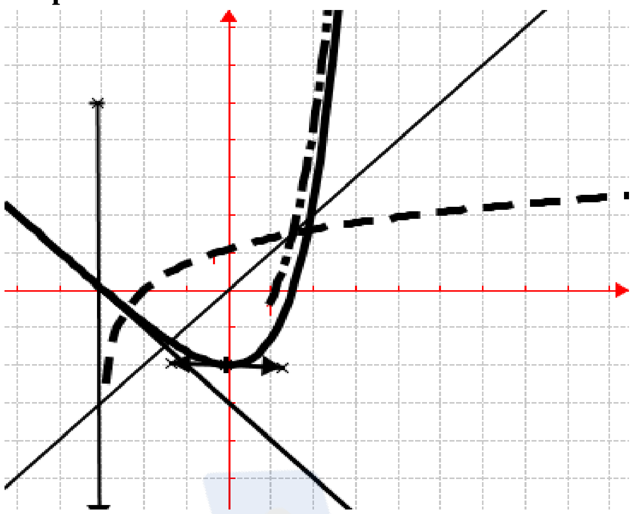
4. h la restriction de g à $\mathrm{I} = [0; +\infty[$.

a) h est continue et strictement croissante sur $\mathrm{I} = [0; +\infty[$. Elle réalise une bijection de I sur $\mathrm{J} = [\ln 3 ; +\infty[$.

b) $y = \ln(x+3) \Leftrightarrow x = e^y - 3$

$\forall\, x \in [\ln 3\,; +\infty[$, $h^{-1}(x) = e^x - 3$.

5. **$\mathcal{C}_f$ en trait plein ; $\mathcal{C}_g$ en trait pointé et $\mathcal{C}^{-1}$ en tiré point.**



6. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} / \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_{n+1} = \ln(P_n + 3) \end{cases}$

a) **sens de variation de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

Comme g est strictement croissante sur $]-3\,; +\infty[$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$.

b) **suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2 :**

Comme $\lim\limits_{x\mapsto 0} g(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0}[\ln(x+3)] = \ln 3$ et g est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$ alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

Problème 169 :

1. **Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.**

a) **Déterminer la solution générale de (E).**

b) **Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.**

2. **On considère h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :**

$$h(x) = \begin{cases} e^{-2x} - x - 1 \;\; si\; x \geq 0 \\ x^4 - 2x^2 \;\; si\; x < 0 \end{cases}$$

a) **Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.**

b) **Etudier les limites de h sur D_h.**

c) **Etudier le sens de variation de h.**

d) **Dresser le tableau de variation de h.**

e) **Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.**

f) **Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.**

Correction :

1. **(E) : $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.**

a) **Déterminer la solution générale de (E).**

L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-2x}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y(x) = ax + b$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a - 2ax - 2b = 2x + 1$ d'où $y(x) = -x - 1$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-2x} - x - 1$.

b) **Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.**

$f(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} = -\mathrm{B} + 1$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\mathrm{A}\frac{e^x}{x} + \mathrm{B}\frac{e^{-2x}}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right]$ or

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\mathrm{B}\frac{e^{-2x}}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right] = -1$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \mathrm{A}\frac{e^x}{x} = \infty$, donc $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} = 0$.

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $f(x) = e^{-2x} - x - 1$.

2. $h(x) = \begin{cases} e^{-2x} - x - 1 \;\; si\; x \geq 0 \\ x^4 - 2x^2 \;\; si\; x < 0 \end{cases}$

a) **la continuité et la dérivabilité de h en 0 :**

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-}[x^4 - 2x^2] = 0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+}[e^{-2x} - x - 1] = 0$ alors h est continue en 0.

$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{x^4-2x^2}{x} = x^3 - 2x$.

$\forall\, x \geq 0$, $h'(x) = -2e^{-2x} - 1$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\mapsto 0^-}[x^3 - 2x] = 0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = hd'(0) = -3$, comme $hg'(0) \neq hd'(0)$ alors h n'est pas dérivable en 0. par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point 2 deux demi-tangentes : T_{0^-}: $y = 0$ et T_{0^+}: $y = -3x$. Ce point est anguleux.

b) **limites de h sur D_h.**

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}[x^4 - 2x^2] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}[e^{-2x} - x - 1\,] = -\infty$

c) **sens de variation de h.**

$\forall\, x < 0$, $h'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$; donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et h est strictement croissante sur $[-1\,; 0[$.

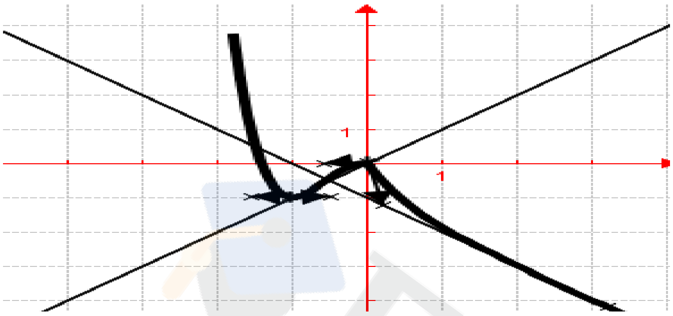
$\forall\, x \geq 0$, $h'(x) = -2e^{-2x} - 1 < 0$, donc h est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$

d) tableau de variation de h.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$		$-$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	-1 ↗	0 ↘	$-\infty$

e) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^{-2x}] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

f) Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.



Problème 170 :

1. Soit (E) l'équation différentielle :
$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$.

a) Déterminer la solution générale de (E).

b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f'(0) = 1$.

2. Soit f et u les fonctions définies par :
$f(x) = -e^x + e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ et
$u(x) = -e^x + 2e^{2x} + x$.

a) Etudier les variations de u sur IR.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur l'intervalle $[-0,5; -0,4]$.

c) En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.

d) Déterminer les limites de f sur D_f.

e) Etudier le sens de variations de f.

f) Dresser le tableau de variation de f.

g) Montrer que la courbe (c) d'équation $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ est « asymptote oblique » à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

h) Construire les courbes $\mathcal{C}_f$ et (c).

Correction :

1. (E) : $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x$.

a) Déterminer la solution générale de (E).

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{2x}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $y(x) = ax^2 + bx + c$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a = \frac{1}{2}$; $b = 0$ et $c = -\frac{1}{2}$ d'où $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

b) Déterminer l'unique solution f telle que

$f(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$

$f'(x) = \mathrm{A}e^x + 2\mathrm{B}e^{2x} + x$, on a : $f'(0) = \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 1$; $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 1 \end{cases}$, donc $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} = -1$.

$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = -e^x + e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

2. $f(x) = -e^x + e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ **et** $u(x) = -e^x + 2e^{2x} + x$.

a) les variations de u sur IR :

$\forall\, x \in$ IR, $u'(x) = -e^x + 4e^{2x} + 1 > 0$; alors u est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-e^x + 2e^{2x} + x] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[-e^x + 2e^{2x} + x] = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
$u(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) u est continue et strictement croissante sur $[-0{,}5; -0{,}4]$. Sur $[-0{,}5; -0{,}4]$, u est bijective et $u(-0{,}5) \times u(-0{,}4) < 0$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, on a : l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur $[-0{,}5; -0{,}4]$.

c) le signe de $u(x)$ sur IR.

$\forall\, x \in\,]-\infty; \alpha]$, $u(x) \leq 0$.

$\forall\, x \in [\alpha; +\infty[$, $u(x) \geq 0$.

d) limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[-e^x + e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[-e^x + e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)\right] = +\infty$

e) sens de variations de f :

$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = -e^x + 2e^{2x} + x = u(x)$; alors f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

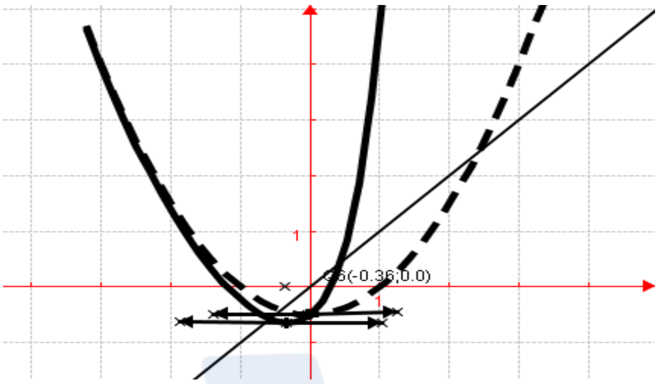
f) tableau de variation de f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$ ↗	$+\infty$

g) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-e^x + e^{2x}] = 0$, donc la courbe (c) d'équation $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ est « asymptote oblique » à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (c) sur $]-\infty; 0]$.

h) $\mathcal{C}_f$ en trait plein

$\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \infty} \left[\frac{-e^{x}+e^{2x}}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right] = \infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie de direction (Oy) à l'infinie.



<u>Problème 171 :</u>

1. Soit (E) l'équation différentielle :
$y'' + 4y' - 5y = 2e^{x}$.

a) Déterminer la solution générale de (E).

b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = \frac{1}{3}$ et $f'(0) = \frac{19}{3}$.

2. On considère h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$h(x) = -e^{x} + e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}$

a) Etudier les limites de h sur D_h.

b) Etudier le sens de variation de h.

c) Dresser le tableau de variation de h.

d) Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.

<u>Correction :</u>

1. (E) : $y'' + 4y' - 5y = 2e^{x}$.

a) Déterminer la solution générale de (E).

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r - 5 = (r - 2)(r - 1)$, les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-5x}$. On cherche une solution particulière sous la forme: $y(x) = axe^{x}$. On remplace dans l'équation différentielle et on trouve $a = \frac{1}{3}$; d'où $y(x) = \frac{1}{3}xe^{x}$. En résumé les solutions sur R sont de la forme $y(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}$.

b) Déterminer l'unique solution f telle que :

$f(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$

$f'(x) = \mathrm{A}e^{x} - 5\mathrm{B}e^{-5x} + \frac{1}{3}e^{x} + \frac{1}{3}xe^{x}$, on a :

$f'(0) = \mathrm{A} - 5\mathrm{B} + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$; $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} - 5\mathrm{B} = 6 \end{cases}$, donc $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} = -1$.

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $f(x) = -e^{x} + e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}$.

2. $h(x) = -e^{x} + e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}$

a) limites de h sur D_h.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-e^{x} + e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[-e^{x} + e^{-5x} + \frac{1}{3}xe^{x}\right] = +\infty$

b) sens de variation de h.

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $h'(x) = -e^{x} - 5e^{-5x} + \frac{1}{3}e^{x} + \frac{1}{3}xe^{x} = e^{x}\left(-5e^{-4x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right)$. Posons $g(x) = -5e^{-4x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x \Leftrightarrow g'(x) = 20e^{-4x} + \frac{1}{3} > 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[-5e^{-4x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[-5e^{-4x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right] = +\infty$; donc une racine α sur $[1{,}8; 2{,}4]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha]$, $g(x) < 0$.

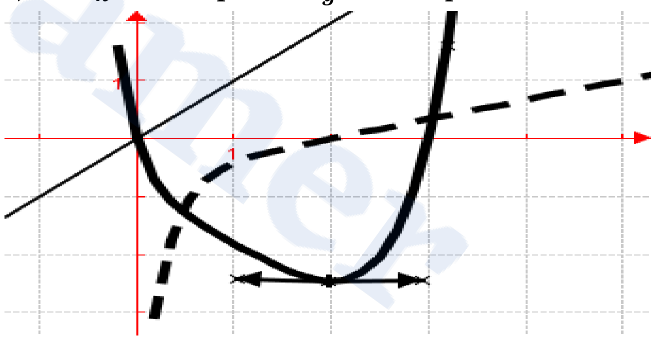
$\forall\, x \in [\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$.

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $h'(x) = e^{x}\left(-5e^{-4x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x\right) = e^{x}g(x)$; alors h est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et h est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

c) tableau de variation de h.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

d) $\mathcal{C}_h$ en trait plein ; $\mathcal{C}_g$ en trait pointé.



<u>Problème 172 :</u>

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $4y' + y = x + 6$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

2.

a) Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $4y' + y = 0$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

e) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 4$.

B. **Soit f la fonction définies par :**

$f(x) = 2e^{-\frac{x}{4}} + x + 2$.

1. Déterminer les limites de f sur D_f.

2. Etudier le sens de variations de f.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote (D) d'équation $y = x + 2$. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote.

5. Tracer $\mathcal{C}_f$(étudier les branches infinies).

Correction :

A. (E) : $4y' + y = x + 6$.

(F) : $4y' + y = 0$.

1. Déterminons les réels a et b pour que g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) : $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = ax + b \Leftrightarrow g'(x) = a$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow 4g'(x) + g(x) = 4a + ax + b = x + 6 \Leftrightarrow a = 1, b = 2$ d'où $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = x + 2$.

2.

a) Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow h = f - g$ est solution de (F) :

$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow 4f'(x) + f(x) = x + 6$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow 4g'(x) + g(x) = x + 6$. En soustrayant membre à membre, on a $4(f - g)'(x) + (f - g)(x) = 0$, or $h = (f - g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow 4h'(x) + h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(F)} \Leftrightarrow 4h'(x) + h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow 4g'(x) + g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $4(g + h)'(x) + (g + h)(x) = x + 6$, or $f = (g + h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow 4f'(x) + f(x) = x + 6$, alors $h \in S_{(F)}$.

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = Ae^{-\frac{x}{4}}$, où A est constante réelle quelconque.

d) l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = Ae^{-\frac{x}{4}} + x + 2$, où A est constante réelle quelconque.

e) $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = Ae^{-\frac{x}{4}} + x + 2$

$f(0) = Ae^{-\frac{0}{4}} + 0 + 2 = 4 \Leftrightarrow A = 2$. $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = 2e^{-\frac{x}{4}} + x + 2$.

B. $f(x) = 2e^{-\frac{x}{4}} + x + 2$.

1. limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[2e^{-\frac{x}{4}} + x + 2\right] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[2e^{-\frac{x}{4}} + x + 2\right] = +\infty$

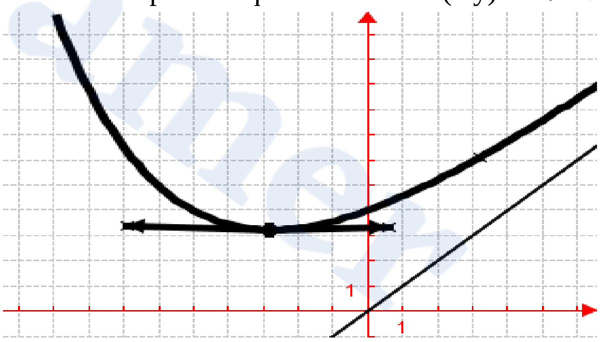
2. sens de variations de f : $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}} + 1$; alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; -4\ln 2]$ et f est strictement croissante sur $[-4\ln 2\,; +\infty[$.

3. tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-4\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3,22	↗	$+\infty$

4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[f(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2e^{-\frac{x}{4}}\right] = 0$; donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote (D) d'équation $y = -x - 3$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) car $2e^{-\frac{x}{4}} > 0$.

5. $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \infty}\left[\frac{2e^{-\frac{x}{4}}}{x} + 1 + \frac{2}{x}\right] = +\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Problème 173 :

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y' - 2y = xe^x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E), l'équation différentielle.

2.

a) Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

e) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

B. Soit f et u les fonctions définies par :

$f(x) = -2e^{2x} + (-x + 2)e^x$ et

$u(x) = -4e^x - x + 1$.

1. **Etudier les variations de u sur IR.**
2. **Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur l'intervalle $[-0,9; -0,7]$.**
3. **En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.**
4. **Déterminer les limites de f sur D_f.**
5. **Etudier le sens de variations de f.**
6. **Dresser le tableau de variation de f.**
7. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.**

Correction :

A. (E) : $y' - 2y = xe^x$.

(F) : $y' - 2y = 0$.

1. Déterminons les réels a et b pour que g définie sur IR par $g(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E) : $\forall x \in$ IR, $g(x) = (ax + b)e^x \Leftrightarrow g'(x) = (ax + b + a)e^x$.

$g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g' - 2g = [-ax - 2a - b]e^x = xe^x \Leftrightarrow a = -1, b = 2$ d'où $\forall x \in$ IR, $g(x) = (-x + 2)e^x$.

2.

a) Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow h = f - g$ est solution de (F) :

$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = xe^x$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = xe^x$. En soustrayant membre à membre, on a $(f - g)'(x) - 2(f - g)(x) = 0$, or $h = (f - g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(F)} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $(g + h)'(x) - 2(g + h)(x) = xe^x$, or $f = (g + h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = xe^x$, alors $h \in S_{(F)}$.

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = Ae^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.

d) l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = Ae^{2x} + (-x + 2)e^x$, où A est constante réelle quelconque.

e) $\forall x \in$ IR, $f(x) = Ae^{2x} + (-x + 2)e^x$

$f(0) = Ae^0 + (-0 + 2)e^0 = 0 \Leftrightarrow A = -2$.

$\forall x \in$ IR, $f(x) = -2e^{2x} + (-x + 2)e^x$.

B. $f(x) = -2e^{2x} + (-x + 2)e^x$ **et**

$u(x) = -4e^x - x + 1$.

1. les variations de u sur IR :

$\forall x \in$ IR, $u'(x) = -4e^x - 1 < 0$; alors u est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-4e^x - x + 1] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[-4e^x - x + 1] = -\infty$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2. u est continue et strictement décroissante sur $[-0,9; -0,7]$. Sur $[-0,9; -0,7]$, u est bijective et $u(-0,9) \times u(-0,7) < 0$. Selon le théorème des valeurs intermédiaires, on a : l'équation $u(x) = 0$ admet une solution α sur $[-0,9; -0,7]$.

3. le signe de $u(x)$ sur IR.

$\forall x \in]-\infty; \alpha]$, $u(x) \geq 0$.

$\forall x \in [\alpha; +\infty[$, $u(x) \leq 0$.

4. limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-2e^{2x} + (-x + 2)e^x] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[-2e^{2x} + (-x + 2)e^x] = -\infty$

5. sens de variations de f :

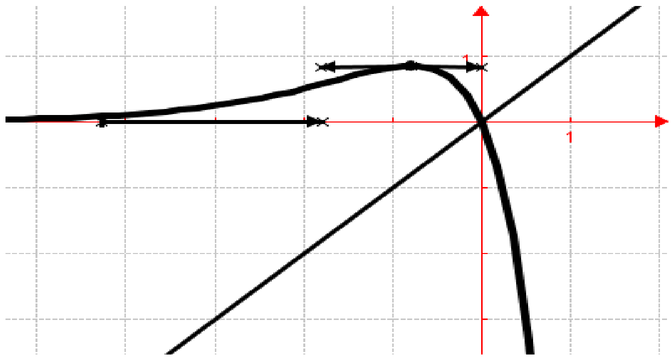
$\forall x \in$ IR, $f'(x) = e^x u(x)$; alors f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

6. tableau de variation de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

7. $\mathcal{C}_f$ en trait plein

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[-2\frac{e^{2x}}{x} + (-x + 2)\frac{e^x}{x}\right] = -\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Problème 174 :

A. On considère (E) l'équation différentielle du premier ordre : $y' - 2y = e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^{2x}$ soit solution de (E).

2.

a) Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

e) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$.

B. **Soit h la fonction définies par :**

$$h(x) = \begin{cases} (x+1)e^{2x} & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Déterminer les limites de $h$sur D_h.

3. Etudier le sens de variations de h.

4. Dresser le tableau de variation de h.

5. Tracer $\mathcal{C}_h$(étudier les branches infinies).

Correction :

A. (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

(F) : $y' - 2y = 0$.

1. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow g'(x) = (2x+1)e^{2x}$. $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = (2x+1)e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x} = 0$.

Donc $g \in S_{(E)}$.

2.

a) Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $h = f - g$ est solution de (F) :

$f \in S_{(E)} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = e^{2x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)'(x) - 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(E)}$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(F)} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)'(x) - 2(g+h)(x) = e^{2x}$, or $f = (g+h) \in S_{(E)} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$, alors $h \in S_{(F)}$.

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = \mathrm{A}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.

d) l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}e^{2x} + xe^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.

e) $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = \mathrm{A}e^{2x} + xe^{2x}$

$f(0) = \mathrm{A}e^{0} + 0 \times e^{0} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 1$.

$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

B. $$h(x) = \begin{cases} (x+1)e^{2x} & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. la continuité et la dérivabilité de h en 0 :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}[(x+1)e^{2x}] = 1$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[\sqrt{x+1}] = 1$ alors h est continue en 0.

$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.

$\forall\, x \leq 0$, $h'(x) = (x+2)e^{2x}$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right] = \frac{1}{2}$ et

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = hd'(0) = 2$, comme $hg'(0) \neq hd'(0)$

alors h n'est pas dérivable en 0. par conséquent $\mathcal{C}_h$ admet en ce point 2 deux demi-tangentes. Ce point est anguleux.

2. limites de h sur D_h.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(x+1)e^{2x}] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\sqrt{x+1}] = +\infty$

3. sens de variation de h.

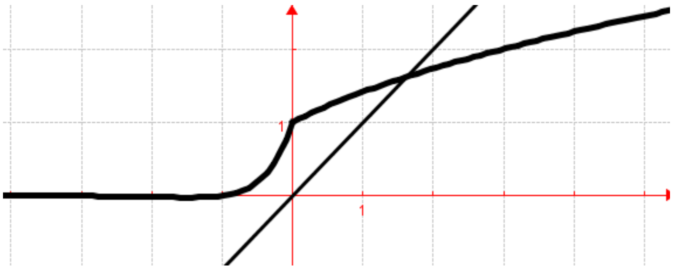
$\forall\, x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; donc h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$\forall\, x \leq 0$, $h'(x) = (x+2)e^{2x}$, donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ et h est croissante sur $[-2; 0]$.

4. tableau de variation de h.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$	$\|\|$	$+$
$h(x)$	$0 \searrow$	$-e^{-4}$	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

5. Construire la courbe $\mathcal{C}_h$.



Problème 175 :

A. On considère (E) l'équation différentielle du premier ordre : $y' - y = \frac{e^x}{x^2}$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$ soit solution de (E).

2.

a) Démontrer qu'une fonction f une fois dérivable sur $]0;\ +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - y = 0$.

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

B. Pour tout réel m négatif ou nul, on considère f_m la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f_m(x) = \frac{mx-1}{x}.e^x$.

1. Déterminer les limites de f_m sur $]0;\ +\infty[$.

2. Etudier le sens de variations de f_m.

3. Dresser le tableau de variation de f_m.

4. Tracer $\mathcal{C}_{f_m}$ (étudier les branches infinies).

Correction :

C. (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

(F) : $y' - 2y = 0$.

3. $\forall\, x \in$ IR, $g(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow g'(x) = (2x+1)e^{2x}$. $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = (2x+1)e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x} = 0$.

Donc $g \in S_{(\mathrm{E})}$.

4.

a) Démontrons que f 1 fois dérivable sur IR est solution de (E) $\Leftrightarrow h = f - g$ est solution de (F) :

$f \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$; $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = e^{2x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)'(x) - 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(\mathrm{E})}$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E). $h \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = x + 6$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)'(x) - 2(g+h)(x) = e^{2x}$, or $f = (g+h) \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$ alors $h \in S_{(\mathrm{F})}$.

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $h(x) = \mathrm{A}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.

d) l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}e^{2x} + xe^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.

e) $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = \mathrm{A}e^{2x} + xe^{2x}$

$f(0) = \mathrm{A}e^0 + 0 \times e^0 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 1$.

$\forall\, x \in$ IR, $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

Problème 176 :

A. On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^{3x}$ soit solution de (E).

2.

a) Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

b) Réciproquement, montrer que si une fonction h est solution de (F) alors la fonction $f = g + h$ est solution de (E).

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

e) Déterminer la solution particulière de (E) dont $\mathcal{C}_f$ passe par le point $\mathrm{A}(0; 3)$ et admet une tangente en cet point de coefficient directeur 2.

B. **Soit f la fonction définies par : $f(x) = e^{3x} + 5e^x - 3e^{2x}$.**

1. Déterminer les limites de f sur D_f.

2. Etudier le sens de variations de f.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer $\mathcal{C}_f$ (étudier les branches infinies).

Correction :

A. (E) : $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

(F) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1. $\forall\, x \in \mathrm{IR}, g(x) = e^{3x} \Leftrightarrow g'(x) = 3e^{3x} \Leftrightarrow g''(x) = 9e^{3x}$. $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g'' - 3\,g' + 2g = (9 - 3 \times 3)e^{3x} + 2e^{3x} = 2e^{3x} = 0$.
Donc $g \in S_{(\mathrm{E})}$.

2.

a) $f \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2e^{3x}$; $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) - 3\,g'(x) + 2g(x) = 2e^{3x}$. En soustrayant membre à membre, on a $(f-g)''(x) - 3(f-g)'(x) + 2(f-g)(x) = 0$, or $h = (f-g) \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$, alors $f \in S_{(\mathrm{E})}$.

b) $h \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$ et $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 2e^{3x}$. En ajoutant membre à membre, on a $(g+h)''(x) - 3(g+h)'(x) + 2(g+h)(x) = 2e^{3x}$, or $f = (g+h) \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2e^{3x}$, alors $h \in S_{(\mathrm{F})}$.

c) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**
L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$, les solutions de l'équation homogène sont $h(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x}$.

d) **l'ensemble des solutions de (E) :**
Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = g(x) + h(x) = e^{3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x}$, où A est constante réelle quelconque.

e) $\forall\, x \in \mathrm{IR}, f(x) = e^{3x} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{2x}$,
Au point A(0; 3) on a : $f(0) = e^0 + \mathrm{A}e^0 + \mathrm{B}e^0 = 3 \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = 2$.
$\forall\, x \in \mathrm{IR}, f'(x) = 3e^{3x} + \mathrm{A}e^{x} + 2\mathrm{B}e^{2x}$.
Tangente au point A : $f'(0) = 3e^0 + \mathrm{A}e^0 + 2\mathrm{B}e^0 = 2 \Leftrightarrow \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = -1$; enfin on aura : $\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B} = 2 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 5 \\ \mathrm{B} = -3 \end{cases}$
$\forall\, x \in \mathrm{IR}, f(x) = e^{3x} + 5e^{x} - 3e^{2x}$.

B. $\boldsymbol{f(x) = e^{3x} + 5e^{x} - 3e^{2x}}$.

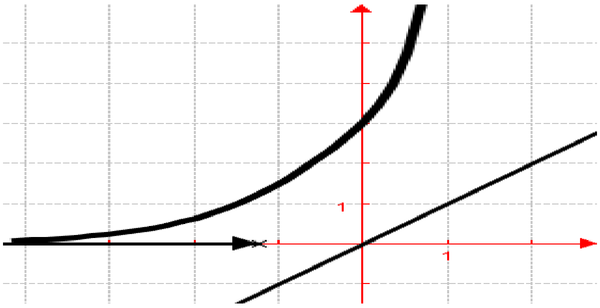
1. **limites de f sur D_f :**
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^{3x} + 5e^{x} - 3e^{2x}] = 0$ et
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^{3x} + 5e^{x} - 3e^{2x}] = +\infty$

2. **sens de variations de f :** $\forall\, x \in \mathrm{IR}, f'(x) = e^{x}(3e^{2x} - 6e^{x} + 5)$; alors f est strictement croissante sur IR.

3. **tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^{3x} + 5e^{x} - 3e^{2x}}{x}\right] = +\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Problème 177 :

A. **On considère (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.**

1. **Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).**

2.

a) **Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' + 2y' + y = 0$.**

b) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**

c) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

d) **Déterminer la solution particulière de (E) dont $\mathcal{C}_f$ passe par le point O et admet comme tangente en O la droite (Ox).**

C. **Soit f et u les fonctions définies par :**
$\boldsymbol{f(x) = 2xe^{x} + x^2 - 2x}$ **et**
$\boldsymbol{u(x) = (x+1)e^{x} + x - 1}$.

1. **Etudier les variations de u sur IR.**
2. **Calculer $u(0)$. En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.**
3. **Déterminer les limites de f sur D_f.**
4. **Etudier le sens de variations de f.**
5. **Dresser le tableau de variation de f.**
6. **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.**

Correction :

A. **(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$.**
(F) : $y'' + 2y' + y = 0$.

1. $\forall\, x \in \mathrm{IR}, g(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow g'(x) = 2ax + b \Leftrightarrow g''(x) = 2a$.
$g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow a = 1, b = -2$ et $c = 0$ d'où $\forall\, x \in \mathrm{IR}, g(x) = x^2 - 2x$.

2.

a) $h \in S_{(E)} \Leftrightarrow h''(x) + 2h'(x) + h(x) = x^2 + 2x - 2$; $g \in S_{(E)} \Leftrightarrow g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$. En soustrayant membre à membre, on a $(h-g)''(x) + 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$, or $(h-g) \in S_{(F)} \Leftrightarrow (h-g)''(x) + 2(h-g)'(x) + (h-g)(x) = 0$, alors $h \in S_{(E)}$.

b) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $y = (Ax + B)e^x$.

c) l'ensemble des solutions de (E) :

Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $h(x) = (Ax + B)e^x + x^2 - 2x$.

d) $\forall x \in IR, h(x) = (Ax + B)e^x + x^2 - 2x$

$h(0) = (A \times 0 + B)e^0 + 0^2 - 2 \times 0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$.

$\forall x \in IR, h'(x) = (Ax + B + A)e^x + 2x - 2$.

$h'(0) = (A \times 0 + B + A)e^0 + 2 \times 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow B + A = 2$; donc $A = 2$

B. $\boldsymbol{f(x) = 2xe^x + x^2 - 2x}$ **et** $\boldsymbol{u(x) = (x+1)e^x + x - 1}$.

1. les variations de u sur IR :

$\forall x \in IR, u'(x) = (x+2)e^x + 1 \Leftrightarrow u''(x) = (x+3)e^x$; alors u' est strictement décroissante sur $]-\infty; -3]$ et u' est strictement croissante sur $[-3; +\infty[$; or $u'(-3) = 0{,}95 > 0$; donc $\forall x \in IR$, $u'(x) > 0$ alors u est strictement croissante sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(x+1)e^x + x - 1] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(x+1)e^x + x - 1] = +\infty$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $u(0) = (0+1)e^0 + 0 - 1 = 0$. **le signe de $\boldsymbol{u(x)}$ sur IR.**

$\forall x \in]-\infty; 0], u(x) \leq 0$.

$\forall x \in [0; +\infty[, u(x) \geq 0$.

3. limites de f sur D_f :

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[2xe^x + x^2 - 2x] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[2xe^x + x^2 - 2x] = +\infty$

4. sens de variations de f :

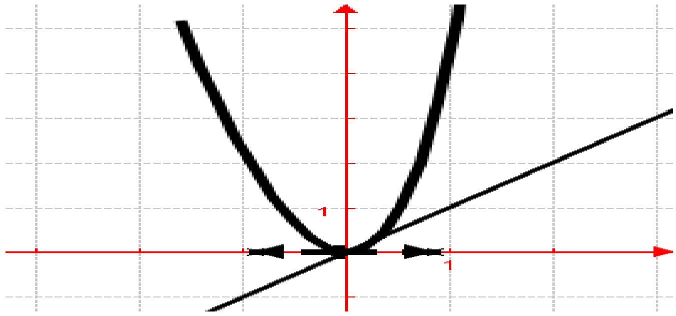
$\forall x \in IR, f'(x) = 2u(x)$; alors f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

5. tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ en trait plein

$\lim\limits_{x \mapsto \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto \pm\infty}[2e^x + x - 2] = \mp\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $\pm\infty$.



<u>Problème 178 :</u> Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel. On considère $\boldsymbol{f_a}$ la fonction définie sur IR par

$$\boldsymbol{f_a(x) = [x^2 - (a+3)x + 2a + 3]e^x}.$$

A. (d'unité graphique 2 cm)

1. Soit le polynôme $\boldsymbol{p}$ défini par $\boldsymbol{p(x) = x^2 - (a+1)x + a}$.

Résoudre dans IR $\boldsymbol{p(x) = 0}$.

2. Etudier les limites de $\boldsymbol{f_a}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Montrer pour tout réel $\boldsymbol{a}$ qu'il existe un point A commun à toutes les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_a}}$ dont on déterminera son coordonnée.

4. Montrer que $\forall x \in$ IR $\boldsymbol{f'_a(x) = p(x).e^x}$. En déduire suivant les valeurs de $\boldsymbol{a}$, on prendra ($\boldsymbol{a < 0;\ a = 0\ ou\ a > 0}$), le sens de variation de $\boldsymbol{f_a}$ sur IR. Pour chaque valeur de $\boldsymbol{a}$, dresser le tableau de variations de $\boldsymbol{f_a}$ sur IR.

5. Construire les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_{-1/2}}}$; $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_0}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_{1/2}}}$.

B. Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un réel tel que $\boldsymbol{\lambda < 0}$.

a) Calculer en $\boldsymbol{cm^2}$ l'aire $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$ de la région du plan délimitée par la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_1}}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = \lambda}$.

b) Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)}$.

<u>Correction :</u> $\boldsymbol{a}$ un nombre réel

$$\boldsymbol{f_a(x) = [x^2 - (a+3)x + 2a + 3]e^x}.$$

A.

1. $\boldsymbol{p(x) = x^2 - (a+1)x + a}$.

Résoudre dans IR $\boldsymbol{p(x) = 0}$.

$$\Delta = (a+1)^2 - 4a = (a-1)^2$$

$x' = \frac{a+1-a+1}{2} = 1$ et $x'' = \frac{a+1+a-1}{2} = a$

$\boldsymbol{S_{IR} = \{a; 1\}}$

2. **limites de f_a en $-\infty$ et en $+\infty$**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(x^2)e^x] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(x^2)e^x] = +\infty$

3. $f_a(x) = f_{a+1}(x) \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ alors il existe un point A commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_a}$ dont de coordonnée $(2;\ e^2)$.

4. $\forall\ x \in$ IR $f_a^{'}(x) = (2x - a - 3)e^x + [x^2 - (a+3)x + 2a + 3]e^x = [x^2 - (a + 3 - 2)x +$ 2a–a–3+3ex=x2–a+1x+aex=px.ex. Son signe dépend de $p(x)$.

- **Pour $a < 0$**

$f_a^{'}(x) = p(x).e^x = (x-1)(x-a)e^x$

x	$-\infty$	a	1	$+\infty$
$f_a{}'(x)$	$+$	$-$	$+$	

$\forall\ x \in]-\infty; a[\cup]1;\ +\infty[\ f_a^{'}(x) > 0$ alors f_a est strictement croissante sur $]-\infty; a[$ et sur $]1;\ +\infty[$.

$\forall\ x \in]a; 1[\ f_a^{'}(x) < 0$ alors f_a est strictement décroissante sur $]a; 1[$.

$f_a(1) = (1+a)e$ $\qquad f_a(a) = (3-a)e^a$

x	$-\infty$	a	1	$+\infty$
$f_a{}'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f_a(x)$	$0 \nearrow$	$(3-a)e^a \searrow$	$(1+a)e \nearrow$	$+\infty$

- Pour $a = 0$ et $f_0(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x$

$f_0^{'}(x) = x(x-1)e^x$

$\forall\ x \in]-\infty; 0[\cup]1;\ +\infty[\ f_0^{'}(x) > 0$ alors f_0 est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1;\ +\infty[$.

$\forall\ x \in]0; 1[\ f_0^{'}(x) < 0$ alors f_0 est strictement décroissante sur $]0; 1[$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_0{}'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f_0(x)$	$0 \nearrow$	$3 \searrow$	$e \nearrow$	$+\infty$

- Pour $a > 0$

$f_a^{'}(x) = p(x).e^x = (x-1)(x-a)e^x$

x	$-\infty$	1	a	$+\infty$
$f_a{}'(x)$	$+$	$-$	$+$	

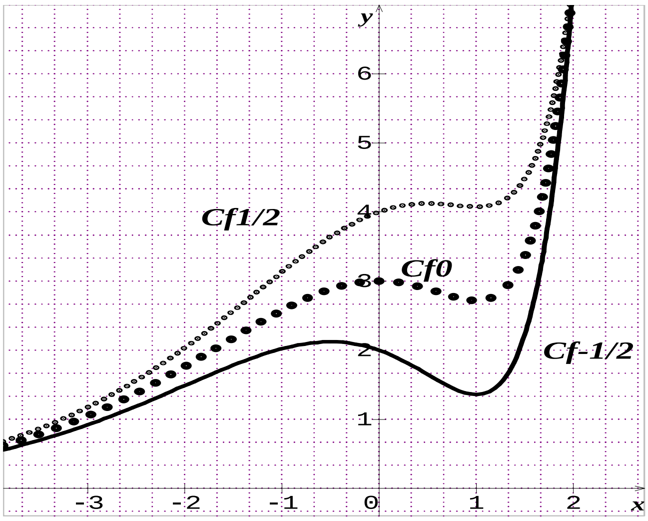
$\forall\ x \in]-\infty; 1[\cup]a;\ +\infty[\ f_a^{'}(x) > 0$ alors f_a est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]a;\ +\infty[$.

$\forall\ x \in]1; a[\ f_a^{'}(x) < 0$ alors f_a est strictement décroissante sur $]1; a[$.

$f_a(a) = (3-a)e^a$ $\qquad f_a(1) = (1+a)e$

x	$-\infty$	1	a	$+\infty$
$f_a{}'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f_a(x)$	$0 \nearrow$	$(1+a)e \searrow$	$(3-a)e^a \nearrow$	$+\infty$

5. **Construire les courbes $\mathcal{C}_{f_{-1/2}}$; $\mathcal{C}_{f_0}$ et $\mathcal{C}_{f_{1/2}}$**



B. **Soit λ un réel tel que $\lambda < 0$.**

a) $F_a(x) = [x^2 - (a+1)x + 3a + 8]e^x$

$\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_\lambda^0 f_a(x)dx\ cm^2 = 4[F_a(x)]_\lambda^0 cm^2$

$\mathcal{A}(\lambda) = 4[3a + 8 - (\lambda^2 - (a+1)\lambda + 3a +$ 8eλcm2

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4(3a+8)cm^2$

Problème 179 :

1. Soit (E) l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

a) Quelles sont les solutions de (E) ?

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe $\mathcal{C}'$ représentative de $y = e^{3x}$? on dit que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ sont tangentes.

c) Construire $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'$ dont on précisera leurs positions relatives.

2. On considère f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_m(x) = -m^2e^x + 2me^{2x}$, avec $m \in \mathbb{R}^*_+$.

a) Montrer que f_m est solution de (E).

b) Montrer que $\mathcal{C}_{f_m}$ est tangente à $\mathcal{C}'$ et calculer les coordonnées du point de contact en fonction de m.

c) Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_{f_m}$ et $\mathcal{C}'$.

d) Quel est l'ensemble des points des courbes $\mathcal{C}_{f_m}$ où la tangente est parallèle $(x'x)$?

3. a et b étant deux réels tels que $0 < a < b$, on appelle A et B les points de contact de $\mathcal{C}_{f_a}$ et $\mathcal{C}_{f_b}$ avec $\mathcal{C}'$ et E le point d'intersection de $\mathcal{C}_{f_a}$ et $\mathcal{C}_{f_b}$.

a) Calculer l'abscisse γ de E en fonction de a et b et comparer γ aux abscisses de A et B.

b) $\mathcal{C}_{f_a}$; $\mathcal{C}_{f_b}$ et $\mathcal{C}'$ forme un triangle curviligne ABE.

Calculer l'aire S de ce triangle en fonction de a et b.

1. Soit (E') l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction p définie sur IR par $p(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E').

2. On pose $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.

a) Montrer que h est une solution de l'équation (E') si, et seulement si, g est une solution de (E). En déduire les fonctions h solutions de (E').

b) Déterminer la solution de (E') dont la courbe représentative passe par le point $(0; 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

3. Soit $H(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2e^x$. Montrer que l'équation $H(x) = 0$ admet une solution unique α avec $\alpha \in]-3; -2[$. Calculer α à 10^{-2} près.

4. Préciser la position de $\mathcal{C}_H$ par rapport à la courbe représentative de Γ définie par $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$ ainsi que l'intersection de Γ avec la droite Δ d'équation $y = x$.

5. Etudier H sur IR. Déterminer l'équation de la tangente T_O à au point d'abscisse nulle et construire $\mathcal{C}_H$; T_O et Γ.

6. Montrer que H admet une fonction réciproque H^{-1}. Tracer $\mathcal{C}_{H^{-1}}$.

<u>Correction :</u>

1. (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

a) L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, Δ= 1. Les solutions de l'équation (E) sont donc $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

b) $y(x) = e^{3x} \Leftrightarrow y'(x) = 3e^{3x} \Leftrightarrow y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$, donc la tangente est d'équation $y = 3x + 1$ on en déduit que $f(0) = A + B = 1$ et $f'(0) = A + 2B = 3$, ce qui fait un système :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}, f(x) = -e^x + 2e^{2x}$$

c) $\forall x \in$ IR, $f'(x) = -e^x + 4e^{2x} = e^x(4e^x - 1)$; donc f est strictement croissante sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-e^x + 2e^{2x}] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[-e^x + 2e^{2x}] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[2e^{2x}] = +\infty$

tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	0 ↘	$-1/8$	↗ $+\infty$

$\forall x \in$ IR, $y' = 3e^{3x} > 0$, donc y est strictement croissante sur IR.

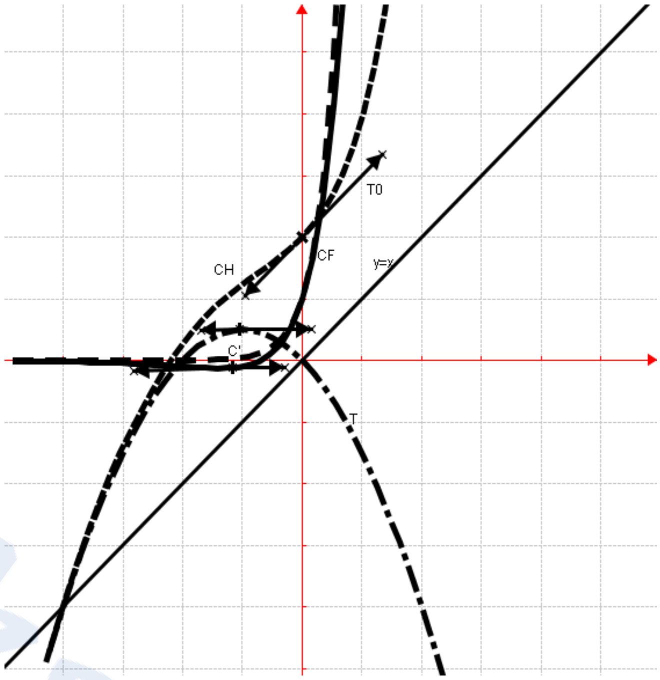
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} y = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^{3x}] = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} y = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[e^{3x}] = +\infty$

tableau de variation de y.

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	$+$	
y	0 ↗	$+\infty$

$f(x) - y = -e^x + 2e^{2x} - e^{3x} = e^x(-e^{2x} + 2e^x - 1) = -e^x(e^x - 1)^2 < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}'$ sur IR.

$\mathcal{C}_f$ en trait continu et $\mathcal{C}'$ en trait discontinu



2. $f_m(x) = -m^2e^x + 2me^{2x}$, avec $m \in \mathbb{R}^*_+$.

a) $\forall x \in$ IR, $f'_m(x) = -m^2e^x + 4me^{2x} \Leftrightarrow$ $f''_m(x) = -m^2e^x + 8me^{2x}$, en remplaçant dans (E), on a : $f''_m(x) - 3f'_m(x) + 2f_m(x) = (-m^2e^x + 8me^{2x}) - 3(-m^2e^x + 4me^{2x}) + 2(-m^2e^x + 2me^{2x}) = (-m^2e^x + 3m^2e^x - 2m^2e^x) + (8me^{2x} - 12me^{2x} + 4me^{2x}) = 0$ alors f_m est solution de (E).

b) Montrer que $\mathcal{C}_{f_m}$ est tangente à $\mathcal{C}'$

$y(0) = 1$ et $f_m(0) = -m^2e^0 + 2me^0 = 2m - m^2$

$f'_m(0) = -m^2e^0 + 4me^0 = 4m - m^2$

Tangente $y = f'_m(0)(x - 0) + f_m(0)$

$$\begin{cases} y = (4m - m^2)x + 2m - m^2 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - m^2 = 3 \\ 2m - m^2 = 1 \end{cases}$$

donc $m = 1$ alors **$\mathcal{C}_{f_m}$ est tangente à $\mathcal{C}'$.**

$\mathcal{C}_{f_m} \cap \mathcal{C}' \Leftrightarrow f_m(x) = e^{3x} \Leftrightarrow e^x(e^x - m)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $x = \ln m$. Donc son coordonnée est $(\ln m\,;\ m^3)$

c) $f_m(x) - y = -e^x(e^x - m)^2 < 0$ alors $\mathcal{C}_{f_m}$ est au-dessous de $\mathcal{C}'$ sur IR.

d) **l'ensemble des points des courbes $\mathcal{C}_{f_m}$ où la tangente est parallèle $(x'x)$:** $f'_m(x) = -m^2e^x + 4me^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4me^x - m^2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{m}{4}\right)$.

3. $\mathrm{A} = \mathcal{C}_{f_a} \cap \mathcal{C}' \Leftrightarrow f_a(x) = e^{3x} \Leftrightarrow x = \ln a$

Le point $\mathrm{A}(\ln a\,;\ a^3)$ et on déduit $\mathrm{B}(\ln b\,;\ b^3)$.

$\mathrm{E} = \mathcal{C}_{f_a} \cap \mathcal{C}_{f_b} \Leftrightarrow f_a(x) = f_b(x) \Leftrightarrow -a^2e^x + 2ae^{2x} = -b^2e^x + 2be^{2x} \Leftrightarrow b^2 - a^2 + 2(a - b)e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \ln \frac{1}{2}(a+b)$.

Donc $\mathrm{E}\left(\ln\left[\frac{1}{2}(a+b)\right];\ \frac{1}{2}m(a+b)(a+b-m)\right)$

a et b étant deux réels tels que $0 < a < b$.

a) l'abscisse de E est $\gamma = \ln\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]$

comparer γ aux abscisses de A et B.

à partir $0 < a < b \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < a + b \\ a < \frac{1}{2}(a+b) \\ \ln a < \ln\left[\frac{1}{2}(a+b)\right] \end{cases}$ donc

l'abscisse de E est $\gamma = \ln\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]$ est strictement supérieure de celle du point A. Au même raisonnement

à partir $0 < a < b \Leftrightarrow \begin{cases} a + b < 2b \\ \frac{1}{2}(a+b) < b \\ \ln\left[\frac{1}{2}(a+b)\right] < \ln b \end{cases}$ donc

l'abscisse de E est $\gamma = \ln\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]$ est strictement inférieure de celle du point B.

b) $S = \frac{1}{2}(\mathbf{AB.AE})$

$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2} =$

$\mathrm{AB} = \sqrt{(\ln b - \ln a)^2 + (b^3 - a^3)^2}$

$\mathrm{AE} = \sqrt{(x_\mathrm{E} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{E} - y_\mathrm{A})^2} =$

$$S = \frac{1}{2}(\mathbf{AB.AE})$$

B. $(E')\ y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2.$

1. $p(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow p'(x) = 2ax + b \Leftrightarrow p'(x) = 2a$

$p \in S_{(\mathrm{E}')} \Leftrightarrow p''(x) - 3p'(x) + 2p(x) = 2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = -x^2 + x + 2$

$2ax^2 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = -x^2 + x + 2$

par identification on aura : $a = \frac{-1}{2}$; $b = -1$ et $c = 0$

2. **On pose** $h(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x.$ $\forall\, x \in \mathrm{IR}$

a) $g \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 0$ or $g(x) = h(x) + \frac{1}{2}x^2 + x$ ce qui donne

$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)'' - 3\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)' + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) = 0$ ou

$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) + x^2 - x - 2 = 0$ ou bien

$$h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = -x^2 + x + 2$$

donc h est solution de (E').

Les solutions de l'équation (E) sont donc $g(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{2x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques donc **les fonctions h solutions de (E') sont de la forme** $h(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$.

b) $h'(x) = \mathrm{A}e^x + 2\mathrm{B}e^{2x} - x - 1$

$h(0) = \mathrm{A} + \mathrm{B} = 2$ et $h'(0) = \mathrm{A} + 2\mathrm{B} - 1 = 1$

$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 2 \\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases}$, $h(x) = 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

3. $\mathbf{H}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2e^x.$

$\mathrm{H}(-3) = -1{,}40$ et $\mathrm{H}(-2) = 0{,}27$ on remarque $-3 < -2 \Leftrightarrow \mathrm{H}(-3) < \mathrm{H}(-2)$ d'où H est continue et strictement croissante sur $]-3;\ -2[$. De plus $\mathrm{H}(-3) \times \mathrm{H}(-2) < 0$ ou $\mathrm{H}(x) = 0 \in\ ]-1{,}40;\ 0{,}27[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\mathrm{H}(x) = 0$ admet une solution unique α avec $\alpha \in\ ]-3;\ -2[$. **Calculer α à 10^{-2} près.**

$\mathrm{H}(-2{,}2) = 1{,}60.10^{-3}$ et $\mathrm{H}(-2{,}3) = -0{,}144$

Or $\mathrm{H}(-2{,}2) \times \mathrm{H}(-2{,}3) < 0$

donc $\alpha = \frac{-2{,}2-2{,}3}{2} = 2{,}25$ à 10^{-2} près.

4. $\mathrm{H}(x) - y = 2e^x > 0$ alors la courbe $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ est au dessus de Γ sur IR.

$\Gamma \cap \Delta \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + 4x) = 0$

$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$.

Ces points sont $\mathrm{O}(0; 0)$ et $\mathrm{C}(-4; -4)$.

5. **Etudier H et construire $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ et Γ**

$\forall\, x \in \mathrm{IR}\ \mathrm{H}'(x) = -x - 1 + 2e^x$

$\forall\, x \in \mathrm{IR}\ \mathrm{H}''(x) = -1 + 2e^x$ or $\mathrm{H}'(-\ln 2) = 0{,}69$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \mathrm{H}'(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-x - 1 + 2e^x] = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathrm{H}'(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(-1 + 2\frac{e^x}{x}\right) - 1\right] = +\infty$

Comme le minimum $\mathrm{H}'(-\ln 2) = 0{,}69 > 0$ alors $\forall\, x \in \mathrm{IR}\ \mathrm{H}'(x) = -x - 1 + 2e^x > 0$ donc H est strictement croissante sur IR.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \mathrm{H}(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[-\frac{1}{2}x^2 - x + 2e^x\right] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[-\frac{1}{2}x^2\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \mathrm{H}(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[-\frac{1}{2}x^2 - x + 2e^x\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[2e^{2x}] = +\infty$

tableau de variation de H.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathbf{H}'(x)$		$+$	
$\mathbf{H}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathrm{T_O}$ $y = \mathrm{H}'(0)(x - 0) + \mathrm{H}(0) = x + 2$

$\mathcal{C}_\mathrm{H}$; $\mathrm{T_O}$ et T voir graphique

6. H est continue et strictement croissante sur IR. Elle réalise une bijection de IR sur IR. Donc H admet une fonction réciproque H^{-1} définie sur IR.
Tracer $\mathcal{C}_{H^{-1}}$ voir graphique.

Problème 180 :

A. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 1 - x^2e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f sur D_f.

2. Etudier le sens de variation de f.

Dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée de α au centième près.

B.

1. On désigne f'' et f' les fonctions dérivées respectives seconde et première de f. Montrer que, pour tout $x \in$ IR, on a
$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1 - 2e^{-x}$.

2. On se propose de déterminer toutes les fonctions φ vérifiant la relation : pour tout $x \in$ IR, $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = 1 - 2e^{-x}$ (1). (Ainsi f est une solution particulière de cette équation différentielle). La fonction φ étant une fonction inconnue, on pose $g = \varphi - f$.

a) Montrer que φ est une solution de l'équation (1) si, et seulement si, g est une solution de l'équation : $g'' + 2g' + g = 0$ (2).

b) Résoudre l'équation différentielle (2). (on trouvera la forme $g(x) = (ax + b)e^{rx}$).

c) En déduire les solutions φ de l'équation différentielle (1).

3. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $\varphi'(0) = 0$?

C. Soit φ_a la fonction définie par : $\varphi_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$ avec $a \in$ IR.

1. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ représentative de φ_a passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées.

2. Montrer que pour tout réel a tel $a \neq -2$, la fonction φ_a admet deux extremums, dont l'un est obtenu pour $x = 0$.

3. Soit M_a le point d'abscisse $(a + 2)$ sur la courbe $\mathcal{C}_{\varphi_a}$.

a) Calculer l'ordonnée de M_a lorsque a varie, le point M_a décrit une courbe Γ. donner une équation cartésienne de Γ.

b) Vérifier que Γ passe par I.

Correction :

A. $f(x) = 1 - x^2e^{-x} = 1 - \frac{x^2}{e^x}$, $D_f =]-\infty; +\infty[$

1. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[1 - x^2e^{-x}] = -e^{+\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[1 - \frac{x^2}{e^x}\right] = 1$.

2. Etudier le sens de variation de f.

$\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = xe^{-x}(x - 2)$,

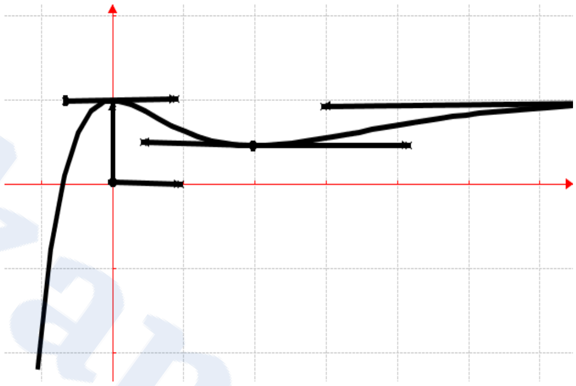
$\forall\, x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc, f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$.

$\forall\, x \in [0; 2]$, $f'(x) \leq 0$ donc, f est décroissante sur $[0; 2]$.

Dresser le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0{,}458$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.



4. $f(-1) = -1{,}72$ et $f(0) = 1$.

f est continue et strictement croissante sur $]-1; 0[$. De plus $\begin{cases} f(-1) \times f(0) < 0 \\ ou\ 0 \in]-1{,}72; 1[\end{cases}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, telle $f(\alpha) = 0$.

valeur approchée de α au centième près :

$\begin{cases} f(-0{,}70) = 1{,}32.10^{-2} \\ f(-0{,}71) = -2{,}53.10^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} f(-0{,}70) \times f(-0{,}71) < 0 \\ -0{,}71 \leq \alpha \leq -0{,}70 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{0{,}7+0{,}71}{-2} = -0{,}70$

B.

1. $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x) \Leftrightarrow f''(x) = e^{-x}(-2 + 4x - x^2)$

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^{-x}(-2 + 4x - x^2 +$ *2x2−4x−x2+1=−2e−x+1=1−2e−x* (vraie) Donc, pour tout $x \in$ IR,

$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1 - 2e^{-x}$.

2. pour tout $x \in$ IR, $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = 1 - 2e^{-x}$ (1).

a) Si $\varphi \in S_{(1)} \Leftrightarrow \varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = 1 - 2e^{-x}$. Or cette hypothèse sera vérifier à partir de : $g = (\varphi - f) \in S_{(2)} \Leftrightarrow (\varphi - f)''(x) + 2(\varphi - f)'(x) + (\varphi - f)(x) = 0$

$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) - [f''(x) + 2f'(x) + f(x)] = 0$

Or $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 1 - 2e^{-x}$ donc $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) = 1 - 2e^{-x}$ ce qui prouve que φ est une solution de l'équation (1).

b) $E_c : r^2 + 2r + 1 = 0$, $\Delta = 4 - 4 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 0$; $r_1 = -1$ les solutions de générale(2) sont de la forme : $g(x) = (\boldsymbol{ax + b})e^{-x}$

c) $g = (\varphi - f) \in S_{(2)} \Leftrightarrow g(x) = (\boldsymbol{ax + b})e^{-x} = \varphi(x) - f(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = g(x) + f(x)$

D'où $\varphi(x) = (\boldsymbol{ax + b - x^2})e^{-x} + 1$

3. $\forall\, x \in \text{IR}$, $\varphi'(x) = [\boldsymbol{x^2 - (a+2)}x + \boldsymbol{a - b}]e^{-x}$

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

C. Soit φ_a la fonction définie par : $\varphi_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1$ avec $a \in$ IR.

1. φ_a est une fonction famille de plusieurs courbe suivant les valeurs de a. De plus φ_a est continue sur IR alors les courbes dérivant de $\mathcal{C}_{\varphi_a}$ peuvent se rencontrer en un point fixe : $\boldsymbol{\varphi_a(x) = \varphi_{a+1}(x) \Leftrightarrow -x^2 + ax + a = -x^2 + (a+1)x + (a+1) \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1}$ **, d'où ce point $\mathbf{I(-1;\ -e+1)}$.**

2. $\forall\, x \in \text{IR}$, $\varphi'(x) = (x^2 - ax - 2x)e^{-x} = (x - a - 2)xe^{-x}$ posons $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a + 2 \end{cases}$

3. **M_a le point d'abscisse $(a+2)$ sur $\mathcal{C}_{\varphi_a}$.**

a) **Calculer l'ordonnée de M_a.**

$\varphi_a(a+2) = [-(a+2)^2 + a(a+2) + a]e^{-a-2} + 1$

$$\varphi_a(a+2) = (-a-4)e^{-a-2} + 1$$

une équation cartésienne de Γ : or $\varphi_a'(a+2) = 0$

$$y = \varphi_a'(a+2)(x - a - 2) + \varphi_a(a+2)$$

$$\begin{cases} x = a + 2 \\ y = 1 - (a+4)e^{-a-2} \end{cases}$$

b) **Γ passe par I.**

<u>Problème 181 :</u> unité graphique 2 cm

1. **Soit u la fonction définie par :**

$\boldsymbol{u(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)}$

a) **Etudier le sens de variation de u sur IR.**

b) **Dresser le tableau de variation de u sur IR.**

c) **Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.**

2. **On considère la fonction f définie par :**

$\boldsymbol{f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)}$

a) **Etudier les limites de f en $+\infty$ *et* $-\infty$.**

b) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR $f'(x) = 2e^{-2x}.u(x)$. En déduire le sens de variation de f sur IR.**

c) **Dresser le tableau de variation de f.**

d) **Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.**

e) **Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et T.**

3. **Soit λ un réel strictement positif.**

a) **Vérifier que pour tout x**

$\boldsymbol{p(x) = \frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}}$.

b) **En déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} p(x)dx$.**

c) **A l'aide d'une intégration par partie, donner la valeur de $J(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)dx$.**

d) **Déterminer la valeur en cm² de $\mathcal{A}(\lambda)$.**

e) **Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ vers $+\infty$.**

4. **On considère (E) l'équation différentielle du premier ordre : $y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$.**

a) **Démontrer que f est une solution de (E).**

b) **Démontrer qu'une fonction φ une fois dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$.**

c) **Résoudre l'équation (F) dans IR.**

d) **En déduire l'ensemble des solutions de (E).**

<u>Correction :</u>

1. $\boldsymbol{u(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)}$

a) $\forall\, x \in$ IR $u'(x) = \frac{e^x(1+2e^x) - 2e^x.e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{2e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x(-1-4e^x)}{(1+2e^x)^2} = -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} < 0$ donc u est décroissante sur IR.

b) **Dresser le tableau de variation de g.**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)\right] = 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	
$u(x)$	0	↘	$-\infty$

c) $\forall\, x \in$ IR $u(x) < 0$.

2. $\boldsymbol{f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)}$

a) Posons $t = \boldsymbol{1 + 2e^x \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{t-1}{2}\right)}$

$f\left(\ln\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) = e^{-2\ln\left(\frac{t-1}{2}\right)}\ln(t) = 4\frac{t}{(-1)^2}.\frac{\ln(t)}{t}$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto +\infty}\left[4\frac{t}{(t-1)^2}.\frac{\ln(t)}{t}\right] = 0$ et

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^{-2x}\ln(1+2e^x)] = +\infty$

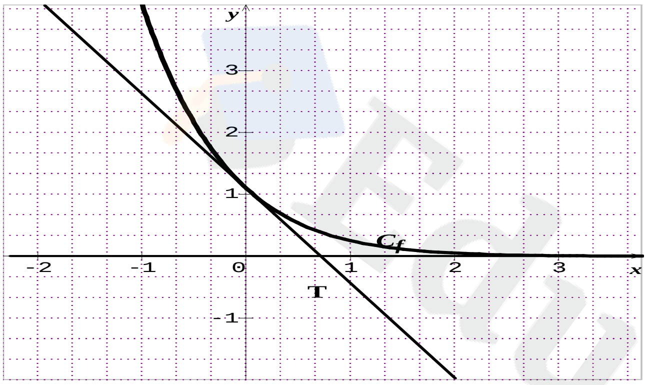
b) $\forall\, x \in \mathrm{IR}\ f'(x) = e^{-2x}.\frac{2e^x}{1+2e^x} - 2e^{-2x}\ln(1+2e^x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)\right] = 2e^{-2x}.u(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur IR.

c) Dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

d) **T** $y = f'(0)(x) + f(0) = 2\left(\frac{1}{3} - \ln 3\right)x + \ln 3$

e) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et T



3. Soit λ un réel strictement positif.

a) $\forall\, x \in \mathrm{IR}\ p(x) = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-x}(e^{-x}+2)-2e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}+2e^{-x}-2e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$.

b) $\mathrm{I}(\lambda) = \int_0^\lambda p(x)dx = \left[e^{-x} + 2\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+2}\right]_0^\lambda$

$\mathrm{I}(\lambda) = [-e^{-x} + 2\ln(e^{-x}+2)]_0^\lambda =$

$\mathrm{I}(\lambda) = -e^{-\lambda} + 2\ln(e^{-\lambda}+2) + 1 - 2\ln 3$.

c) $\mathrm{J}(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx = \int_0^\lambda [e^{-2x}\ln(1+2e^x)]dx$

$\mathrm{J}(\lambda) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+2e^x)\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{e^{-x}}{1+2e^x}dx$

$\mathrm{J}(\lambda) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+2e^x)\right]_0^\lambda + \mathrm{I}(\lambda)$

$\mathrm{J}(\lambda) = -\frac{1}{2}e^{-2\lambda}\ln(1+2e^\lambda) + \frac{1}{2}\ln(3) + \mathrm{I}(\lambda)$

d) $\mathcal{A}(\lambda) = 4\,\mathrm{J}(\lambda)\mathrm{cm}^2$.

e) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathbf{I(\lambda)} = \left[2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1\right]$

$\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathbf{J(\lambda)} = \left[\frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1\right]$

$\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)} = 2\left[\ln(3) + 4\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 2\right]\mathrm{cm}^2$.

4. (E) $\boldsymbol{y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}}$.

a) $f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

$f'(x) = e^{-2x}.\frac{2e^x}{1+2e^x} - 2e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

$f'(x) + 2f(x) = 2e^{-2x}.\frac{e^x}{1+2e^x} - 2e^{-2x}\ln(1+2e^x) + 2e^{-2x}\ln(1+2e^x) = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x}\right]$ donc

$f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-2x}.e^x}{1+2e^x} = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ d'où f est une solution de (E).

b) $(\varphi - f) \in S_{(\mathrm{F})} \Leftrightarrow (\varphi - f)' + 2(\varphi - f) = 0$

$\varphi' + 2\varphi - (f' + 2f) = 0$

or on sait que $f \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow f' + 2f = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ donc

$\varphi' + 2\varphi - 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = 0 \Leftrightarrow \varphi' + 2\varphi = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

Si $\varphi \in S_{(\mathrm{E})} \Leftrightarrow \varphi' + 2\varphi = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ alors φ une fois dérivable sur IR est solution de (E).

c) Résoudre l'équation (F) dans IR.

Les solutions de l'équation (F) sont donc $y(x) = Ae^{-2x}$, où A est constante réelle quelconque

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Les solutions de l'équation (E) sont donc $\varphi(x) = Ae^{-2x} + 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$, où A est constante réelle quelconque

<u>Problème 182 :</u> unité graphique 2 cm.

1. Soit u la fonction définie par $u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

a) Etudier le sens de variation de u.

b) En déduire le signe de $u(x)$.

2. On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; 0],\ h(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} \\ \forall\, x \in]0; +\infty[,\ h(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall\, x < 0$, $\frac{v(x)}{x} = \frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{x} = -\sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}}$. Calculer $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{v(x)}{x}$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur IR.

c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

d) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

e) Tracer la droite (d) et la courbe $\mathcal{C}_h$.

3. Soit f la restriction de h à $\mathrm{I} = [-\ln 2\,;\ 0]$

a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} de I sur J dont on donnera son tableau de variation.

b) **Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est définie $\forall\, x \in J$, $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}\right)$.**

c) **Tracer sa fonction réciproque notée $\mathcal{C}_\Gamma$.**

4. **Soit λ est un réel tel que $0 < \lambda < 1$. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$ est $\mathcal{A}(\lambda) = 2\left[1 - \lambda + \ln(1+\lambda) - \lambda^2 \ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right] cm^2$. (on rappelle $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).**

Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto 0} \mathcal{A}(\lambda)$.

<u>Correction :</u> **unité graphique 2 cm.**

1. $u(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

a) **Etudier le sens de variation de h :**

$\forall\; x > 0$, $u'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$ alors u est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) **le signe de $u(x)$: comme** $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = 0$ alors $\forall\; x > 0, u(x) > 0$.

2. $\begin{cases} \forall\, x \in\,]-\infty; 0], h(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} \\ \forall\, x \in\,]0;\; +\infty[, h(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

a) $\forall\, x < 0$, $\frac{v(x)}{x} = \frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{x} = -\sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}}$.

Comme $x < 0$, on peut écrire $\frac{v(x)}{x} = -\sqrt{-\frac{e^x(e^x-1)}{x^2}} = -\sqrt{-\frac{e^{2x}-e^x}{x^2}} = -\frac{1}{-x}\sqrt{e^x - e^{2x}} = \frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{x}$.

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{v(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[-\sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x-1}{x}}\right] = -\sqrt{+\infty} = -\infty$.

b) **continuité et la dérivabilité de h sur IR :**

Continuité de h en 0 :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[x\ln(x+1) - x\ln x] = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\sqrt{e^x - e^{2x}}\right] = 0$ alors h est continue en 0. Par conséquent h est continue sur IR.

Dérivabilité de h en 0 :

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{x}\right] = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[-\sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x-1}{x}}\right] = -\infty$ et

$\lim\limits_{\mapsto 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\ln 0^+ = +\infty$ alors h n'est pas dérivable en h. Par conséquent h est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{t \mapsto 0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1$ en posant $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto +\infty \\ t \mapsto 0 \end{cases}$ d'où la droite (d) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

d) **variations de h et dresser son tableau de variation :**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\sqrt{e^x - e^{2x}}\right] = 0$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

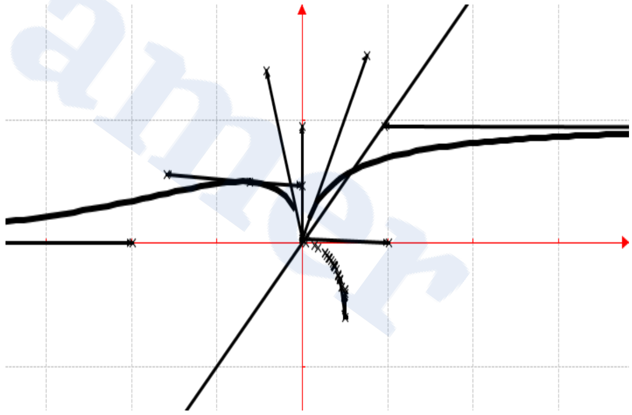
$\forall\; x \in\,]-\infty; 0[$, $h'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x}}{2\sqrt{e^x - e^{2x}}} = \frac{e^x(1-2e^x)}{2\sqrt{e^x - e^{2x}}}$, son signe dépend de celui de $1 - 2e^x$, posons $1 - 2e^x = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in\,]-\infty; -\ln 2], h'(x) > 0 \\ \forall\, x \in\,]-\ln 2\,; 0[, h'(x) < 0 \end{cases}$.

$h(-\ln 2) = 0{,}707$.

$\forall\, x \in\,]0; +\infty[$, $h'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = u(x) > 0$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$		0		$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$0{,}707$	↘	0	↗	$+\infty$

e) **Tracer la droite (d) et la courbe $\mathcal{C}_h$ en trait continue et $\mathcal{C}_\Gamma$ en trait discontinue :**



3. **Soit f la restriction de h à $I = [-\ln 2\,;\; 0]$**

a) f est continue et strictement décroissante sur **$I = [-\ln 2\,;\; 0]$. Sa bijection réciproque f^{-1} à $I = [-\ln 2\,;\; 0]$** est une bijection réciproque f^{-1} de $= [-\ln 2\,;\; 0]$ sur un intervalle $J = \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$(f^{-1})'(x)$		$-$	
$f^{-1}(x)$	0	↘	$-\ln 2$

b) $y=\sqrt{e^{x}-e^{2x}} \Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}+y^{2}=0$, y est un paramètre. $\Delta = 1-4y^{2} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x}=\frac{1-\sqrt{1-4x^{2}}}{2} & (1) \\ e^{x}=\frac{1+\sqrt{1-4x^{2}}}{2} & (2) \end{cases}$,

celle la 2è équation nous intéresse, d'où $e^{x}=\frac{1+\sqrt{1-4x^{2}}}{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4y^{2}}}{2}\right)$.

$\forall\, x \in \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4x^{2}}}{2}\right)$.

c) Voir le graphique où $\mathcal{C}_{\Gamma}$ est en trait discontinue.

4. Soit λ est un réel tel que $0<\lambda<1$.

$\mathcal{A}(\lambda)=4\int_{\lambda}^{1}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]dx\,.\,cm^{2}=\left(\left[2x^{2}\ln\left(1+\right.\right.\right.$
*1xλ1+2λ*1*xx+1dx.cm2=2x2*ln*1+1xλ1+2λ*1*1−1x+1dx.cm2=2x2*ln*1+1x+x*−ln*1+xλ1.cm2=21−λ+*ln*1+λ−λ2*ln*1+1λcm2.*

$\lim\limits_{\lambda\mapsto 0}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\mapsto 0}2\left[1-\lambda+\ln(1+\lambda)-\lambda^{2}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right]=2-2\lambda$.

__Problème 183 :__ **unité graphique 2 cm.**

1. Soit u la fonction définie par $u(x)=1-xe^{-x}$.

a) Etudier le sens de variation de u sur IR.

b) En déduire le signe de $u(x)$.

2. On considère la fonction h définie par :

$\begin{cases} \forall\, x\in\,]-\infty;-1[,\ h(x)=-4\frac{\ln(-x)}{x} \\ \forall\, x\in[-1;\ +\infty[,\ h(x)=(x+1)(e^{-x}+1) \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de h sur IR.

b) Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptote à $\mathcal{C}_{h}$.

c) Montrer que la droite (d) d'équation $y=x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_{h}$ en $+\infty$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_{h}$ et (d) sur $[-1;\ +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

3.

a) Montrer qu'il existe un unique point d'abscisse supérieure à -1 où la tangente T à $\mathcal{C}_{h}$ est parallèle à la droite (d).

b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_{h}$ est au dessus de l'axe des abscisses.

c) Tracer la droite (d), la tangente T et $\mathcal{C}_{h}$.

4. Soit f la restriction de h à $[-1;\ +\infty[$

a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on donnera son tableau de variation.

b) Tracer sa fonction réciproque notée $\mathcal{C}_{\Gamma}$.

5. Soit λ est un réel supérieur à -1.

a) Calculer les intégrales suivantes $\mathrm{I}=\int_{-e}^{-1}\frac{\ln(-x)}{x}dx$ et $\mathrm{J}(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda}[(x+1)e^{-x}]dx$.

b) En déduire en cm^{2} l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_{h}$, la droite (d) et les droites d'équations $x=-e$, $x=\lambda$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

__Correction :__ **unité graphique 2 cm.**

1. $u(x)=1-xe^{-x}$

a) Etudier le sens de variation de h :

$\forall\ x\in\,]-\infty;+\infty[$, $u'(x)=(x-1)e^{-x}$

$\forall\ x\in\,]-\infty;1[$, $u'(x)<0$ **alors** u est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$.

$\forall\ x\in[1;+\infty[$, $u'(x)>0$ **alors** u est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $u(x)$: Comme le minimum $u(1)=1-e^{-1}=0{,}632>0$ alors $\forall\ x\in\,]-\infty;+\infty[$, $u(x)>0$.

2. $\begin{cases} \forall\, x\in\,]-\infty;-1[,\ h(x)=-4\frac{\ln(-x)}{x} \\ \forall\, x\in[-1;\ +\infty[,\ h(x)=(x+1)(e^{-x}+1) \end{cases}$

a) continuité et la dérivabilité de h sur IR :

Continuité de h en -1 :

$\lim\limits_{x\mapsto-1^{+}}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-1^{+}}[(x+1)(e^{-x}+1)]=0$ et

$\lim\limits_{x\mapsto-1^{-}}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-1^{-}}\left[-4\frac{\ln(-x)}{x}\right]=0$ alors h est continue en -1. Par conséquent h est continue sur IR.

Dérivabilité de h en -1 : posons $t=x+1 \Leftrightarrow x=t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\longmapsto-1 \\ t\longmapsto 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\mapsto-1^{-}}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\mapsto-1^{-}}\left[-4\frac{\ln(-x)}{x(x+1)}\right]=$

$\lim\limits_{t\mapsto 0}\left[4\frac{\ln(-t+1)}{-t}\times\frac{1}{1-t}\right]=4$ donc **h est dérivable à gauche de** -1 et

$\lim\limits_{x\mapsto-1^{+}}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\mapsto-1^{+}}[(e^{-x}+1)]=e+1$ donc **h est dérivable à droite de -1. Comme** $h'_{g}(-1)\neq h'_{d}(-1)$ donc h n'est pas dérivable en -1. Par conséquent h est dérivable sur $]-\infty;-1[$ **et** $]-1;+\infty[$.

b) $\mathrm{D}_{h}=\,]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\mathbf{4}\frac{\ln(-x)}{-x}\right] = 0$ alors $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\boldsymbol{x}] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right] = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$. $\forall\, x \in [-1;\, +\infty[$, $h(x) - y = \frac{x+1}{e^x} \geq 0$, alors $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de (d).

d) Dresser le tableau de variation de h.

$\forall\, x \in\,]-\infty; -\mathbf{1}[$, $h'(x) = -\mathbf{4}\frac{1-\ln(-x)}{x^2} = \mathbf{4}\frac{\ln(-x)-1}{x^2}$, son signe dépend de celui de $\ln(-x) - 1$, posons $\ln(-x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -e \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \forall\, x \in\,]-\infty; -\boldsymbol{e}],\, h'(x) > 0 \\ \forall\, x \in\,]-\boldsymbol{e}; -\mathbf{1}[,\, h'(x) < 0 \end{cases}$. $h(-e) = 1{,}47$.

$\forall\, x \in\,]-\mathbf{1}; +\infty[$, $h'(x) = \mathbf{1} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$.

x	$-\infty$	$-e$		-1		$+\infty$
$h'(x)$	+		−		+	
$h(x)$	$-\infty \nearrow$	1,47	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

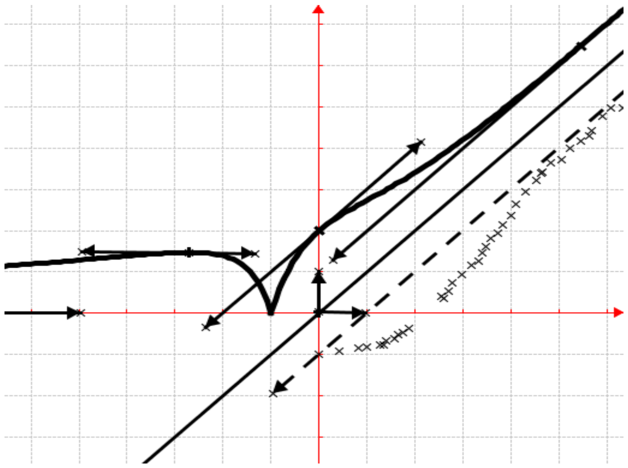
3.

a) Montrer qu'il existe un unique point d'abscisse supérieure à $-\mathbf{1}$ où la tangente T à $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ est parallèle à la droite (d) : $h'(x) = 1 - xe^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$, ce point a pour coordonnée $(0; 2)$.

b) Montrer que la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ est au dessus de l'axe des abscisses.

On la remarque dans le tableau de variation : $\forall\;\, x \in\,]-\infty; +\infty[$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$, d'où la courbe $\mathcal{C}_h$ est au dessus de l'axe des abscisses.

c) Tracer la droite (d), la tangente T et la courbe $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ en trait continue et $\boldsymbol{\mathcal{C}_\Gamma}$ en trait discontinue :



4. Soit f la restriction de h à $[-\mathbf{1};\, +\infty[$

a) f est continue et strictement croissante sur $[-\mathbf{1};\, +\infty[$. **Sa bijection réciproque $\boldsymbol{f^{-1}}$ à** $[-1;\, +\infty[$ est une bijection réciproque f^{-1} de $[-1;\, +\infty[$ sur un intervalle $\mathrm{J} = [0;\, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	+	
$f^{-1}(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

b) Voir le graphique où $\mathcal{C}_\Gamma$ est en discontinue.

5. Soit λ est un réel supérieur à -1.

a) $\mathrm{I} = \int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2}[\ln(-x)]^2\right]_{-\mathrm{e}}^{-1} = -\frac{1}{2}$ et $\mathrm{J}(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda}[(x+1)e^{-x}]dx = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\lambda} + \int_{-1}^{\lambda}[e^{-x}]dx = [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{\lambda} = -(\lambda+2)e^{-\lambda} + e$.

b) l'aire $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{-\mathrm{e}}^{\lambda} h(x)dx \times 4cm^2 = \int_{-\mathrm{e}}^{-1} h(x)dx \times 4cm^2 + \int_{-1}^{\lambda}[h(x) - y]dx \times 4cm^2 = [-4\mathrm{I} + \mathrm{J}(\lambda)] \times 4cm^2 = \left(8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda}\right)cm^2$.

c) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[8 + 4e - 4(\lambda+2)e^{-\lambda}\right] = (8 + 4e)cm^2$.

<u>Problème 184 :</u> unité graphique 3 cm.

1. Soit $\boldsymbol{u}$ la fonction définie par $\boldsymbol{u(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}}$.

a) Etudier les variations de $\boldsymbol{u}$ sur IR.

b) Déduire de ce qui précède l'existence et unicité d'un nombre réel $\boldsymbol{\alpha} > 0$ tel quel $\boldsymbol{u(\alpha) = 0}$. Montrer que $\boldsymbol{\alpha}$ dans l'intervalle $]\mathbf{0,4}\;;\mathbf{0,5}[$.

c) En déduire le signe de $\boldsymbol{u(x)}$ sur $[0; +\infty[$.

2. On considère la fonction $\boldsymbol{h}$ définie par :

$\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\,]-\infty; \mathbf{0}[,\, \boldsymbol{h(x) = \ln(x^2+1)} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in [0; +\infty[,\, \boldsymbol{h(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}} \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de $\boldsymbol{h}$ sur IR. Interpréter graphiquement ces résultats. En déduire les équations des demi-tangentes au point d'abscisse 0: T_{0^+} et T_{0^-}.

b) Calculer les limites de $\boldsymbol{h}$ aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptote à $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$.

c) Etudier le sens de variation de $\boldsymbol{h}$.

d) Montrer que $\boldsymbol{h(\alpha) = \alpha^2 + 6\alpha - 3}$. En déduire une valeur approchée de $\boldsymbol{h(\alpha)}$ à $\mathbf{10^{-3}}$.

e) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{h}$.

f) Montrer que l'équation $\boldsymbol{h(x) = 0}$ admet une solution unique $\boldsymbol{\beta}$ dans l'intervalle $[\boldsymbol{\alpha}; +\infty[$. En déduire le signe de $\boldsymbol{h(x)}$.

3.

a) Déterminer la tangente T à $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ au point d'abscisse -3. Préciser la position relative de T par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ sur $]-\infty; \mathbf{0}[$.

b) On note la parabole (P) d'équation $\boldsymbol{y = x^2 - 3}$. Déterminer le signe de $\boldsymbol{h(x) - y}$. Préciser la

position relative de (P) par rapport à $\mathcal{C}_h$ sur $[0;+\infty[$.

c) **Tracer la parabole (P), la tangente T et $\mathcal{C}_h$.**

4. **Soit f la restriction de h à $]-\infty;0[$.**

a) **Montrer que f est une bijection de $]-\infty;0[$ dans $]0;+\infty[$.**

b) **Déterminer, pout tout x de $]0;+\infty[$, l'expression de f^{-1}.**

c) **Tracer sa fonction réciproque notée $\mathcal{C}_\Gamma$.**

6. **Soit λ est un réel supérieur à 1.**

a) **Calculer cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, la parabole (P) et les droites d'équations $x=0$, $x=\lambda$.**

b) **Interpréter graphiquement ce résultat et donner $\lim\limits_{\lambda\mapsto+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.**

<u>Correction :</u> unité graphique 3 cm.

1. $u(x)=2x-e^{-\frac{1}{3}x}=x\left(2-\frac{1}{xe^{\frac{1}{3}x}}\right)$

a) **Etudier les variations de u sur IR**

$\forall\ x\in]-\infty;+\infty[$, $u'(x)=2+e^{-\frac{1}{3}x}>0$ **alors** u est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}u(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}u(x)=+\infty$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

b) Comme u est continue et strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$ alors il existe un nombre réel $\alpha>0$ unique tel quel $u(\alpha)=0$.

Montrer que α dans l'intervalle $]0,4\,;0,5[$.

$u(0{,}4)=-7{,}51.10^{-2}$ et $u(0{,}5)=0{,}1535$.

$u(0{,}4)\times u(0{,}5)<0$, d'où $\alpha\in]0{,}4\,;0{,}5[$.

c) **En déduire le signe de $u(x)$ sur $[0;+\infty[$:**

$\forall\ x\in[0;\alpha]$, $u(x)\leq 0$

$\forall\ x\in[\alpha;+\infty[$, $u(x)\geq 0$.

2. $\begin{cases}\forall\,x\in]-\infty;0[,\ h(x)=\ln(x^2+1)\\ \forall\,x\in[0;+\infty[,\ h(x)=x^2-3+3e^{-\frac{1}{3}x}\end{cases}$

a) **continuité et la dérivabilité de h sur IR**

Continuité de h en 0 :

$\lim\limits_{x\mapsto0^+}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto0^+}\left[x^2-3+3e^{-\frac{1}{3}x}\right]=0$ **h est continue à gauche de 0** et $\lim\limits_{x\mapsto0^-}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto0^-}[\ln(x^2+1)]=0$

donc **h est continue à droite de 0.** D'où h est continue en 0. Par conséquent h est continue sur IR.

Dérivabilité de h en 0 :

$\lim\limits_{x\mapsto0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto0^-}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x}\times\frac{x}{x}\right]=$

$\lim\limits_{x\mapsto0^-}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\times x\right]=0$, donc **$h$ est dérivable à gauche de 0** et

$\lim\limits_{x\mapsto0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\mapsto0^+}\left[x+3\frac{e^{-\frac{1}{3}x}-1}{-\frac{1}{3}x}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=-1$ donc

h est dérivable à droite de 0**. Comme** $h'_g(0)\neq h'_d(0)$ donc h n'est pas dérivable en 0. Par conséquent h est dérivable sur $]-\infty;0[$ **et sur** $]0;+\infty[$.

Au point d'abscisse 0 est un point anguleux et $\mathcal{C}_h$ admet à ce point deux demi-tangentes dont leurs équations sont : T_{0^-} : $y=0$ et T_{0^+} : $y=-x$.

b) $D_h=]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[\ln(x^2+1)]=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[-2\frac{\ln(x)}{-x}\right]=0$,

alors $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Ox) et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x^2-3+3e^{-\frac{1}{3}x}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[x-\frac{3}{x}-\frac{1}{xe^{\frac{1}{3}x}}\right]=+\infty$, alors $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

c) **sens de variation de h :**

$\forall\,x\in]-\infty;0[$, $h'(x)=\frac{2x}{x^2+1}<0$, alors h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\forall\,x\in]0;+\infty[$, $h'(x)=2x-e^{-\frac{1}{3}x}=u(x)$, son signe dépend de celui de $u(x)$.

$\forall\ x\in[0;\alpha]$, $u(x)=h'(x)\leq 0$ alors h est décroissante sur $[0;\alpha]$

$\forall\ x\in[\alpha;\ +\infty[$, $u(x)=h'(x)\geq 0$, alors h est croissante sur $[\alpha;\ +\infty[$.

d) **Montrer que $h(\alpha)=\ \alpha^2+6\alpha-3$. En déduire une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-3}.**

$u(\alpha)=2\alpha-e^{-\frac{1}{3}\alpha}=0\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{3}\alpha}=2\alpha$ et d'autre part

$h(\alpha)=\ \alpha^2-3+3e^{-\frac{1}{3}\alpha}=\alpha^2-3+3(2\alpha)=\alpha^2+6\alpha-3$

$0{,}4<\alpha<0{,}5\Leftrightarrow\begin{cases}-2{,}84<\alpha^2-3<-2{,}75\\ 2{,}4<6\alpha<3\end{cases}$ en additionnant membre à membre on aura : $-0{,}44<\alpha^2-3+6\alpha<0{,}25\Leftrightarrow-0{,}44<h(\alpha)<0{,}25$.

$h(\alpha)$ à 10^{-3} : $\alpha=\frac{-0{,}44+0{,}25}{2}=-0{,}095$.

e) Dresser le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\mathbf{-0,095}$	$\nearrow$	$+\infty$

f) h est continue et strictement croissante sur $[\alpha;\ +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[\alpha;\ +\infty[$ sur $[\mathbf{-0,095};\ +\infty[$. Or $0 \in [\mathbf{-0,095};\ +\infty[$. D'après le théorème de gendarme l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

En déduire le signe de $h(x)$:

$\forall\ x \in]-\infty; 0] \cup [\beta;\ +\infty[$, $\boldsymbol{h(x) \geq 0}$

$\forall\ x \in [0;\ \beta]$, $\boldsymbol{h(x) \leq 0}$

3.

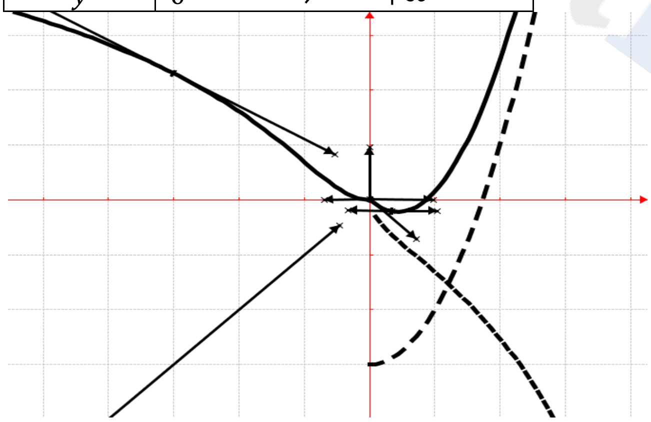
d) $\begin{cases} h(-3) = \ln 10 \\ h'(-3) = -\frac{3}{5} \end{cases}$ T : $y = -\frac{3}{5}x + \ln 10 - \frac{9}{5}$; de ce qui précède (branche parabolique -(0x)) T est au-dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $]-\infty; 0[$.

e) $h(x) - y = 3e^{-\frac{1}{3}x} > 0$, la parabole (P) est au-dessous de $\mathcal{C}_h$ sur $[0; +\infty[$.

f) Tracer la parabole (P), la tangente T et $\mathcal{C}_h$:

$\forall\ x \in [0; +\infty[$, $\boldsymbol{y = x^2 - 3 \Leftrightarrow y' = 2x \geq 0}$

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$



4. f la restriction de h à $]-\infty; 0[$.

a) h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; \mathbf{0}[$. Elle réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ dans $]0; +\infty[$.

b) $\ln(x^2 + 1) = y \Leftrightarrow x = \mp\sqrt{e^y - 1}$

pout tout x de $]0; +\infty[$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{e^x - 1}$.

c) Voir le graphique $\mathcal{C}_\Gamma$.

7. Soit λ est un réel supérieur à 1.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda [h(x) - y]dx \times 9cm^2 =$

$\int_0^\lambda \left[3e^{-\frac{1}{3}x}\right] dx \times 9cm^2 = \left[-9e^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^\lambda \times 9cm^2 =$

$\mathcal{A}(\lambda) = 81\left(1 - e^{-\frac{1}{3}\lambda}\right) cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \left[81\left(1 - e^{-\frac{1}{3}\lambda}\right)\right] = 81\ cm^2$.

<u>Problème 185 :</u> unité graphique 2 cm.

1. Soit u la fonction définie par $u(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$.

a) Etudier le sens de variation de u sur IR.

b) En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.

2. On considère la fonction h définie par : $h(x) = x\left(e^{2-x} + 1\right)$

a) Calculer les limites de h sur IR et préciser la branche infinie à $\mathcal{C}_h$ à $-\infty$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_h$ et (d) sur $[0;\ +\infty[$.

c) Etudier les variations et dresser le tableau de variation de h sur IR.

d) Etudier la position $\mathcal{C}_h$ par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 2.

3. Tracer la droite (d), la tangente T et $\mathcal{C}_h$.

4. Soit f la restriction de h à IR.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur IR.

b) f^{-1} est-elle dérivable en 4?

c) Tracer la fonction réciproque notée $\mathcal{C}_\Gamma$ et T[2]

5. Soit λ est un réel strictement positif.

a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_h$, la droite (d) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

<u>Correction :</u> unité graphique 2 cm.

1. $u(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$.

a) Etudier le sens de variation de u sur IR.

$\forall\ x \in$ IR, $\boldsymbol{u'(x) = (-2 + x)e^{2-x}}$

$\forall\ x \in]-\infty; 2]$, $\boldsymbol{u'(x) \leq 0}$ **alors** u est décroissante sur $]-\infty; 2]$. Et $\forall\ x \in [2;\ +\infty[$, $\boldsymbol{u'(x) \leq 0}$ **alors** u est croissante sur $[2;\ +\infty[$

b) Comme le minimum $u(2) = 0$ alors $\forall\ x \in]-\infty; +\infty[$, $u(x) > 0$.

2. $h(x) = x\left(e^{2-x} + 1\right)$

a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\boldsymbol{xe^{2-x}}\right] = -\infty$ on déduit $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\boldsymbol{e^{2-x}}\right] = +\infty$, alors $\mathcal{C}_h$ admet une branche parabolique de direction (Oy) et

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x} + \boldsymbol{x}\right] = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}[h(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.

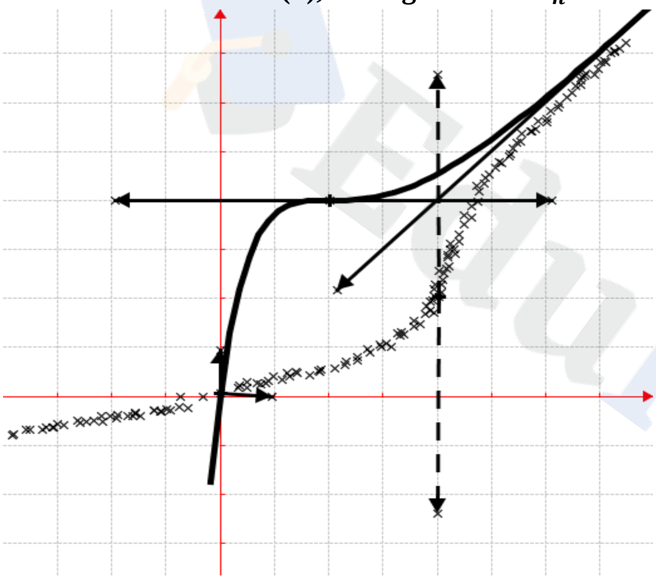
$\forall\ x \in [0; +\infty[$,, $h(x) - y = \frac{x}{e^x} \geq \mathbf{0}$, donc $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de la droite (d) sur $[0;\ +\infty[$.

c) $\forall\, x \in]-\infty; +\infty[$, $h'(x) = \mathbf{1} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}-\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) > 0$ alors h est strictement croissante sur IR.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

d) $\begin{cases} h(2) = 4 \\ h'(2) = 0 \end{cases}$ T : $y = 4$.

3. Tracer la droite (d), la tangente T et $\mathcal{C}_h$.



4. Soit f la restriction de h à IR.

a) f est continue et strictement croissante sur IR. Elle réalise une bijection de IR sur IR.

b) **f^{-1} est-elle dérivable en 4?** $f(2) = 4$

$\lim\limits_{x \mapsto 4} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(4)}{x-4} = \lim\limits_{y \mapsto 2} \frac{y-2}{f(y)-f(2)} = \frac{1}{f'(2)} = +\infty$ donc

f^{-1} n'est pas dérivable en 4.

c) **Voir graphique $\mathcal{C}_\Gamma$.**

6. $\lambda > 0$.

a) $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda [h(x) - y]dx \times 4cm^2 = \int_0^\lambda [\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}-\boldsymbol{x}}]dx \times 4cm^2 = [(-\mathbf{1} - \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}-\boldsymbol{x}}]_0^\lambda \times 4cm^2 = 4[\boldsymbol{e}^\mathbf{2} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}-\boldsymbol{\lambda}}]cm^2$.

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[4[\boldsymbol{e}^\mathbf{2} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}-\boldsymbol{\lambda}}]\right] = \mathbf{4}\boldsymbol{e}^\mathbf{2}$.

<u>Problème 186 :</u> unité graphique 2 cm.

A. **Soit $h_{a,b}$ la fonction définie par :**

$h_{a,b}(x) = \frac{e^{2x} + ae^x + b}{e^x - 1}$ **avec** $(a, b) \in$ **IR***.

1. **Quel est l'ensemble de définition de $h_{a,b}$?**
2. **Trouver les nombres réels a et b pour que la représentation graphique de $h_{a,b}$ passe par le point A$(\ln 2\,;2)$ et admette en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.**

B. **On considère la fonction h définie par :**

$h(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 2}{e^x - 1}$.

1.

a) **Déterminer les limites de h sur D_h.**

b) **Montrer que $\forall\, x \in D_h$, $h(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.**

c) **Montrer que $\forall\, x \in D_h$, $h(x) = e^x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$.**

d) **Dresser le tableau de variation h sur D_h.**

2. **Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\ln 4$.**

3. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et la tangente T.**

4. **Soit f la restriction de h à IR.**

a) **Montrer que f à $[\ln 3\,;\ \ln 6]$ est une bijection de $[\ln 3\,;\ \ln 6]$ sur un ensemble à préciser.**

b) **Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{10}{3}\right)$. Tracer la fonction réciproque notée $\mathcal{C}_\Gamma$.**

5. **Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points M$(x; y)$ tels que : $\begin{cases} \ln 2 \leq x \leq \ln 6 \\ 0 \leq y \leq h(x) \end{cases}$.**

<u>Correction :</u>

A. $h_{a,b}(x) = \frac{e^{2x} + ae^x + b}{e^x - 1}$ **avec** $(a, b) \in$ **IR***.

1. $D_{h_{a,b}} = \{x / x \in, e^x - 1 \neq 0\} = \text{IR} - \{0\}$.

2. $\forall\, x \neq 0$

$h_{a,b}'(x) = \frac{(2e^{2x} + ae^x)(e^x - 1) - e^x(e^{2x} + ae^x + b)}{(e^x - 1)^2}$

$h_{a,b}'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 2e^x - a - b)}{(e^x - 1)^2}$.

$\begin{cases} h_{a,b}(\ln 2) = 2 \\ h_{a,b}'(\ln 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$.

B. $h(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 2}{e^x - 1}$.

1.

a) **Déterminer les limites de h sur D_h.**

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}\left[\frac{e^{2x} - 2e^x + 2}{e^x - 1}\right] = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}\left[\frac{e^{2x} - 2e^x + 2}{e^x - 1}\right] = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1}\right] = -2$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^{2x}}{e^{x}} = e^{x}\right] = +\infty$

b) $\forall\, x \neq 0\ \ h(x) = e^{x} - 1 + \frac{1}{e^{x}-1} = \frac{e^{2x}-e^{x}-e^{x}+1+1}{e^{x}-1} = \frac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1} = h(x).$

c) $\forall\, x \neq 0\ \ h(x) = e^{x} - 2 + \frac{e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{e^{2x}-2e^{x}-e^{x}+2+e^{x}}{e^{x}-1} = \frac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1} = h(x).$

d) **Dresser le tableau de variation h sur D_h.**

$\forall\, x \neq 0\ \ h'(x) = e^{x} - \frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^2} = \frac{e^{2x}(e^{x}-2)}{(e^{x}-1)^2}$

$\forall\, x < \ln 2\ \ h'(x) < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$

$\forall\, x > \ln 2\ \ h'(x) > 0$ alors h est strictement croissante sur $]\ln 2\,; +\infty[$

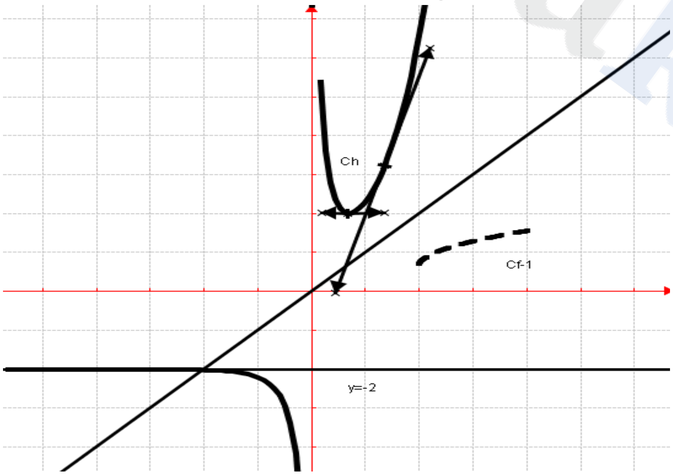
x	$-\infty$		$\mathbf{0}$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	||	$-$		$+$	
$h(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3. T à $\mathcal{C}_h$ $y = h'(\ln 4)(x - \ln 4) + h(\ln 4)$.

$h(\ln 4) = \frac{10}{3}$ et $\boldsymbol{h}'(\ln 4) = \frac{32}{9}$

T à $\mathcal{C}_h$ $y = \frac{32}{9}x - \frac{32}{9}\ln 4 + \frac{10}{3}$

4. **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$ et la tangente T.**



5. **Soit f la restriction de h à IR.**

a) f est continue et strictement croissante sur $[\ln 3\,;\ \ln 6]$. Elle admet une bijection de $[\ln 3\,;\ \ln 6]$ sur $\left[\frac{5}{2};\ 4\right]$.

b) **Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.**

On sait que $\begin{cases} f(\ln 4) = h(\ln 4) = \frac{10}{3} \\ \boldsymbol{f}'(\ln 4) = \boldsymbol{h}'(\ln 4) = \frac{32}{9} \end{cases}$

$(f^{-1})'\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(\frac{10}{3}\right)\right]} = \frac{1}{f'(\ln 4)} = \frac{9}{32}.$

$\mathcal{C}_\Gamma$ voir graphique.

6. $\forall\, x \neq 0\ \ h(x) = e^{x} - 2 + \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$ a pour primitive

$\forall\, x \neq 0\ \ \mathrm{H}(x) = e^{x} - 2x + \ln|e^{x} - 1| + k$

$\mathrm{U} = \int_{\ln 2}^{\ln 6} h(x)dx = [\mathrm{H}(x)]_{\ln 2}^{\ln 6} = 4 - \ln\left(\frac{5}{9}\right)$

$\mathcal{A} = 4\mathrm{U}cm^2 = 4\left[4 - \ln\left(\frac{5}{9}\right)\right] cm^2.$

<u>Problème 187 :</u> unité graphique 2 cm.

1. **Soit u la fonction définie par $u(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$.**

a) **Calculer $u'(x)$, étudier son signe et en déduire le sens de variations de la fonction u.**

b) **Calculer $u(0)$. En déduire le signe de $u(x)$.**

2. **On considère la fonction h définie par $h(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$.**

a) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR $h(x) = \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$.**

b) **Calculer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptote à $\mathcal{C}_h$.**

c) **Montrer que $\forall\, x \in$ IR $h'(x) = u(e^{x}).e^{-x}$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.**

d) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**

<u>Correction :</u> unité graphique 2 cm.

1. $u(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$.

a) $\forall\ x > -1\ u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2}$

$\forall\ x \in]-1; 0]$, $u'(x) \geq 0$ **alors** u est croissante sur $]-1; 0]$. Et $\forall\ x \in [0; +\infty[$ $u(x) \leq 0$ **alors** u est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b) $u'(0) = 0.$ $\forall\ x \in]-1; +\infty[$, $u(x) < 0$.

2. $h(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$.

a) $\forall\, x \in$ IR $h(x) = e^{-x}\ln[(1 + e^{-x})e^{x}] = e^{-x}\ln(e^{x}) + e^{-x}\ln(1 + e^{-x}) = h(x) = \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}\right] =$ posons $t = e^{x}$ **alors**

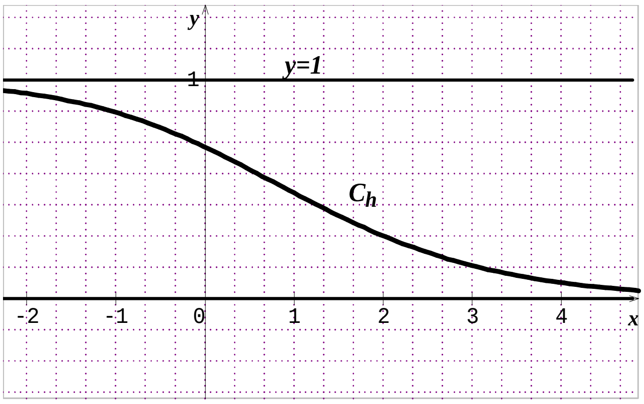
$\begin{cases} x \mapsto -\infty \\ t \mapsto 0 \end{cases}$, **donc** $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim\limits_{t \mapsto 0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right] = 1$ d'où $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})\right] = 0$ d'où $\mathcal{C}_h$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

c) $\forall\, x \in$ IR $h'(x) = -e^{-x}\ln(1 + e^{x}) + e^{-x}\frac{e^{x}}{1+e^{x}} = e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1 + e^{x})\right) = u(e^{x}).e^{-x}$

son signe dépend de $u(e^{x})$. Or la fonction exponentielle est strictement positive sur IR et pour tout $x > 0$, $u(x) < 0$ donc $u(e^{x}) < 0$ donc $h'(x) < 0$ **alors** h est strictement décroissante sur IR.

d) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.**



Problème 188 : On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = |x-n|e^{\frac{x+1}{x-n}}$ avec $n \in IN$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f_n ? en déduire les écritures de f_n sans le symbole de la valeur absolue.
2. Montrer que f_n admet un prolongement par continuité à gauche de n. Déterminer les autres limites de f_n sur D_{f_n}.
3. sens de variation de f_n :

a) Montrer que $\forall\, x < n,\ f_n'(x) = \frac{-x+2n+1}{x-n} e^{\frac{x+1}{x-n}}$. En déduire son sens de variation.

b) Montrer que $\forall\, x > n,\ f_n'(x) = \frac{x-2n-1}{x-n} e^{\frac{x+1}{x-n}}$. En déduire son sens de variation.

c) Dresser le tableau de variation de f_n.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$.

Correction : $f_n(x) = |x-n|e^{\frac{x+1}{x-n}}$ avec $n \in IN$.

1. $D_h = \{x/x \in IR, x-n \neq 0 -\} =]-\infty; n[\cup]n; +\infty[$.

écritures de f_n sans le symbole sans valeur absolue

$\forall\ x \in]-\infty; n[,\ f_n(x) = (-x+n)e^{\frac{x+1}{x-n}}$

$\forall\ x \in]n; +\infty[,\ f_n(x) = (x-n)e^{\frac{x+1}{x-n}}$

2. **limites de f_n sur D_{f_n} :**

$\lim\limits_{x\mapsto n^-} f_n(x) = \lim\limits_{x\mapsto n^-}\left[0e^{\frac{n+1}{0^-}}\right] = \lim\limits_{x\mapsto n^-}[0e^{-\infty}] = 0$ donc f_n admet un prolongement par continuité à gauche de n.

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\mapsto -\infty}[-xe^1] = +\infty$;

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\mapsto +\infty}[xe^1] = +\infty$;

et $\lim\limits_{x\mapsto n^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\mapsto n^+}\left[0e^{\frac{n+1}{0^+}}\right] = \lim\limits_{x\mapsto n^+}[0e^{+\infty}] = \text{FI}$;

Posons $t = \frac{x+1}{x-n} \Leftrightarrow x = \frac{nt+1}{t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \mapsto n^+ \\ t \mapsto +\infty \end{cases}$

$\forall\ x \in]n; +\infty[,\ f_n\left(\frac{nt+1}{t-1}\right) = \frac{n+1}{t-n}e^t$

$\lim\limits_{x\mapsto n^+} f_n(x) = \lim\limits_{t\mapsto +\infty}\left[\frac{n+1}{t-n}e^t\right] = \lim\limits_{t\mapsto +\infty}\left[\frac{e^t}{t}\right] = +\infty$.

3. **Etudier le sens de variation de f_n.**

a) $\forall\, x < n,\ f_n'(x) = -e^{\frac{x+1}{x-n}} - \frac{-n-1}{(x-n)^2} \times (x-n)e^{\frac{x+1}{x-n}} = e^{\frac{x+1}{x-n}}\left(-1 - \frac{-n-1}{x-n}\right) = \frac{-x+2n+1}{x-n}e^{\frac{x+1}{x-n}}$,

posons $-x+2n+1 = 0 \Leftrightarrow x = 2n+1$

x	$-\infty$ $\qquad$ n	$2n+1$	$+\infty$
$x-n$	$-$	$+$	$+$
$-x+2n+1$	$+$	$+$	$-$
$f_n'(x)$	$-$ ‖	$\cancel{+}$	$\cancel{-}$

$\forall\, x < n,\ f_n'(x) < 0$, alors f_n est strictement décroissante sur $]-\infty; n[$.

b) $\forall\, x > n,\ f_n'(x) = e^{\frac{x+1}{x-n}} + \frac{-n-1}{(x-n)^2} \times (x-n)e^{\frac{x+1}{x-n}} = e^{\frac{x+1}{x-n}}\left(1 + \frac{-n-1}{x-n}\right) = \frac{x-2n-1}{x-n}e^{\frac{x+1}{x-n}}$,

posons $x-2n-1 = 0 \Leftrightarrow x = 2n+1$

x	$-\infty$ $\qquad$ n	$2n+1$	$+\infty$
$x-n$	$-$	$+$	$+$
$x-2n-1$	$-$	$-$	$+$
$f_n'(x)$	$\cancel{+}$ ‖	$-$	$+$

$\forall\, x \in]n; 2n+1],\ f_n'(x) < 0$, alors f_n est strictement décroissante sur $]n; 2n+1]$.

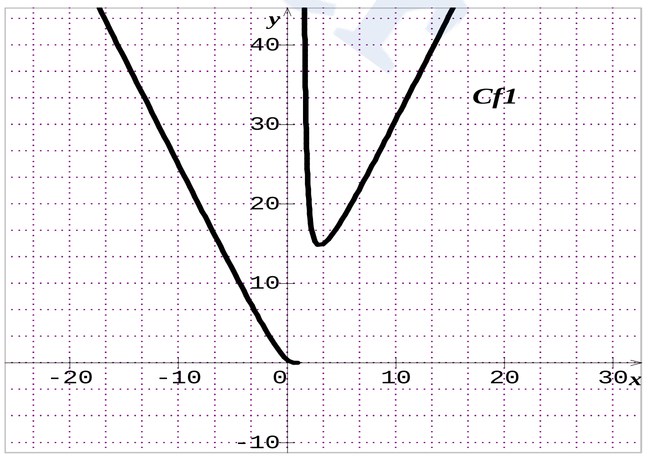
$\forall\, x \in]2n+1;\ +\infty[,\ f_n'(x) > 0$, alors f_n est strictement croissante sur $]2n+1;\ +\infty[$

c) **tableau de variation de f_n :**

$f_n(2n+1) = (n+1)e^2 = p$

x	$-\infty$ $\qquad$ n	$2n+1$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$ ‖	$-$	$+$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ‖	$+\infty$ ↘ p	↗ $+\infty$

d) **Tracer la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$.**



Problème 189 : Pour tout réel n strictement positif. On considère f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(e^x + nx) - x$.

D'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **Montrer que, pour tout réel x,** $f'_n(x) = \frac{n(1-x)}{e^x+nx}$.
2. **Étudier le sens de variation de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0;+\infty[$.**
3. **Montrer que $f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$.**
4. **Déterminer les limites de la fonction f_1, puis dresser le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0;+\infty[$.**
5. **Montrer que pour tout réel x sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f_n(x) \leq \frac{n}{e}$.**
6. **Déterminer une équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_{f_n}$ au point O. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_{f_n}$ par rapport à T_n.**
7. **Soit m un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = m$.**
8. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2.**

Correction : $n > 0$, $f_n(x) = \ln(e^x + nx) - x$.

1. $\forall\, x \in \mathrm{IR}, f'_n(x) = \frac{e^x+n}{e^x+nx} - 1 = \frac{n(1-x)}{e^x+nx}$.
2. $\forall x \geq 0, f'_1(x) = \frac{1-x}{e^x+x}$, alors f_1 est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.
3. $f_1(x) = \ln\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right] - x = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} f_1(x) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		+		−	
$f_1(x)$	0	↗	$\ln(1+e^{-1})$	↘	0

5. $f_n(x) = \ln\left[e^x\left(1+n\frac{x}{e^x}\right)\right] - x = \ln\left(1+n\frac{x}{e^x}\right)$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} f_n(x) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		+		−	
$f_n(x)$	0	↗	$\ln(1+ne^{-1})$	↘	0

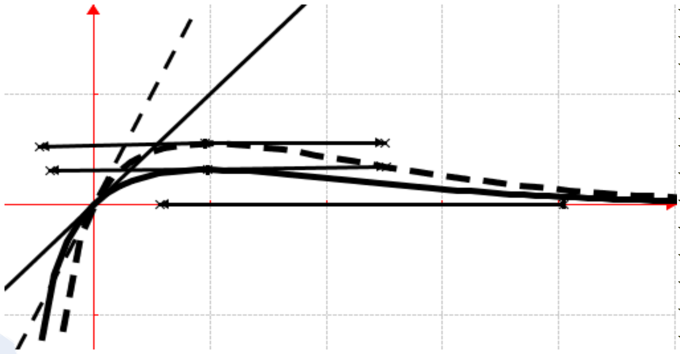
6. **Montrer que pour tout réel x sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f_n(x) \leq \frac{n}{e}$.**

Sur $[1;+\infty[$, $f'_n(x) \leq 0$, donc f_n est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc f_n admet un maximum en 1 et pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f_n(x) \leq f_n(1)$. Soit $f_n(x) \leq \ln\left(1+n\frac{1}{e}\right)$. Pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1 + a) \leq a$ donc en particulier pour $a = n\frac{1}{e}$ on a : $\ln\left(1+\frac{n}{e}\right) \leq \frac{n}{e}$, donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f_n(x) \leq \frac{n}{e}$.

7. $T_n : y = nx$ au point O. $f_n(x) - y_n = \ln(e^x + nx) - x - nx = \ln(e^x + nx) - (1+n)x$ donc $\mathcal{C}_{f_n}$ est au-dessous de T_n.
8. **Nombre de solution pour $f_n(x) = m$.**

- Si $m < 0$, l'équation $f_n(x) = m$ a une unique solution.
- Si $0 < m < \ln\left(1+\frac{n}{e}\right)$, l'équation $f_n(x) = m$ a deux solutions, l'une dans $[0; 1]$ et l'autre dans $[1; +\infty[$.
- Si $m = \ln\left(1+\frac{n}{e}\right)$, l'équation $f_n(x) = m$ a une unique solution qui est 1.
- Si $m > \ln\left(1+\frac{n}{e}\right)$, l'équation $f_n(x) = m$ n'a pas de solutions.

9. **$\mathcal{C}_{f_1}$ en trait continue et $\mathcal{C}_{f_2}$ en trait discontinue ; T_1 et T_2.**



Problème 190 : **Soit f_m la fonction définie par : $f_m(x) = \frac{x}{e^x+m}$ avec le réel m non nul.**

1. **Soit u_m la fonction définie par $u_m(x) = e^x(1-x) + m$.**
2. **Calculer $u'_m(x)$, étudier son signe et en déduire le sens de variations de la fonction u_m.**
3. **Calculer $u_m(0)$. En déduire le signe de $u_m(x)$ pour $m < -1$.**

2.

1. **Déterminer le domaine de définition de f_m.**
2. **Etudier les limites de f_m sur D_{f_m}.**
3. **Montrer que la droite D_m d'équation $y = \frac{1}{m}x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_m}$ en $-\infty$. Etudier leur position relative.**
4. **On suppose que $m < -1$.**

a. **Montrer que $\forall\, x \in D_{f_m}$ $f'_m(x) = \frac{u_m(x)}{(e^x+m)^2}$. En déduire le sens de variations de f_m.**

b. **Tableau de variations de f_m sur D_{f_m}.**

c. **Tracer les courbes $\mathcal{C}_{f_{-2}}$ et $\mathcal{C}_{f_{-3}}$ et les droites D_{-2} et D_{-3}.**

Correction : $f_m(x) = \frac{x}{e^x+m}$ **le réel $m < -1$.**

A. **Soit u_m la fonction définie par**

$u_m(x) = e^x(1-x) + m.$

1. $u_m(x) = e^x(1-x) + m \Leftrightarrow u'_m(x) = -xe^x$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\ u_n'(x) > 0$ alors u_n est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$.

$\forall\, x \in]0; +\infty[\ u_n'(x) < 0$ alors u_n est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

2. $u_m(0) = 1 + m < 0$ alors $\forall\, x \in \mathrm{IR}\ u_m(x) < 0$.

B.

1. **Domaine de définition de f_m :**

- **Si $m < 0$**

$D_{f_m} =]-\infty; \ln(-m)[\cup]\ln(-m); +\infty[$.

- **Si $m > 0$** $D_{f_m} =]-\infty; +\infty[$

2. **Limites de f_m :** $f_m(x) = \frac{x}{e^x+m} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1+\frac{m}{e^x}}$

$$\lim_{x \mapsto [\ln(-m)]^-} f_m(x) = \frac{\ln(-m)}{0^-} = \begin{cases} +\infty\ si\ -1 < m < 0 \\ -\infty\ si\ m < -1 \\ 1\ si\ m = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \mapsto [\ln(-m)]^+} f_m(x) = \frac{\ln(-m)}{0^+} = \begin{cases} -\infty\ si\ -1 < m < 0 \\ +\infty\ si\ m < -1 \\ 1\ si\ m = -1 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f_m(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{x}{e^x+m}\right] = \begin{cases} -\infty\ si\ m > 0 \\ +\infty\ si\ m < 0 \end{cases}$$ et

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f_m(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1+\frac{m}{e^x}}\right] = 0.$$

3. $\lim_{x \mapsto -\infty}[f_m(x) - y] = \lim_{x \mapsto -\infty}\left[-\frac{xe^x}{m(e^x+m)}\right] = 0$ donc la droite D_m d'équation $y = \frac{1}{m}x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_m}$ en $-\infty$.

Sur $]-\infty; 0[\ f_m(x) - y = -\frac{xe^x}{m(e^x+m)} > 0$ alors $\mathcal{C}_{f_m}$ est au dessus de la droite D_m.

4. **On suppose que $m < -1$**

a) **Sens de variations de f_m :**

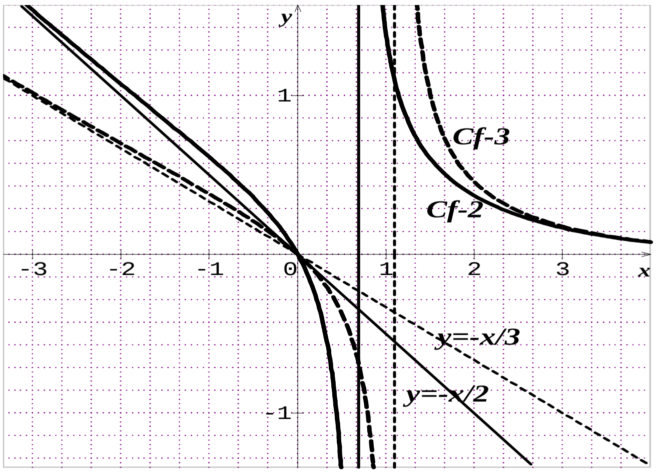
$\forall\, x \neq \ln(-m)\ f'_m(x) = \frac{e^x+m-xe^x}{(e^x+m)^2} = \frac{e^x(1-x)+m}{(e^x+m)^2} = \frac{u_m(x)}{(e^x+m)^2} < 0$ car son signe dépend de $u_m(x)$.

$\forall\, x \neq \ln(-m)\ f'_m(x) < 0$ alors **f_m est strictement décroissante** sur $]-\infty; \ln(-m)[$ et sur $]\ln(-m); +\infty[$.

b) **Tableau de variations de f_m sur D_{f_m}.**

x	$-\infty$		$\ln(-m)$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	||	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

c) **courbes $\mathcal{C}_{f_{-2}}$ et $\mathcal{C}_{f_{-3}}$ et les droites D_{-2} et D_{-3}.**



Problème 191 :

A. Pour tout réel n tel que $n \in]0; 1[$ on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

1.

a. Montrer que pour tout réel x, $f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$. En déduire la limite de f_n en $-\infty$.

b. Déterminer la limites de f_n en $+\infty$.

3. Montre que $\forall\, x \in \mathrm{IR}\ f'_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}[1-n-ne^x]}{(e^x+1)^2}$. En déduire le sens de variation de f_n sur IR.

4. Dresser le tableau de variation de f_n sur IR.

5. Tracer les courbes $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ et $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{3}}}$.

B. Pour tout n entier naturel non nul, on considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1. **Calculer I_1 et $I_0 + I_1$ en déduire I_0.**
2. **Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.**
3. **Montrer que la suite $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $I_n \geq 0$.**
4. **Montrer que $\forall\, n \in \mathrm{IN}^*\ I_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.**
5. **Calculer $\lim_{n \mapsto +\infty}\left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right) =$ et $\lim_{n \mapsto +\infty}(I_n) =$.**

Correction :

A. Pour tout réel n tel que $n \in]0; 1[$

$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

1.

a. $\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{nx}}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$.

En déduire la limite de f_n en $-\infty$.

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f_n(x) = \lim_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}\right] = \lim_{x \mapsto -\infty}\left[e^{(1-n)x}\right] = 0$$

b. $\lim_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \lim_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\right] = 0.$

2. $\forall x \in \mathrm{IR}$

$f'_n(x) = \frac{(1-n)e^{(1-n)x}(e^x+1) - e^{(1-n)x}e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{(1-n)x}[(1-n)(e^x+1)-e^x]}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{(1-n)x}[1-n-ne^x]}{(e^x+1)^2}$ son signe dépend de $(1-n-ne^x)$

Posons $1 - n - ne^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{n} - 1\right)$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{1}{n}-1\right)\right[$ $f_n'(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$ alors f_n est strictement croissante sur $\left]-\infty; \ln\left(\frac{1}{n}-1\right)\right[$.

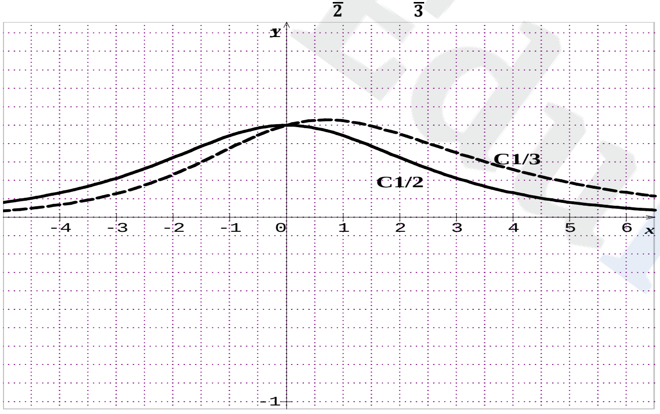
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]\ln\left(\frac{1}{n}-1\right); +\infty\right[$ $f_n'(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}$ alors f_n est strictement décroissante sur $\left]\ln\left(\frac{1}{n}-1\right); +\infty\right[$.

3. **Dresser le tableau de variation de f_n sur IR.**

$f_n\left[\ln\left(\frac{1}{n}-1\right)\right] = \boldsymbol{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)^{1-n} = p.$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{n}-1\right)$	$+\infty$
$f_n'(x)$	+		−
$f_n(x)$	**0** ↗	$\boldsymbol{p}$	↘ **0**

4. **Tracer les courbe $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ et $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{3}}}$.**



B. **Pour tout $\boldsymbol{n}$ entier naturel non nul, on considère la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.**

1. **Calculer I_1 et $\mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1$ en déduire I_0.**

$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = [-\ln|1+e^{-x}|]_0^1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-x})$ donc $\mathrm{I}_1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1})$

$\mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$ en déduire $\mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{I}_0 = 1 - \mathrm{I}_1 = 1 - \ln 2 + \ln(1+e^{-1})$

2. **Calculer $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.**

$\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1+e^{-x})e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}$

3. **Montrer que la suite $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathrm{IN}$, $\mathrm{I}_n \geq 0$.**

Sans passer à la démonstration par récurrence, on peut remarquer que $f_n(x)$ est continue et positive sur IR et $0 < 1$, donc $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \geq 0$

4. **Montrer que $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathrm{IN}^*$ $\mathrm{I}_n \leq \frac{1-e^{-nx}}{n}$.**

$\mathrm{I}_n \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{I}_{n+1} \geq 0$ et $\mathrm{I}_n \leq \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$, donc $\forall\, n \in \mathrm{IN}^*$ $\mathrm{I}_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

5. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right) = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}\right) = 0$ selon le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (\mathrm{I}_n) = 0$.

<u>Problème 192 :</u> unité graphique 3 cm × 2 cm

1. **On considère la fonction définie par : $\boldsymbol{f(x) = ae^{3x} + be^{2x} + 6ae^x - 5}$ où $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathrm{IR}^2$. Déterminer $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de telle sorte que $\mathcal{C}_f$ admet en son point A d'abscisse ln2, une tangente dont une équation est $\boldsymbol{y = -1}$.**
2. **Soit la fonction $\boldsymbol{g}$ définie par : $\boldsymbol{g(x) = 2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 5}$.**
   a) **Etudier les variations de la fonction $\boldsymbol{g}$ (tableau). Préciser les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_g$**
   b) **Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ de la fonction $\boldsymbol{g}$ et de la droite des abscisses.**
   c) **Tracer $\mathcal{C}_g$.**
3. **Soit la fonction $\boldsymbol{h}$ définie par : $\boldsymbol{h(x) = |2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 5|}$. Déduire de l'étude de la fonction $\mathcal{C}_g$ le tableau de variation de $\boldsymbol{h}$ et le tracer de $\mathcal{C}_h$ à faire dans le même repère que $\mathcal{C}_g$.**
4. **Discuter graphiquement, suivant les valeurs de $\boldsymbol{m}$, le nombre de solutions de l'équation : $\boldsymbol{h(x) = m}$.**
5. **Calculer en cm², l'aire A de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ vérifient $\begin{cases} 0 \leq x \leq \ln 2 \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases}$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.**

<u>Correction :</u>

1. **$\boldsymbol{f(x) = ae^{3x} + be^{2x} + 6ae^x - 5}$ où $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathrm{IR}^2$. $\mathcal{C}_f$ admet en son point A d'abscisse ln2, une tangente dont une équation est $\boldsymbol{y = -1}$.**

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$ $f'(x) = 3ae^{3x} + 2be^{2x} + 6ae^x$

$f'(\ln 2) = 24a + 8b + 12a = 36a + 8b = 0$

$f(\ln 2) = 8a + 4b + 12a - 5 = 20a + 4b - 5 = -1$

$\begin{cases} 36a + 8b = 0 \\ 20a + 4b - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 2b = 0 \\ 5a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \end{cases}$

2. **$\boldsymbol{g(x) = 2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^x - 5}$.**

a) **Etudier les variations de la fonction $\boldsymbol{g}$.**

$\forall\, x \in \mathrm{IR}$ $g'(x) = 6e^{3x} - 18e^{2x} + 12e^x = 6e^x(e^{2x} - 3e^{2x} + 2) = 6e^x(e^x - 1)(e^x - 2)$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[\, \cup\,]\ln 2\,;\, +\infty[\ g'(x) > 0$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\ln 2\,;\, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{g(x)} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[\boldsymbol{2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^{x} - 5}] = -5$

alors $y = -5$ on a une asymptote horizontale en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{g(x)} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\boldsymbol{2e^{3x}}] = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$\boldsymbol{g'(x)}$		$+$		$-$		$+$	
$\boldsymbol{g(x)}$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\mathcal{C}_g \cap (Ox) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^{x} - 5 = 0$ or $g(0) = 0$ donc

$g(x) = (e^x - 1)(2e^{2x} + a'e^x + b') = 0 \Leftrightarrow$

$g(x) = 2e^{3x} + (a' - 2)e^{2x} + (b' - a')e^x - b = 0$

par identification on aura $\begin{cases} a' - 2 = -9 \\ b' - a' = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -7 \\ b' = 5 \end{cases}$

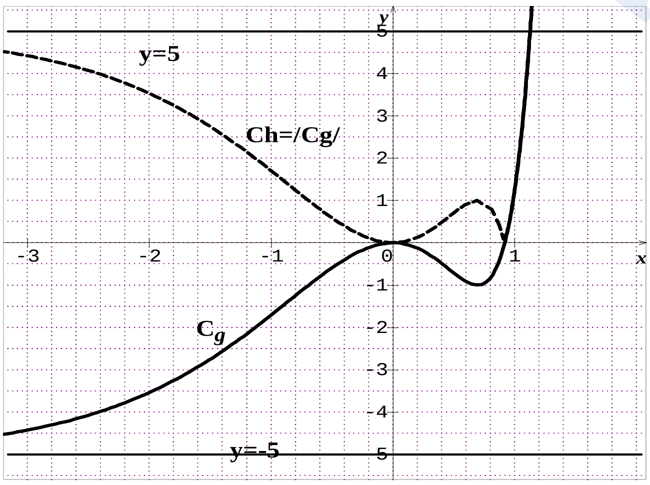
après nous allons résoudre $2e^{2x} - 7e^x + 5 = 0$ d'où $(2e^x - 5)(e^x - 1) = 0$ en définitif on a :

$g(x) = (e^x - 1)(2e^x - 5)(e^x - 1) = (e^x - 1)^2(2e^x - 5) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Ces ponts sont $\mathrm{O}(0;0)$ et $\mathrm{A}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right); 0\right)$

c) **Tracer $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$.**

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[2\frac{e^{3x}}{x}\right] = +\infty$ alors $\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.



3. $\boldsymbol{h(x)} = |\boldsymbol{2e^{3x} - 9e^{2x} + 12e^{x} - 5}| = |\boldsymbol{g(x)}|$.

La valeur absolue a deux intervalles symétriques aux points qui les annulent : les valeurs du réel x positif et celle du réel x négatif. Or g s'annule en O et $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ appartenant à $\mathrm{D}_h = \mathrm{IR}$ dont on pouvait étudier leurs dérivabilités.

$\boldsymbol{h(x)} = |(e^x - 1)^2(2e^x - 5)| = (e^x - 1)^2|2e^x - 5|$

- $\forall\, x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right[\ \ h(x) = -(e^x - 1)^2(2e^x - 5) = h(x) = (e^x - 1)^2(2e^x - 5) = -g(x)$ on déduit $\mathcal{C}_h$ par rapport à l'axe réel négatif des abscisses.
- $\forall\, x \in \left]\ln\left(\frac{5}{2}\right); +\infty\right[\ h(x) = (e^x - 1)^2(2e^x - 5) = g(x)$ on suit le même tracé de $\mathcal{C}_g$ pour la 2ème partie de la courbe $\mathcal{C}_h$.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$		$+\infty$
$\boldsymbol{h'(x)}$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$\boldsymbol{h(x)}$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. **nombre de solutions de $\boldsymbol{h(x) = m}$**

- $h(x) > 1$ on a deux (2) solutions
- $0 < h(x) < 1$ on a quatre (4) solutions
- $h(x) = 0$ on a deux (2) solutions
- $h(x) < 0$ on a aucune solution
- $m = h(x) = 1$ on a trois (3) solutions.

5. $\forall\, x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right[\ \ h(x) = -g(x)$

$h(x) - g(x) = -g(x) - g(x) = -2g(x)$

$\mathrm{I} = \int_0^{\ln 2}[h(x) - g(x)]dx = \int_0^{\ln 2}[-2g(x)]dx$

$\mathrm{I} = -2\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{e^{3x}} - \frac{9}{2}\boldsymbol{e^{2x}} + \boldsymbol{12e^{x}} - \boldsymbol{5x}\right]_0^{\ln 2}$

$\mathrm{I} = \left[-\frac{4}{3}\boldsymbol{e^{3x}} + \boldsymbol{9e^{2x}} - \boldsymbol{24e^{x}} + \boldsymbol{10x}\right]_0^{\ln 2}$

$\mathrm{I} = 10\ln 2 - \frac{19}{3}$ donc l'aire en cm^2 est :

$\mathrm{A} = 6\mathrm{I}\ cm^2 = (60\ln 2 - 38)cm^2$.

A $\boldsymbol{10^{-2}}$ **près** on a $\mathrm{A} = 3{,}58\ cm^2$.

<u>Problème 193 :</u> On considère $\boldsymbol{f_m}$ définie par : $\boldsymbol{f_m(x)} = \frac{e^x - m}{e^{2x}}$ où $\boldsymbol{m}$ désigne un réel strictement positif.

A. **Soit $\boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}(x)} = \frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^{2x}}$.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}}$?**

2. **Déterminer les limites de $\boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}}$ sur $\mathrm{D}_{f_{\frac{1}{2}}}$.**

3. **Etudier le sens de variation de $\boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}}$ sur $\mathrm{D}_{f_{\frac{1}{2}}}$.**

4. **Dresser le tableau de $\boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}}$ sur $\mathrm{D}_{f_{\frac{1}{2}}}$.**

5. **Déterminer une équation de la tangente T à $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}}$ au point d'intersection de $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}}$ avec l'axe des abscisses.**

6. **Construire $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}}$ et T.**

7. **Soit un réel $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\boldsymbol{\alpha \in [-\ln 2\,; +\infty[}$.**

a) **Calculer l'intégrale $\boldsymbol{I(\alpha)} = \int_{-\ln 2}^{\alpha}\left(\frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^{2x}}\right)\boldsymbol{dx}$.**

b) **Donner une interprétation géométrique de cette intégrale puis calculer la limite de $\boldsymbol{I(\alpha)}$ lorsque $\boldsymbol{\alpha}$ tend vers $+\infty$.**

B. **$\boldsymbol{m}$ désigne un réel strictement positif.**

1. **Quel est l'ensemble de définition de f_m ?**
2. **Déterminer les limites de f_m sur D_{f_m}.**
3. **Etudier le sens de variation de f_m sur D_{f_m}.**
4. **Dresser le tableau de f_m sur D_{f_m}.**

Construire $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{3}}}$; $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{4}}}$ et $\mathcal{C}_{f_1}$.

5. **En déduire lorsque m varie dans IR_+^* l'ensemble (E) décrit par les points de $\mathcal{C}_{f_m}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{C}_{f_m}$ est parallèle à l'axe des abscisses. Construire (E).**
6. **Soit N_m le point de la courbe $\mathcal{C}_{f_m}$ d'abscisse nulle. On considère l'ensemble des droites D_m tangentes aux courbes $\mathcal{C}_{f_m}$ aux points N_m.**

a) **Ecrire une équation de D_m en fonction de m.**

b) **Montrer que toutes les droites D_m passent par un point A, indépendant de m, dont on calculera les ordonnées.**

<u>Correction :</u> $f_m(x) = \frac{e^x-m}{e^{2x}} = e^{-2x}(e^x - m)$ où m désigne un réel strictement positif.

A. Soit $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{e^x-\frac{1}{2}}{e^{2x}} = e^{-2x}\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$.

1. **$D_{f_{\frac{1}{2}}} = IR$**
2. **Déterminer les limites de $f_{\frac{1}{2}}$ sur $D_{f_{\frac{1}{2}}}$.**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_{\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{e^x-\frac{1}{2}}{e^{2x}}\right] = \frac{-\frac{1}{2}}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_{\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{e^{2x}}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$.

3. **Etudier le sens de variation de $f_{\frac{1}{2}}$ sur $D_{f_{\frac{1}{2}}}$.**

$\forall\, x \in IR\ f_{\frac{1}{2}}'(x) = e^{-2x}(e^x) - 2e^{-2x}\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

$\forall\, x \in IR\ f_{\frac{1}{2}}'(x) = e^{-2x}(e^x - 2e^x + 1) = e^{-2x}(1 - e^x)$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]-\infty; \boldsymbol{0}[\ f_{\frac{1}{2}}'(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$ alors $f_{\frac{1}{2}}$ est strictement croissante sur $]-\infty; \boldsymbol{0}[$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}; +\infty[\ f_{\frac{1}{2}}'(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{0}$ alors $f_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante sur $]\boldsymbol{0}; +\infty[$.

4. **Dresser le tableau de $f_{\frac{1}{2}}$ sur $D_{f_{\frac{1}{2}}}$.**

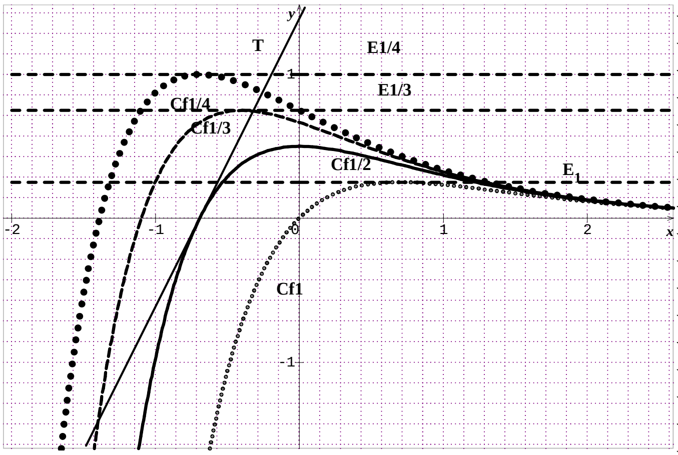
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_{\frac{1}{2}}'(x)$		$+$		$-$	
$f_{\frac{1}{2}}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	**1/2**	$\searrow$	**0**

5. **Déterminer une équation de la tangente T à**

$\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}} \cap (Ox) \Leftrightarrow f_{\frac{1}{2}}(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_{\frac{1}{2}}'\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2 \\ f_{\frac{1}{2}}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

T $y = 2x + 2\ln 2$

6. **Construire $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{2}}}$ et T.**



7. **Soit un réel α tel que $\alpha \in [-\ln 2\,; +\infty[$.**

a) $I(\alpha) = \int_{-\ln 2}^{\alpha}\left(\frac{e^x-\frac{1}{2}}{e^{2x}}\right)dx = \int_{-\ln 2}^{\alpha}\Big(e^{-x} -$

12e−2xdx.

$I(\alpha) = \left[-e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^{\alpha} = \frac{1}{4}e^{-2\alpha} - e^{-\alpha} + 1$

b) On sait que $\boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}(x)}$ est continue et dérivable sur $[-\ln 2\,; +\infty[$. **De plus** $\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in [-\ln 2\,; +\infty[\ \boldsymbol{f_{\frac{1}{2}}(x)} > 0$

D'où $\boldsymbol{I(\alpha)}$ **existe et que** $I(\alpha) = \frac{1}{4}e^{-2\alpha} - e^{-\alpha} + 1$.

$\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{4}e^{-2\alpha} - e^{-\alpha} - 1\right] = 1$.

B. m désigne un réel strictement positif.

1. **$D_{f_m} = IR \quad f_m(x) = e^{-2x}(e^x - m)$**
2. **Déterminer les limites de f_m sur D_{f_m}.**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{f_m(x)} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[\frac{e^x-m}{e^{2x}}\right] = \frac{-m}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{f_m(x)} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{e^x}{e^{2x}}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$.

3. **Etudier le sens de variation de f_m sur D_{f_m}.**

$\forall\, x \in IR\ \boldsymbol{f_m'}(x) = e^{-2x}(e^x) - 2e^{-2x}(e^x - m)$

$\forall\, x \in IR\ \boldsymbol{f_m'}(x) = e^{-2x}(e^x - 2e^x + 2m) = e^{-2x}(2m - e^x)$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]-\infty; \ln(2m)[\ \boldsymbol{f_m'(x)} > \boldsymbol{0}$ alors $\boldsymbol{f_m}$ est strictement croissante sur $]-\infty; \ln(2m)[$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\ln(2m)\,; +\infty[\ \boldsymbol{f_m'(x)} < \boldsymbol{0}$ alors $\boldsymbol{f_m}$ est strictement décroissante sur $]\ln(2m)\,; +\infty[$.

4. **Dresser le tableau de f_m sur D_{f_m}.**

x	$-\infty$	$\ln(2m)$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$+$		$-$
$f_m(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$1/(4m)$	$\searrow$ 0

$\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{3}}}$; $\mathcal{C}_{f_{\frac{1}{4}}}$ et $\mathcal{C}_{f_1}$ voir graphique

5. $f'_m(x) = e^{-2x}(2m - e^{x}) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2m)$.

Donc (E) $y = \frac{1}{4m}$.

Voir graphique.

6. **N_m le point de la courbe $\mathcal{C}_{f_m}$ d'abscisse nulle.**
des droites D_m tangentes aux $\mathcal{C}_{f_m}$ aux points N_m.

a) D_m $y = f'_m(0)(x-0) + f_m(0)$

D_m $y = 2mx + 1 - m$

b) $D_m = D_{m+1} \Leftrightarrow 2(m+1)x + 1 - m - 1 = 2mx + 1 - m \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ alors toutes les droites D_m passent par un point $A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ e^{-1}(\sqrt{e}-m)\end{pmatrix}$, indépendant de m.

<u>Problème 194 :</u> unité graphique 2 cm

A. On considère la fonction f définie par :
$f(x) = x - e^{x}$.

1. Déterminer les limites de f sur D_f.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Préciser la position relative $\mathcal{C}_f$ de par rapport à (d).

4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.
Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

B. Pour tout n entier naturel non nul,
on considère la fonction f_n définie par :
$f_n(x) = x - e^{nx}$.

1. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_{f_n}$ et $\mathcal{C}_{f_{n+1}}$.

2. Montrer qu'il existe un seul point A commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_n}$. Tracer $\mathcal{C}_{f_2}$.

3. Soit α un nombre réel compris entre 4 et 5.
On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} 0 \le x \le \alpha \\ 0 \le y \le f_n(x) \end{cases}$.

a) Déterminer la valeur en cm^2 de $\mathcal{A}(\alpha)$.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α vers $+\infty$.

4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_n^{n+1}[f(t) - t]dt$ pour tout n entier naturel.

a) Interpréter géométriquement.

b) Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une géométrique dont on précisera la raison.

c) On pose $S_{0,n} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.

d) Etudier la convergence de la suite $S'_{1,n}$.

<u>Correction :</u>

A. $f(x) = x - e^{x}$.

1. limites de f sur $D_f = $ IR.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[x - e^{x}] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(1 - \frac{e^{x}}{x}\right)\right] = -\infty$

2. Dresser le tableau de variation de f.

$\forall\, x \in$ IR $f'(x) = 1 - e^{x}$

$\forall\, x \in]-\infty; 0[$ $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$.

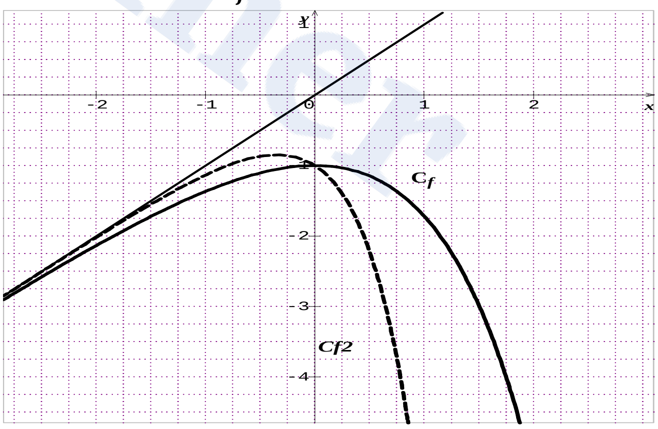
$\forall\, x \in]0; +\infty[$ $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$

3. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[-e^{x}] = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. **position relative $\mathcal{C}_f$ de par rapport à (d) :**
comme $f(x) - x = -e^{x} < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la droite (d).

4. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[1 - \frac{e^{x}}{x}\right] = -\infty$ donc la $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.



B. Pour tout n entier naturel non nul,
on considère la fonction f_n définie par :
$f_n(x) = x - e^{nx}$.

1. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - e^{nx+x} - (x - e^{nx})$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{nx} - e^{nx} \times e^{x} = (1 - e^{x})e^{nx}$

- Sur $]-\infty; 0[$ **alors** $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_{f_{n+1}}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{f_n}$.

- Sur $]0;+\infty[$ **alors** $f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ donc $\mathcal{C}_{f_{n+1}}$ est au dessous de $\mathcal{C}_{f_n}$.

2. $f_{n+1}(x)=f_n(x) \Leftrightarrow f_{n+1}(x)-f_n(x)=0 \Leftrightarrow (1-e^x)e^{nx}=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow x=0$ alors il existe un seul point $A(0;-1)$ commun à toutes $\mathcal{C}_{f_n}$.

Tracer $\mathcal{C}_{f_2}$ voir graphique

3. **$\alpha \in [4;5]/\ \mathcal{A}(\alpha)$ l'aire** $\begin{cases} 0 \le x \le \alpha \\ 0 \le y \le f_n(x) \end{cases}$.

a) **Déterminer la valeur en cm² de $\mathcal{A}(\alpha)$.**

Or $\forall\, x \in$ IR $f_n(x)<0$ alors

$\mathcal{A}(\alpha)=-4\int_0^\alpha f_n(x)dx\ \text{cm}^2=4\left[\frac{1}{n}e^{nx}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha \text{cm}^2$

$\mathcal{A}(\alpha)=\left(\frac{4}{n}e^{n\alpha}-2\alpha^2-\frac{4}{n}\right)\text{cm}^2$

b) $\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\alpha)=\lim\limits_{\alpha \mapsto +\infty}\left[\alpha^2\left(\frac{4e^{n\alpha}}{n\alpha^2}-2\right)-\frac{4}{n}\right]=+\infty$.

4. **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\int_n^{n+1}[f(t)-t]dt$ pour tout n entier naturel.**

a) **Interpréter géométriquement.**

$u_n=\int_n^{n+1}[f(t)-t]dt=\int_n^{n+1}[e^t]dt$

On sait que $f(t)-t=e^t$ est continue et dérivable sur IR pour tout n entier naturel. **De plus** $e^t>0$. Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **existe et que** $u_n=\int_n^{n+1}[e^t]dt$

b) $u_n=\int_n^{n+1}[e^t]dt=[e^t]_n^{n+1}$

$u_n=e^n\times e^1-e^n=e^n(e-1)$

$u_{n+1}=e^{n+1}(e-1)=e\times e^n(e-1)=e\,u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une géométrique raison $q=e$.

c) **$S_{0,n}$ en fonction de n : $u_0=e-1$**

$S_{0,n}=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=u_0\times\frac{e^{n+1}-1}{e-1}$

$$S_{0,n}=e^{n+1}-1$$

d) **Etudier la convergence de $S'_{1,n}$:**

$S'_{1,n}=e^{n+2}-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} S'_{1,n}=+\infty$ donc **$S'_{1,n}$ diverge.**

<u>Problème 195:</u> À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur IR par $f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

A.

1. **Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x)=\frac{4}{1+7e^{-x}}$.**

2.

a. **Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.**

b. **Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur IR.**

c. **Démontrer que pour tout réel x, $0<f_1(x)<4$.**

3.

a) **Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln7 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$.**

b) **Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$ au point I_1.**

c) **Dresser le tableau de variation de f_n.**

4. **Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur IR. En déduire pour celle de f_n.**

5. **Soit g la restriction de f_1 sur $]-\infty;+\infty[$.**

a) **Montrer que g est une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.**

b) **On note g^{-1} la bijection réciproque de g et on note sa courbe représentative $\mathcal{C}_{g^{-1}}$. Expliciter et donner son tableau de variation.**

B.

a. **Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, le point $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_{f_n}$.**

b.

a) **Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_{f_n}$ et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.**

b) **Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_{f_n}$ au point I_n.**

c. **Tracer (T_2); (T_3) ; $\mathcal{C}_{f_1}$; (T_1); $\mathcal{C}_{f_2}$ et $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.**

d. **Soit la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n=\frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ est constante.**

<u>Correction :</u> À tout entier naturel n non nul, on a $f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

A.

1. **$\forall\, x \in$ IR** $f_1(x)=\frac{4e^x}{e^x+7}=\frac{4e^x}{e^x+7}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\frac{4}{1+7e^{-x}}$.

2.

a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{4}{1+7e^{-x}}\right]=0$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{4}{1+7e^{-x}}\right]=4$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$ en $+\infty$

b) **$\forall\, x \in$ IR** $f'_1(x)=+\frac{28e^{-x}}{(1+7e^{-x})^2}>0$ alors f_1 est strictement croissante sur IR.

c) Comme $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_1(x)=0$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_1(x)=4$ et f_1 est strictement croissante sur IR alors f_1 est bornée de telle sorte que pour tout réel x, $0<f_1(x)<4$.

3.

a) $f_1(2\ln 7 - x) = \frac{4}{1+7e^{-(2\ln 7 - x)}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1+7e^{\ln\left(\frac{1}{49}\right)}\times e^x}}$

$f_1(2\ln 2 - x) = \frac{4}{1+\frac{7}{49}e^x} = \frac{4}{1+\frac{1}{7}e^x} = \frac{28}{7+e^x}$ et $b = 2$;

$f_1(2\ln 2 - x) + f_1(x) = \frac{28}{7+e^x} + \frac{\mathbf{4e^x}}{\mathbf{e^x+7}} = \frac{\mathbf{4(e^x+7)}}{\mathbf{e^x+7}} = \mathbf{4} = 2b$ d'où le point I_1 de coordonnées (ln7 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$.

b) $f_1(\ln 7) = 2$ et $f'_1(\ln 7) = \frac{28e^{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}}{\left(1+7e^{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}\right)^2} = \frac{4}{4} = 1$

donc (T_1) $y = x - \ln 7 + 2$.

c) **tableau de variation de f_n.**

$\forall\, x \in$ IR $\boldsymbol{f_n(x)} = \frac{\mathbf{4e^{nx}}}{\mathbf{e^{nx}+7}} = \frac{\mathbf{4e^{nx}}}{\mathbf{e^{nx}+7}} \times \frac{\mathbf{e^{-nx}}}{\mathbf{e^{-xn}}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1+7e^{-nx}}}$

$\forall\, x \in$ IR $\boldsymbol{f'_n(x)} = \frac{\mathbf{28n\,e^{-x}}}{\mathbf{(1+7e^{-nx})^2}} > 0$ alors f_n est strictement croissante sur IR

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{f_n(x)} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1+7e^{-nx}}}\right] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{f_n(x)} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1+7e^{-nx}}}\right] = 4$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\boldsymbol{f'_n(x)}$		$+$	
$\boldsymbol{f_n(x)}$	0	$\nearrow$	4

4. $\forall\, x \in$ IR $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$ a pour primitive

$\mathrm{F}_1(x) = 4\ln(e^x + 7)$

$\forall\, x \in$ IR $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$ a pour primitive

$\mathrm{F}_n(x) = \frac{4}{n}\ln(e^{nx} + 7)$.

5. **Soit g la restriction de f_1 sur** $]-\infty; +\infty[$.

a) Comme f_1, g est strictement croissante sur IR. Elle est une bijection de $]-\infty; +\infty[$ sur $]0; 4[$.

b) $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7} = y \Leftrightarrow e^x(4-y) = 7y \Leftrightarrow$

$e^x = \frac{7y}{4-y} \Leftrightarrow x = \ln\left|\frac{7y}{4-y}\right|$

$\forall\, x \in\,]0; 4[\; \boldsymbol{g^{-1}}(x) = \ln\left(\frac{7x}{4-x}\right)$.

x	0		4
$\boldsymbol{(g^{-1})'(x)}$		$+$	
$\boldsymbol{g^{-1}(x)}$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

B.

1. $\forall\, x \in$ IR $f_n(0) = \frac{4e^0}{e^0+7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ alors pour tout entier naturel n non nul, le point $\mathrm{A}\left(0;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_{f_n}$.

2.

a) $\forall\, x \in$ IR $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} = 2 \Leftrightarrow 4e^{nx} - 2e^{nx} = 14 \Leftrightarrow 2e^{nx} = 14 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}\ln 7$. C'est évident pour $n = 1$ on avait $I_1(\ln 7\,; 2)$ d'où pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_{f_n}$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection $I_n\left(\frac{1}{n}\ln 7\,; 2\right)$.

b) $f_n\left(\frac{1}{n}\ln 7\right) = 2$ et

$f'_n\left(\frac{1}{n}\ln 7\right) = f'_n\left(\ln\left(\sqrt[n]{7}\right)\right) = \frac{28n\,\boldsymbol{e}^{-\ln\left(\sqrt[n]{7}\right)}}{\left(1+7e^{-\ln\left(\sqrt[n]{7}\right)}\right)^2} =$

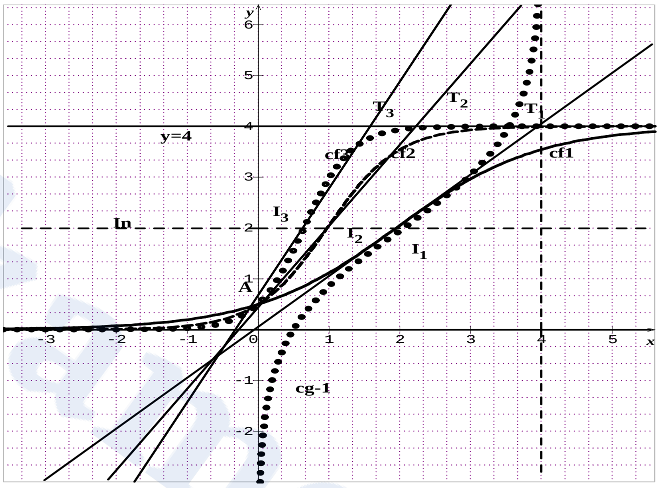
$\frac{28n\,\boldsymbol{e}^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt[n]{7}}\right)}}{\left(1+7e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt[n]{7}}\right)}\right)^2} = \frac{\frac{28n}{\sqrt[n]{7}}}{\left(1+\frac{7}{\sqrt[n]{7}}\right)^2} = \frac{28n}{7^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{7}{7^{\frac{1}{n}}}\right)^2} =$ donc

(T_n) $y = \frac{28n}{7^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{7}{7^{\frac{1}{n}}}\right)^2}x - \frac{28n}{7^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{7}{7^{\frac{1}{n}}}\right)^2}\ln 7 + 2$..

3. **Tracer (T_2); (T_3) ; $\mathcal{C}_{f_1}$; (T_1); $\mathcal{C}_{f_2}$ et $\mathcal{C}_{g^{-1}}$.**

$\boldsymbol{(T_2)}$ $y = \frac{56}{\sqrt{7}\left(1+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^2}x - \frac{56}{2\sqrt{7}\left(1+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^2}\ln 7 + 2$

(T_3) $y = \frac{84}{7^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{7}{7^{\frac{1}{3}}}\right)^2}x - \frac{84}{3\times 7^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{7}{7^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\ln 7 + 2$



4. $\boldsymbol{(u_n)_{n\in IN^*}}$ **/** $\boldsymbol{u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx}$**.**

$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx = \frac{n}{\ln 7}\left[\frac{4}{n}\ln(e^{nx} + 7)\right]_0^{\frac{\ln 7}{n}} =$

$\frac{n}{\ln 7} \times \frac{4}{n}\ln\left(e^{n\frac{\ln 7}{n}} + 7\right) - \frac{n}{\ln 7} \times \frac{4}{n}\ln(e^0 + 7) = \frac{4}{n}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$

$u_n = \frac{n}{\ln 7} \times \frac{4}{n}\ln\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{4}{\ln 7}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$.

$u_{n+1} = u_n = \frac{4}{\ln 7}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$ alors la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ est constante

<u>Problème 196 :</u> Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur IR par :

$\boldsymbol{f_n(x) = x^n e^{\frac{-x^2}{2}}}$ **et on pose** $\boldsymbol{f_0(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}}$.

Soit θ un réel strictement positif. On note $a_n(\theta) = \int_0^{\theta} f_n(x)dx$ puis $\mathrm{A_n} = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_n(\theta)$.

1.

a) Etudier, suivant n, la parité ou l'imparité de f_n.

b) Etudier, suivant n et x, le signe de $f_n(x)$.

2.

a) Etudier f_0 et construire son tableau de variations et sa courbe $\mathcal{C}_0$.

b) On donne $A_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$. Que représente A_0 sur le graphique du 2. a.?

3. On considère la fonction f_1 définie sur ℝ par : $f_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

a) Etudier f_1 et construire son tableau de variations. Construire $\mathcal{C}_1$ la courbe de f_1.

b) Calculer $a_1(\theta) = \int_0^\theta f_1(x)dx$ en fonction de θ.

c) En déduire que : $A_1 = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_1(\theta) = 1$.

4.

a) Etudier f_2 et construire son tableau de variations. Construire $\mathcal{C}_2$ la courbe de f_2.

b) En utilisant une intégration par parties et après avoir remarqué que $f_2(x) = x\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)$, calculer $a_2(\theta) = \int_0^\theta f_2(x)dx$ en fonction de θ et $a_0(\theta)$.

c) En déduire que : $A_2 = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_2(\theta)$.

5. On note

$a_n(\theta) = \int_0^\theta f_n(x)dx = \int_0^\theta x^{n-1}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx$

a) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre A_n et A_{n-2}, $n \geq 2$.

b) En déduire alors les termes A_3 et A_4 de la suite (A_n).

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = x^n e^{\frac{-x^2}{2}}$

et on pose $f_0(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ $a_n(\theta) = \int_0^\theta f_n(x)dx$ puis $A_n = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_n(\theta)$.

1.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f_n(-x) = (-x)^n e^{\frac{-(-x)^2}{2}} = (-x)^n e^{\frac{-x^2}{2}}$

- Si n est pair alors $f_n(-x) = x^n e^{\frac{-x^2}{2}} = f_n(x)$.
- Si n est impair alors $f_n(-x) = -x^n e^{\frac{-x^2}{2}} = -f_n(x)$.

b) Si n est pair alors $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) > 0$

Si n est impair alors $\begin{cases} \forall\, x < 0 & f_n(x) < 0 \\ \forall\, x > 0 & f_n(x) > 0 \end{cases}$.

2.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f_0(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \Leftrightarrow f_0'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$

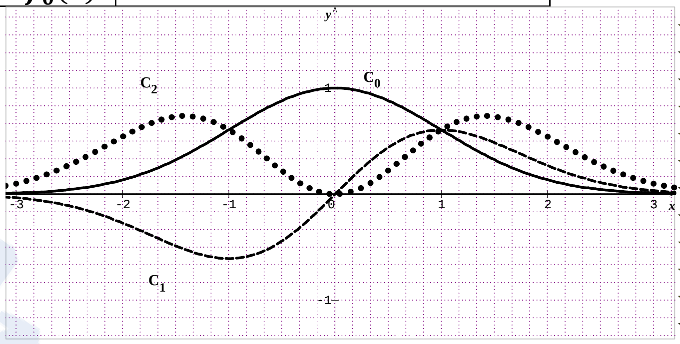
$\forall\, x < 0$ $f_0'(x) > 0$ alors f_0 est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

$\forall\, x > 0$ $f_0'(x) < 0$ alors f_0 est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[e^{\frac{-x^2}{2}}\right] = e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[e^{\frac{-x^2}{2}}\right] = e^{-\infty} = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$		$-$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



b) $A_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ représente la limite de la surface de $a_0(\theta)$ de f_0 lorsque θ tend vers $+\infty$.

3. $f_1(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f_1(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}} \Leftrightarrow f_1'(x) = (1 - x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}$ son signe dépend de $(1 - x^2)$

$\forall\, x \in\ ]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ $f_1'(x) < 0$ alors f_1 est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$

$\forall\, x \in]-1; 1[$ $f_1'(x) > 0$ alors f_1 est strictement croissante sur $]-1; 1[$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[xe^{\frac{-x^2}{2}}\right] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[xe^{\frac{-x^2}{2}}\right] = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

b) $a_1(\theta) = \int_0^\theta f_1(x)dx = -\int_0^\theta \left[-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right]dx =$

$a_1(\theta) = -\left[e^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^\theta = 1 - e^{\frac{-\theta^2}{2}}$.

c) $A_1 = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_1(\theta) = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\left[1 - e^{\frac{-\theta^2}{2}}\right] = 1.$

4.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ f_2(x) = x\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \Leftrightarrow f_2'(x) =$

$x(2 - x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}$ son signe dépend de $x(2 - x^2)$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]0;\ \sqrt{2}[\ \cup\ ]\sqrt{2};\ +\infty[\ \ f_2'(x) < 0$ alors f_2 est strictement décroissante sur $]0;\ \sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2};\ +\infty[$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]-\infty; -\sqrt{2}[\ \cup\ ]0;\ \sqrt{2}[\ \ f_2'(x) > 0$ alors f_2 est strictement croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et sur $]0;\ \sqrt{2}[$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_2(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}\left[x\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_2(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[x\left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right] = 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\boldsymbol{f'_2(x)}$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f_2(\boldsymbol{x})$	0	$\nearrow$	$2\boldsymbol{e}^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\boldsymbol{e}^{-1}$	$\searrow$	0

b) $a_2(\theta) = \int_0^\theta f_2(x)dx = \int_0^\theta \left[x\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]dx =$

$\left[-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^\theta + \int_0^\theta \left[e^{\frac{-x^2}{2}}\right]dx = \left[-xe^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^\theta + a_0(\theta)$

$$a_2(\theta) = a_0(\theta) - \theta e^{\frac{-\theta^2}{2}}$$

c) $A_2 =$

$\lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_2(\theta) = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\left[a_0(\theta) - \theta e^{\frac{-\theta^2}{2}}\right] = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_0(\theta)\ -$

$\lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\left(\theta e^{\frac{-\theta^2}{2}}\right) = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_0(\theta) = \mathbf{A_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{2\pi}}.$

5. $\boldsymbol{a_n(\theta) = \int_0^\theta f_n(x)dx = \int_0^\theta x^{n-1}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx}$

a) $A_n = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_n(\theta)$ et

$a_{n-1}(\theta) = \int_0^\theta x^{n-2}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx$

$a_n(\theta) = \int_0^\theta x^{n-1}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx = \left[-x^{n-1}e^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^\theta +$

$(n-1)\int_0^\theta \left[x^{n-2}e^{\frac{-x^2}{2}}\right]dx = a_{n-1}(\theta) - (n -$

1θn−1e−θ22

$A_n =$

$\lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_n(\theta) = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\left[a_{n-1}(\theta) - (n-1)\theta^{n-1}e^{\frac{-\theta^2}{2}}\right] =$

$A_n = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} a_{n-1}(\theta) - \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\left[(n-1)\theta^{n-1}e^{\frac{-\theta^2}{2}}\right] =$ or

$\lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\left[\theta^{n-1}e^{\frac{-\theta^2}{2}}\right] = 0$ donc $\mathbf{A_n = A_{n-2}}$ **pour** $\mathbf{n \geq 2}$

b) $A_3 = A_1 = 1$; $A_4 = A_2 = A_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

Problème 197 :

A. Soit la fonction $\boldsymbol{f_m}$ définie par :

$\boldsymbol{f_m(x)} = \frac{\boldsymbol{mx^2 - (m+2)x + 2}}{\mathbf{2x - 5}}$ **avec $\boldsymbol{m} \in$ IR.**

1. Déterminer les limites de $\boldsymbol{f_m}$ sur D_{f_m} suivant les valeurs de $\boldsymbol{m}$ (pour $\boldsymbol{m = 0}$; $\boldsymbol{m = \frac{4}{5}}$ $\boldsymbol{et\ m = 2}$).

2. Pour quelles valeurs du paramètre $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{f_m}$

a) N'admet-elle ni maximum, ni minimum ?

b) Admet-elle un maximum et un minimum ?

3. Qu'a-t-il de particulier pour $\boldsymbol{m = 0}$; $\boldsymbol{m = \frac{4}{5}}$ $\boldsymbol{et\ m = 2}$?

4. Montrer pour tout réel $\boldsymbol{m}$ non nul qu'il existe deux points A et B communs à toutes les courbes $\boldsymbol{\mathcal{C}_{f_m}}$ dont on déterminera leurs coordonnées.

B. On considère la fonction $\boldsymbol{h}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]-\infty; \mathbf{1}]\ \boldsymbol{h(x)} = \frac{\mathbf{2x^2 - 4x + 2}}{\mathbf{2x - 5}} \\ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ ]\mathbf{1};\ +\infty[\ \boldsymbol{h(x) = (x - 1)e^x} \end{cases}.$$

1.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de $\boldsymbol{h}$ sur IR. Déterminer les équations des demi-tangentes au point d'abscisse 1.

b) Déterminer les limites de $\boldsymbol{h}$ sur D_h.

c) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{h}$.

2. Montrer que la droite (d) d'équation $\boldsymbol{y = x + \frac{1}{2}}$ est une asymptote à $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ en $-\infty$. En déduire la position relative entre (d) et $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$.

3. Tracer $\boldsymbol{\mathcal{C}_h}$ et (d) (unité graphique 2 cm).

4. Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un nombre réel compris entre 3 et 4. On note $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$ l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} \mathbf{2 \leq x \leq \lambda} \\ \mathbf{0 \leq y \leq h(\lambda)} \end{cases}$.

a) Déterminer la valeur en cm² de $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$.

b) Calculer la limite de $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$ quand $\boldsymbol{\lambda}$ vers $+\infty$.

Correction :

A. $\boldsymbol{f_m(x)} = \frac{\boldsymbol{mx^2 - (m+2)x + 2}}{\mathbf{2x - 5}}$ **avec $\boldsymbol{m \in IR}$.**

1. Déterminer les limites de $\boldsymbol{f_m}$ sur D_{f_m}.

$D_{f_m} = \{x \in \text{IR} \,/ 2x - 5 \neq 0\} = \text{IR} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{mx}{2}\right] = \begin{cases}+\infty\ si\ m<0\\ 0\ si\ m=0\\ -\infty\ si\ m>0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{mx}{2}\right] = \begin{cases}-\infty\ si\ m<0\\ 0\ si\ m=0\\ +\infty\ si\ m>0\end{cases}$.

- **pour $m=0$: $f_0(x)=\frac{2}{2x-5}$**

$\lim\limits_{x\mapsto(5/2)} f_0(x) = \begin{cases}\frac{2}{0^-}=-\infty\ \ si\ x<5/2\\ \frac{2}{0^+}=+\infty\ \ si\ x>5/2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_0(x)=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_0(x)=0$.

- **pour $m=\frac{4}{5}$: $f_{\frac{4}{5}}(x)=\frac{4x^2-14x+10}{5(2x-5)}=$**

$2\frac{2x^2-7x+5}{5(2x-5)}=\frac{2(2x-5)(x-1)}{5(2x-5)}=\frac{2}{5}(x-1)$

$\lim\limits_{x\mapsto(5/2)} f_{\frac{4}{5}}(x)=\lim\limits_{x\mapsto(5/2)}\left[\frac{2}{5}(x-1)\right]=\frac{3}{5}$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_{\frac{4}{5}}(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_{\frac{4}{5}}(x)=+\infty$.

- **pour $m=2$: $f_2(x)=\frac{2x^2-4x+2}{2x-5}=\frac{2(x-1)^2}{2x-5}$**

$\lim\limits_{x\mapsto(5/2)} f_2(x) = \begin{cases}\frac{1/2}{0^-}=-\infty\ \ si\ x<5/2\\ \frac{1/2}{0^+}=+\infty\ \ si\ x>5/2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f_2(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{2x^2}{2x}=x\right]=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_2(x)=+\infty$

2. **Pour quelles valeurs du paramètre m, f_m :**

$\forall\ x\neq\frac{5}{2}\ \ f'_m(x)=\frac{2mx^2-10mx+5m+6}{(2x-5)^2}$ son signe dépend de $2mx^2-10mx+5m+6$.

Posons $2mx^2-10mx+5m+6=0$

$\Delta=12(5m-4)$

a) **N'admet-elle ni maximum, ni minimum ?**

Si $\Delta=12(5m-4)<0 \Leftrightarrow 5m-4<0 \Leftrightarrow m<\frac{4}{5}$

Pour f admet ni maximum, ni minimum si $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\frac{4}{5}\right[$.

b) **Admet-elle un maximum et un minimum ?**

Si $\Delta=12(5m-4)>0 \Leftrightarrow 5m-4>0 \Leftrightarrow m>\frac{4}{5}$

3. **pour $m=0$:** $\forall\ x\neq\frac{5}{2}\ \ f'_0(x)=\frac{6}{(2x-5)^2}$, nous aurons ni maximum, ni minimum mais une courbe croissante.

pour $m=\frac{4}{5}$: $\Delta=0\ et\ f'_{\frac{5}{2}}(x)=\frac{2}{5}$ nous aurons ni maximum, ni minimum mais une droite affine croissante.

pour $m=2$: $\forall\ x\neq\frac{5}{2}\ \ f'_2(x)=\frac{4x^2-20x+16}{(2x-5)^2}=4\frac{x^2-5x+4}{(2x-5)^2}=\frac{4(x-1)(x-4)}{(2x-5)^2}$ nous aurons un maximum et un minimum.

4. $\forall\ x\neq\frac{5}{2}\ f_m(x)=f_{m+1}(x)\Leftrightarrow(m+1)x^2-(m+3)x+2=mx^2-(m+2)x+2\Leftrightarrow(m+1-1)x^2-(m+3-2)x=0\Leftrightarrow$

$mx^2-mx=mx(x-1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$

$A\left(0;\ \frac{2}{5}\right)$ et $B(1;\ 0)$.

B. $\begin{cases}\forall\ x\in\left]-\infty;1\right]\ h(x)=\frac{2x^2-4x+2}{2x-5}=\frac{2(x-1)^2}{2x-5}.\\ \forall\ x\in\left]1;\ +\infty\right[\ h(x)=(x-1)e^x\end{cases}$

1.

a) **$h(1)=0$ continuité et la dérivabilité de h.**

Continuité de h :

$\lim\limits_{x\mapsto1^-} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto1^-}\left[\frac{2(x-1)^2}{2x-5}\right]=0$

$\lim\limits_{x\mapsto1^+} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto1^+}[(x-1)e^x]=0$.

Alors h est continue sur IR

Dérivabilité de h :

- $\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\frac{\frac{2(x-1)^2}{2x-5}-0}{x-1}=\frac{2x-1}{2x-5}$

$\lim\limits_{x\mapsto1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\mapsto1^-}\frac{2x-1}{2x-5}=-\frac{1}{3}$

T_{1^-} $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

- $\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\frac{(x-1)e^x-0}{x-1}=e^x$

$\lim\limits_{x\mapsto1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\mapsto1^+}e^x=e$

T_{1^+} $y=ex-e$.

Alors h est dérivable sur $\left]-\infty;1\right[$ **et** sur $\left]1;\ +\infty\right[$.

b) **Déterminer les limites de h sur D_h.**

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{2x^2}{2x}=x\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left[\frac{2x^2}{2x}=x\right]=+\infty$.

c) **Dresser le tableau de variation de h.**

$\forall\ x\leq1\ \ h'(x)=f'_2(x)=\frac{4(x-1)(x-4)}{(2x-5)^2}\geq0$ alors h est croissante sur $\left]-\infty;1\right]$.

$\forall\ x>1\ \ h'(x)=xe^x>0$ alors h est strictement croissante sur $\left]1;\ +\infty\right[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$+$
$h(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

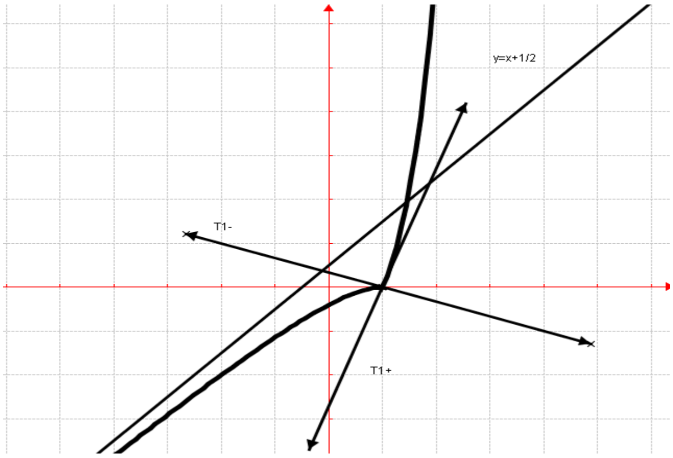
2. $h(x)-y=\frac{2x^2-4x+2}{2x-5}-x-\frac{1}{2}=\frac{9}{2(2x-5)}$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[h(x)-y]=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\left[\frac{9}{2(2x-5)}\right]=0$ alors la droite (d) d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$.

position relative entre (d) et $\mathcal{C}_h$:

Sur $]-\infty; \mathbf{1}]$ $h(x) - y = \frac{9}{2(2x-5)} < 0$ alors $\mathcal{C}_h$ est au dessous de la droite (d).

3. Tracer $\mathcal{C}_h$ et (d).



4. $\lambda \in [3; 4]$ / $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire $\begin{cases} 2 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq h(\lambda) \end{cases}$.

a) Déterminer la valeur en cm² de $\mathcal{A}(\lambda)$.

$\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_2^{\lambda} h(x)dx \text{ cm}^2 = 4\int_2^{\lambda}[(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}] \text{ cm}^2 =$

$\mathcal{A}(\lambda) = 4\int_2^{\lambda} h(x)dx \text{ cm}^2 = 4\left([(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}]_2^{\lambda} -\right.$

2λ***ex***cm2=4***x−2ex***2λcm2

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}}\text{cm}^2$$

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty}\left[4(\lambda - 2)e^{\lambda}\right] = +\infty$.

<u>Problème 198 :</u> On désigne $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$

A. Soit u_n définie par $u_n(x) = (1 + x)e^x - n$.

a) Etudier les limites de u_n en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de u_n.

c) Dresser le tableau de variation de u_n. En déduire le signe de $u_n(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

B. On considère la fonction f_n définie par :

$f_n(x) = \begin{cases} \boldsymbol{xe^x - nx} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x \leq 0} \\ \boldsymbol{x^n(1 - \ln x)} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} > 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de $f_n$en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2.

a. Déterminer la limite de f_n sur D_{f_n}.

b. Etudier le sens de variation de f_n sur D_{f_n}.

c. Dresser le tableau de variation de f_n.

3. Cas $n = 1$ ou $n = 2$

a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression de $f_2(x) - f_1(x)$.

b) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ et montrer que se coupent en trois (3) points dont on précisera leurs coordonnées.

4.

a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_1}$ en $-\infty$. En déduire la position relative entre (d) et $\mathcal{C}_{f_1}$.

b) Montrer que la droite (d') d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_2}$ en $-\infty$. En déduire la position relative entre (d') et $\mathcal{C}_{f_2}$

c) Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

5. Construire $\mathcal{C}_{f_1}$; $\mathcal{C}_{f_2}$; (d) et (d'). (4 cm)

6. Déterminer l'aire A en cm², du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_{f_1}$; $\mathcal{C}_{f_2}$ et les droites d'équation x = 1 et $x = e$.

<u>Correction :</u> On désigne $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$

A. $u_n(x) = (1 + x)e^x - n$.

a) Etudier les limites de u_n en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(1 + x)e^x - n] = -n$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(1 + x)e^x - n] = +\infty$.

b) Etudier le sens de variation de u_n

$\forall\ x \in$ IR $u_n'(x) = (2 + x)e^x$

$\forall\ x \leq -2$ $u_n'(x) \leq 0$ donc u_n est décroissante sur $]-\infty; -2]$.

$\forall\ x \geq -2$ $u_n'(x) \geq 0$ donc u_n est croissante sur $[-2; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de u_n.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$u_n'(x)$	$-$		$+$
$u_n(x)$	$-n$ ↘	$-e^{-2} - n$	↗ $+\infty$

$u_n(x) \leq 0$ sur $]-\infty; 0]$ car $u_n(0) = 1 - n \leq 0$.

B. $f_n(x) = \begin{cases} \boldsymbol{xe^x - nx} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x \leq 0} \\ \boldsymbol{x^n(1 - \ln x)} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} > 0 \end{cases}$.

1. continuité et la dérivabilité de $f_n$en 0

Continuité de $f_n$en 0:

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}[xe^x - nx] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^+}[x^n - x^n \ln x] = 0$.

Alors f_n est continue sur IR

Dérivabilité de $f_n$en 0:

- $\frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 0} = \frac{xe^x - nx - 0}{x} = e^x - n$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^-}(e^x - n) = 1 - n$ alors f_n est dérivable à gauche de 0. $\mathcal{C}_{f_n}$ admet une demi-tangente à gauche de 0. $\mathbf{T_0}$- $y = (1 - n)x$.

- $\frac{f_n(x) - f_n(1)}{x - 0} = \frac{x^n - x^n \ln x}{x} = x^{n-1} - x^{n-1}\ln x$

$\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(1)}{x-0} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} [x^{n-1} - x^{n-1}\ln x] = 0$ alors f_n est dérivable à droite de 0. $\mathcal{C}_{f_n}$ admet une demi-tangente à droite de 0. T_{0^+} $y = 0$.

Comme $f'_n g(x) \neq f'_n d(x)$ **alors** f_n est dérivable sur $]-\infty; 0[$ **et** sur $]0; +\infty[$.

2.

a) Déterminer la limite de f_n sur D_{f_n}.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[xe^x - nx] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x^n(1-\ln x)] = -\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f_n sur D_{f_n}

- $\forall\, x < 0$ $f'_n(x) = (1+x)e^x - n = u_n(x) < 0$ alors f_n est strictement décroissante sur $]-\infty;\ 0[$.
- $\forall\, x > 0$ $f'_n(x) = x^{n-1}(n-1-n\ln x)$ son signe dépend de $(n-1-n\ln x)$

Posons $n-1-n\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{1-\frac{1}{n}}$

$\forall\, x \in \left]0;\ e^{1-\frac{1}{n}}\right]$ $f'_n(x) \geq 0$ donc f_n est croissante sur $\left]0;\ e^{1-\frac{1}{n}}\right]$

$\forall\, x \in \left[e^{1-\frac{1}{n}}; +\infty\right[$ $f'_n(x) \leq 0$ donc f_n est décroissante sur $\left[e^{1-\frac{1}{n}}; +\infty\right[$

c) Dresser le tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		0		$e^{1-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{e^{n-1}}{n}$	↘	$-\infty$

3. Cas $n = 1$ ou $n = 2$

a) signe de l'expression de $f_2(x) - f_1(x)$.

- $\forall\, x \leq 0$ $f_2(x) - f_1(x) = -x > 0$
- $\forall\, x > 0$ $f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)(1-\ln x)$

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		$-$		$+$		$-$	

b) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{f_2}$ et montrer que se coupent en trois (3) points dont on précisera leurs coordonnées.

- $\forall\, x \leq 0$ $f_2(x) - f_1(x) = -x > 0$ alors $\mathcal{C}_{f_2}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{f_1}$ sur $]-\infty; 0[$.
- $\forall\, x \in]0; 1[\cup]e;\ +\infty[$ $f_2(x) - f_1(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_{f_2}$ est au dessous de $\mathcal{C}_{f_1}$ sur $]0; 1[$ et sur $]e;\ +\infty[$.

$\forall\, x \in]1; e[$ $f_2(x) - f_1(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_{f_2}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{f_1}$ sur $]1; e[$.

4.

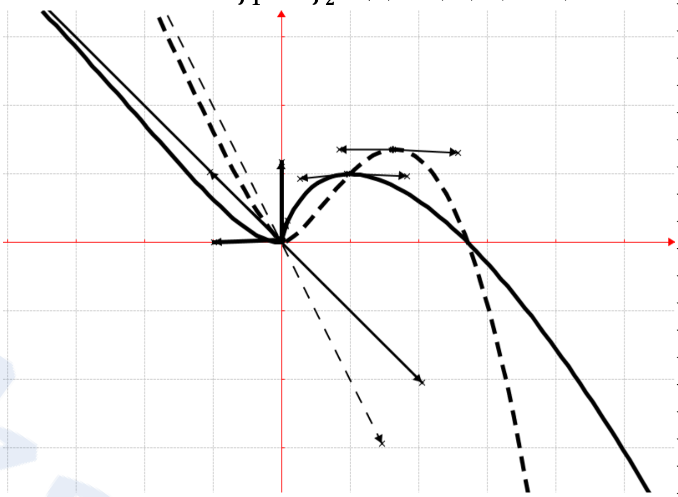
a) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f_1(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[xe^x] = 0$ alors la droite (d) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_1}$ en $-\infty$. **Et comme** $\forall\, x < 0$ $f_1(x) - y = xe^x < 0$ alors la droite (d) est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$.

b) $\lim\limits_{x \mapsto -\infty}[f_2(x) - y] = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[xe^x] = 0$ alors la droite (d') d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_2}$ en $-\infty$. **Et comme** $\forall\, x < 0$ $f_2(x) - y = xe^x < 0$ alors la droite (d') est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_{f_2}$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[\mathbf{1} - \ln x] = -\infty$: $\mathcal{C}_{f_1}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en$+\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[x(1 - \ln x)] = -\infty$. $\mathcal{C}_{f_2}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en$+\infty$.

5. Construire $\mathcal{C}_{f_1}$; $\mathcal{C}_{f_2}$; (d) et (d'). (4 cm)



6. $\forall\, x \in]1; e[$ $f_2(x) - f_1(x) = (x^2 - x)(1 -$ ln*x>0*

$U = \int_1^e [f_2(x) - f_1(x)]dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)(1 -\right.$ ln*x1e+1e13x2−12xdx=13x3−12x21*−ln*x+19x3−14x21e=19e3−14e2+16*

$$\mathbf{A = 16\ U\ cm^2 = 4\left(\frac{4}{9}e^3 - e^2 + \frac{2}{3}\right) cm^2}$$

<u>**Problème 199 :**</u> **On désigne $n \in]0; e[$**

A. Soit f_n définie par $f_n(x) = (2 - x)e^x - n$.

1.

a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f_n.

c) Dresser le tableau de variation de f_n.

2.

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ deux solutions, une notée α_n appartenant à $]-\infty; 1[$et une autre notée β_n appartenant à $]1;\ +\infty[$.

b) Montrer que $e^{\alpha_n} - n\alpha_n = (e^{\alpha_n} - n)(\alpha_n - 1)$ De même que $e^{\beta_n} - n\alpha_n = (e^{\beta_n} - n)(\beta_n - 1)$.

c) En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant x.

B. Soit u définie par $u(x) = e^x - nx$.

a) Etudier les limites de u en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de u.

c) Dresser le tableau de variation de u. En déduire le signe de $u(x)$ sur IR.

C. On considère la fonction h_n définie par : $h_n(x) = \frac{e^x - n}{e^x - nx}$.

i.

a) Quel est l'ensemble de définition de h_n?

b) Déterminer les limites de h_n sur D_{h_n}.

ii. Prouvez que $h'_n(x) = \frac{n}{(e^x - nx)^2} \cdot f_n(x)$. En déduire le sens de variation de h_n sur D_{h_n}.

iii. Montrer que $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n - 1}$ et $h_n(\beta_n) = \frac{1}{\beta_n - 1}$. Dresser le tableau de variation de h_n sur D_{h_n}.

iv. On note les points M_n et N_n d'abscisses respectives α_n et β_n. Montrer que lorsque n varie les points M_n et N_n sont sur une courbe fixe Γ dont on déterminera une équation.

v. Démontrer que la fonction H_n définie par $H_n(x) = \ln(e^x - nx)$ est une primitive de h_n.

D. Cas $n = 1$ ou $n = 2$

1. Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression de $h_2(x) - h_1(x)$.

2. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_{h_1}$ et $\mathcal{C}_{h_2}$ et montrer que se coupent en un point dont on précisera son coordonnées.

3. Prouver que $\alpha_2 = 0$.

4. Construire $\mathcal{C}_{h_1}$; $\mathcal{C}_{h_2}$ et Γ. Prendre unité 2 cm × 5 cm ; $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$ et $\beta_2 = 1,6$.

5. Soit λ est un réel strictement supérieur à 1.

a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine du plan défini par $1 \le x \le \lambda$ et $h_1(x) \le y \le h_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

<u>Correction :</u> On désigne $n \in]0; e[$

A. $f_n(x) = (2 - x)e^x - n$.

1.

a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[(2 - x)e^x - n] = -n$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}[(2 - x)e^x - n] = -\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f_n.

$\forall\, x \in$ IR $f'_n(x) = (1 - x)e^x$

- $\forall\, x > 1$ $f'_n(x) < 0$ alors f_n est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
- $\forall\, x < 1$ $f'_n(x) > 0$ alors f_n est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$

c) Dresser le tableau de variation de f_n.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$	$-n$	$\nearrow$	$e - n$	$\searrow$	$-\infty$

2.

a)

- f_n est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 1[$. Or $f_n(-\infty) \times f_n(1) = -en + n^2 < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n appartenant à $]-\infty; 1[$.
- f_n est continue et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. Or $f_n(+\infty) \times f_n(1) < 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n appartenant à $]1; +\infty[$.

b) $f_n(x) = (2 - x)e^x - n = 0 \Leftrightarrow (2 - x)e^x = n$ $\Leftrightarrow 2e^x - xe^x = n \Leftrightarrow e^x + e^x = n + xe^x \Leftrightarrow$ $e^x = n + xe^x - e^x \Leftrightarrow e^x - nx = n + xe^x - e^x - nx \Leftrightarrow e^x - nx = (x - 1)e^x - n(x - 1)$

$e^x - nx = (x - 1)(e^x - n)$. On déduit que

$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha_n} - n\alpha_n = (e^{\alpha_n} - n)(\alpha_n - 1)$

$f_n(\beta_n) = 0 \Leftrightarrow e^{\beta_n} - n\alpha_n = \left(e^{\beta_n} - n\right)(\beta_n - 1)$.

c) En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant x.

$\forall\, x \in]-\infty; \alpha_n[\cup]\beta_n; +\infty[$ $f_n(x) < 0$

$\forall\, x \in]\alpha_n; \beta_n[$ $f_n(x) > 0$

Si $\alpha_n = 0$ ou $\beta_n = 0$ alors $f_n(x) = 0$.

B. Soit u définie par $u(x) = e^x - nx$.

a) Etudier les limites de u en $-\infty$ et $+\infty$.

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty}[e^x - nx] = +\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left[\left(\frac{e^x}{x} - n\right)x\right] = +\infty$.

b) Etudier le sens de variation de u.

$\forall\, x \in$ IR $u'(x) = e^x - n$

- $\forall\, x < \ln n$ $u'(x) < 0$ alors u est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln n[$.
- $\forall\, x > \ln n$ $u'(x) > 0$ alors u est strictement croissante sur $]\ln n; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de u.

x	$-\infty$		$\ln n$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$		$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$u(x) > 0$ sur IR.

C. $h_n(x) = \frac{e^x - n}{e^x - nx}$.

1.

a) $D_{h_n} = IR$

b) **Déterminer les limites de h_n sur D_{h_n}.**

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \left[\frac{e^x-n}{e^x-nx}\right] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} h_n(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x-n}{e^x-nx}\right] = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left[\frac{e^x}{e^x} = 1\right] = 1.$

2. $\forall x \in IR$ $h_n'(x) = \frac{e^x(e^x-nx)-(e^x-n)(e^x-n)}{(e^x-nx)^2} = \frac{n(2-x)e^x-n^2}{(e^x-nx)^2} = \frac{n}{(e^x-nx)^2}.f_n(x)$ signe dépend de $f_n(x)$

$\forall x \in]-\infty;\ \alpha_n[\cup]\beta_n;\ +\infty[$ $h_n'(x) < 0$ alors h_n est strictement décroissante sur $]-\infty;\ \alpha_n[$ et sur $]\beta_n;\ +\infty[$

$\forall x \in]\ \alpha_n;\ \beta_n[$ $h_n'(x) > 0$ alors h_n est strictement croissante sur $]\ \alpha_n;\ \beta_n[$.

3. $\boldsymbol{h_n(x) = \frac{e^x-n}{e^x-nx}}$ on sait que $e^x - nx = (x-1)(e^x-n)$ donc $h_n(x) = \frac{e^x-n}{e^x-nx} = \frac{e^x-n}{(x-1)(e^x-n)}$

$h_n(x) = \frac{1}{x-1}$.

D'où $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n-1}$ et $h_n(\beta_n) = \frac{1}{\beta_n-1}$.

tableau de variation de h_n sur D_{h_n}.

x	$-\infty$		α_n		β_n		$+\infty$
$h_n'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$\boldsymbol{h_n(x)}$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\alpha_n-1}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\beta_n-1}$	$\searrow$	1

4. $M_n(\alpha_n)$ et $N_n(\beta_n)$. lorsque n varie les points M_n et N_n sont sur une courbe fixe Γ $y = \frac{1}{x-1}$

5. $H_n(x) = \ln(e^x - nx) \Leftrightarrow H'_n(x) = \frac{e^x-n}{e^x-nx} = h_n(x)$ d'où H_n est une primitive de h_n.

D. **Cas $n = 1$ ou $n = 2$**

1. **signe de l'expression de $h_2(x) - h_1(x)$:**

$h_2(x) - h_1(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x} - \frac{e^x-1}{e^x-x} = \frac{e^x(x-1)}{(e^x-2x)(e^x-x)}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h_2(x) - h_1(x)$		$-$		$+$	

2. $\forall x < 1$ $h_2(x) - h_1(x) < 0$ alors $\mathcal{C}_{h_2}$ est au dessous de $\mathcal{C}_{h_1}$ sur $]-\infty;\ 1[$.

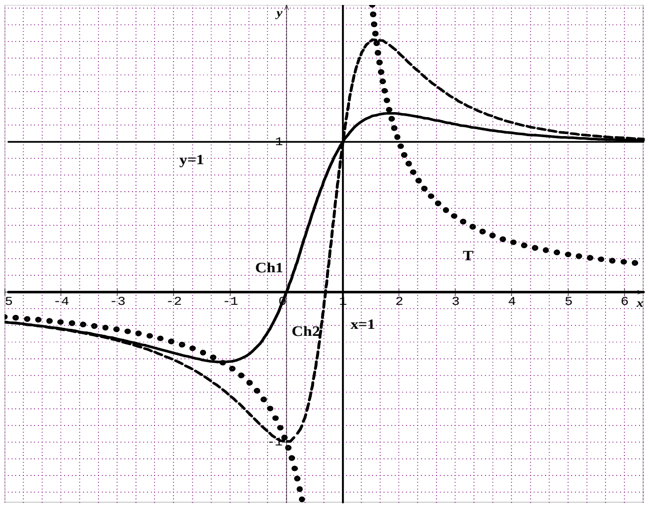
$\forall x > 1$ $h_2(x) - h_1(x) > 0$ alors $\mathcal{C}_{h_2}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{h_1}$ sur $]1; +\infty[$.

$h_2(x) - h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ce point a pour coordonnées $(1; 1)$.

3. **Prouver que $\alpha_2 = 0$.**

$f_2(0) = (2-0)e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow f_2(0) = 0$ comme $f_n(x) = 0$ par identification on aura $\alpha_2 = 0$.

4. **Construire $\mathcal{C}_{h_1}$; $\mathcal{C}_{h_2}$ et Γ. Prendre unité 2 cm $\times$ 5 cm ; $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$ et $\beta_2 = 1,6$.**



5. $\boldsymbol{\lambda > 1}$

Sur $]1; +\infty[$ $h_2(x) - h_1(x) > 0$

a) $U = \int_1^\lambda [h_2(x) - h_1(x)]dx = [H_2(x) - H_1(x)]_1^\lambda$

$U = \ln\left(\frac{e^x-2\lambda}{e^x-\lambda}\right) + \ln\left(\frac{e-1}{e-2}\right)$ **l'aire**

$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = 10\ Ucm^2 = 10\left[\ln\left(\frac{e^x-2\lambda}{e^x-\lambda}\right) + \ln\left(\frac{e-1}{e-2}\right)\right]cm^2.}$

b) $\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 10\ln\left(\frac{e-1}{e-2}\right)\ cm^2$ car

$\lim\limits_{\lambda \mapsto +\infty} \ln\left(\frac{e^x-2\lambda}{e^x-\lambda}\right) = 1\ cm^2.$

Problème 200 :

A. **On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$. d'unité graphique 4 cm.**

1.

a) **Déterminer les limites de f sur son domaine de définition et donner une interprétation graphique du résultat.**

b) **Dresser le tableau de variation f.**

2. **Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet deux solutions réelles. On note α et β ces solutions telles que $\alpha < \beta$. Donner une valeur approchée de α et une valeur approchée de β à 10^{-1} près par défaut.**

3. **Construire sa courbe $\mathcal{C}_f$.**

4. **Soit θ un réel positif.**

a) **A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'aire $\mathcal{A}(\theta) = \int_0^\theta f(t)dt$ en cm^2.**

b) **Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\theta)$ en $+\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.**

B. **Pour tout entier relatif n, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = (x+1)e^{-nx}$. On désignera par $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.**

1. **Déterminer par le calcul le point d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. Vérifier que pour tout**

entier relatif n, la courbe $\mathcal{C}_n$ passe par ces points. Donner leurs équations de la tangente T_n.

2.

a) Montrer que

$\forall\ x \in \mathrm{IR}\ \ f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x+1)(e^{-x} - 1)$.

b) Etudier suivant les valeurs de x, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$.

3. On suppose que n est non nul.

a) Calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.

b) En déduire le sens de variation de f_n (distinguer les cas $n < 0$ et $n > 0$).

c) Dresser le tableau de variation de f_n sur IR.

4.

a) Démontrer qu'il existe une et une seule valeur de n que l'on déterminera pour la laquelle : $f_n''(x) + 2f_n'(x) + f_n(x) = 0$ pour tout réel.

b) Tracer la courbe représentative de g définie par $g(x) = f_1''(x) + 2f_1'(x)$.

Correction :

A. $f(x) = (x+1)e^{-x}$. d'unité graphique 4 cm.

1.

a) $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$ on calcule $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

b) **Dresser le tableau de variation f.**

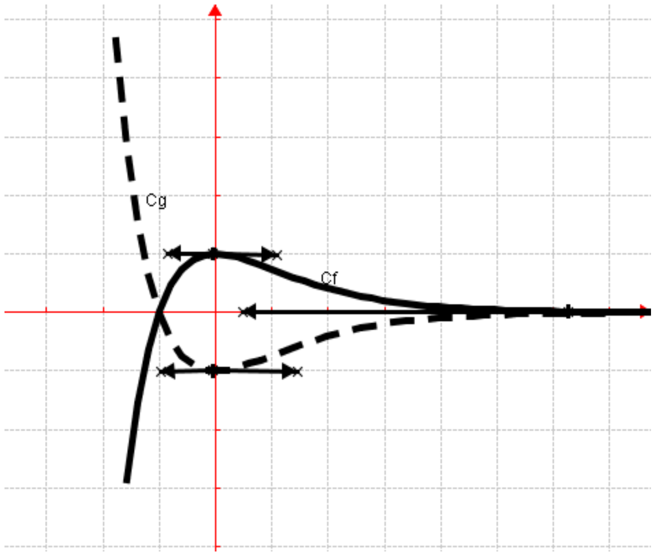
$\forall\ x \in \mathrm{IR},\ f'(x) = -xe^{-x}$.

- $\forall\ x > 0\ \ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- $\forall\ x < 0\ \ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty;\ 0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

2. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, elle est bijective respectivement de $]-\infty; 0[$ sur $]-\infty; 1[$ d'une part et d'autre part de $]0; +\infty[$sur $]0; 1[$. De plus $f(x) = \frac{1}{4} \in \begin{cases}]-\infty; 1[\\ ]0; 1[\end{cases}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet deux solutions réelles. On note α et β ces solutions telles que $\alpha < \beta$: $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$ et $2{,}6 < \beta < 2{,}7$.

3. $\mathcal{C}_f$ en trait continue et $\mathcal{C}_g$ en trait discontinue



4. $\mathrm{U} = \int_0^\theta f(t)dt = \int_0^\theta [(t+1)e^{-t}]dt = [-(t+1)e^{-t}]_0^\theta + \int_0^\theta e^{-t}dt = [-(t+2)e^{-t}]_0^\theta = 2 - (\theta+2)e^{-\theta}$.

a) $\mathcal{A}(\theta) = 16\mathbf{U}\ cm^2 = 16\big(2 - (\theta+2)e^{-\theta}\big)cm^2$

b) $\lim\limits_{\theta \mapsto +\infty} \mathcal{A}(\theta) = \lim\limits_{\theta \mapsto +\infty}\big[16\big(2 - (\theta+2)e^{-\theta}\big)\big] = 32cm^2$

Graphiquement ceci signifie que l'aire de la surface infinie limitée par l'axe des abscisses et la courbe est finie et tend vers $32cm^2$.

B. $n \in \mathbb{Z}$, $f_n(x) = (x+1)e^{-nx}$.

$\forall\ x \in \mathrm{IR},\ f_n'(x) = (1 - n - nx)e^{-nx}$.

1. $f_0(x) = f_1(x) \Leftrightarrow (x+1)e^0 = (x+1)e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x} - 1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$, ce sont les points A et B de coordonnées A$(0; 1)$ et B$(-1; 0)$. **Vérifier que pour tout entier relatif n, la courbe $\mathcal{C}_n$ passe par ces points.**

$f_n(0) = (0+1)e^{-0} = 1$ alors A passe sur $\mathcal{C}_n$ et $f_n(-1) = (-1+1)e^1 = 0$ alors B passe sur $\mathcal{C}_n$.

Donner leurs équations de la tangente T_n.

Au point A : T_n : $y = (1-n)x + 1$.

Au point B : T_n : $y = e^n x + e^n$.

2.

a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x+1)e^{-(n+1)x} - (x+1)e^{-nx} = (x+1)e^{-nx}.e^{-x} - (x+1)e^{-nx} = (x+1)(e^{-x} - 1)$

$\forall\ x \in \mathrm{IR}\ \ f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x+1)(e^{-x} - 1)$

b) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x+1)(e^{-x} - 1)$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	−		+	−

- Sur $]-\infty; -1[\ \cup\ ]0; +\infty[\ f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$.

$\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$

- Sur $]0; 1[$, $(x+1)(e^{-x} - 1) > 0$.

$\mathcal{C}_n$ est au-dessous de $\mathcal{C}_{n+1}$.

- Si $x = 0$ ou $x = -1$ alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ se coupent en points A$(0; 1)$ et B$(-1; 0)$.

3. On suppose que n est non nul.

a) $\forall\, x \in$ IR $\boldsymbol{f'_n(x)} = (1 - n - nx)e^{-nx}$**.**

b) Signe de $f_n^{'}(x)$ dépend de celui de $1 - n - nx$

1^er^ cas $n < 0$

- $\forall\, x < \frac{1}{n} - 1$ $f_n'(x) < 0$ alors $\boldsymbol{f_n}$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{n} - 1\right[$.
- $\forall\, x > \frac{1}{n} - 1$ $f_n'(x) > 0$ alors $\boldsymbol{f_n}$ est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{n} - 1; +\infty\right[$

2^er^ cas $n > 0$

- $\forall\, x > \frac{1}{n} - 1$ $f_n'(x) < 0$ alors $\boldsymbol{f_n}$ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{n} - 1; +\infty\right[$.
- $\forall\, x < \frac{1}{n} - 1$ $f_n'(x) > 0$ alors $\boldsymbol{f_n}$ est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{n} - 1\right[$

c) Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f_n}$ sur IR.

1^er^ cas $n < 0$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{f_n}(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [\boldsymbol{xe^{-nx}}] = 0$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{f_n}(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [\boldsymbol{xe^{-nx}}] = +\infty$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{n} - 1$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	|	$+$	
$\boldsymbol{f_n}(x)$	0	$\searrow$	$\frac{e^n}{ne}$	$\nearrow$	$+\infty$

2^er^ cas $n > 0$

$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \boldsymbol{f_n}(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} [\boldsymbol{xe^{-nx}}] = -\infty$

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \boldsymbol{f_n}(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} [(\boldsymbol{x+1})\boldsymbol{e^{-nx}}] = 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{n} - 1$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	|	$-$	
$\boldsymbol{f_n}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^n}{ne}$	$\searrow$	0

4.

a) Démontrer qu'il existe une et une seule valeur de n que l'on déterminera pour la laquelle : $\boldsymbol{f_n^{''}(x) + 2f_n^{'}(x) + f_n(x) = 0}$ pour tout réel.

$\forall\, x \in$ IR $f_n(x) = (x + 1)e^{-nx}$

$\forall\, x \in$ IR $f_n^{'}(x) = (1 - n - nx)e^{-nx}$

$\forall\, x \in$ IR $f_n^{''}(x) = (n^2 - 2n + n^2x)e^{-nx}$

$f_n^{''}(x) + 2f_n^{'}(x) + f_n(x) = [n^2 - 4n + 3 +$
$n2{-}2n{+}1xe{-}nx{=}0 \Leftrightarrow$

$n^2 - 4n + 3 + (n^2 - 2n + 1)x = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} n^2 - 4n + 3 = 0 & (E_1) \\ n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 = 0 & (E_2) \end{cases}$ on remarque que $n = 1$ pour l'équation (E_2). Or si $n = 1$ alors (E_1) devient nulle.

Ainsi il existe une et une seule valeur de $n = 1$.

b) Tracer la courbe représentative de g définie par $g(x) = f_1^{''}(x) + 2f_1^{'}(x)$.

On sait que $f_n^{''}(x) + 2f_n^{'}(x) + f_n(x) = 0 \Leftrightarrow$
$f_1^{''}(x) + 2f_1^{'}(x) + f_1(x) = \boldsymbol{g(x)} + f_1(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{g(x) = f_1^{''}(x) + 2f_1^{'}(x) = -f_1(x) = -f(x)}$

Donc la courbe représentative de g est obtenue par symétrie orthogonale des axes des abscisses à partir de la courbe de la fonction f. Voir graphique.

Louange à Allah et que la prière et le salut soient sur le serviteur et Messager d'Allah, Muhammad, le meilleur que l'humanité est porté (malheur à ceux qui l'ont insultés et mentis sur lui.), sa famille et ses Compagnons.
Gloire à Dieu, mon Maitre Qui m'a tout donné et continue à me donner. Je n'ai de savoir de ce qu'Allah (soub hana wat tala), Le Tout Miséricordieux m'avait offert.
Seigneur pardonne nos péchés, fais-nous miséricorde, accepte nos bonnes œuvres et bénit nos actions. Ta parole est véridique.
Louange à Allah, Qui de Sa Grace, j'avais pu proposer cette œuvre Qui sans Lui, je ne serais pas à ce niveau. « Gloire et pureté à Toi, ô Allah, et à Toi la louange. Que ton Nom soit béni et Ta Majesté soit élevée, et il n'y a pas d'autre divinité [digne d'adoration] en dehors de Toi »

ALLAH MERCI

Auteur

Moussa Abdoulaye Diallo

SMS AU 90 10 89 59